Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Siebenundachtzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1879.

Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des siebenundachtzigsten Bandes.

Mémoire sur les équations résolubles algébriquement.

(Par M. *G. G. Boldt* à St. Pétersbourg.)

Dans un mémoire qui n'a pas été achevé, *Abel* a examiné dans quels cas une équation irréductible est résoluble algébriquement et dans quels cas non (Oeuvres complètes T. II n°. XV). Nous regarderons les théorèmes démontrés dans ce mémoire comme connus, et nous ajouterons à ces théorèmes deux propositions, dont on trouvera facilement la démonstration.

Proposition *a*). Si $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mu-1}$ désignent les μ racines de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, μ étant un nombre premier, et α une racine quelconque de la même équation, la relation

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1\alpha^{-1} + \alpha_2\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)}$$

ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, ..., $\alpha_{\mu-1} = \alpha^{\mu-1}$.

Proposition *b*). Si l'on a la relation

$$\mu = \alpha_0^\nu + \alpha_1^\nu\alpha^{-\nu} + \alpha_2^\nu\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^\nu\alpha^{-(\mu-1)\nu},$$

où les lettres ont la même signification que dans la proposition précédente, et où ν désigne un nombre entier quelconque, on aura

$$\alpha_0^n + \alpha_1^n\alpha^{-\nu} + \alpha_2^n\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^n\alpha^{-(\mu-1)\nu} = 0,$$

tant que n n'est pas égal à ν.

I.

Des équations dont le degré μ est un nombre premier.

1. Soit $f(x) = 0$ l'équation proposée du degré premier μ et

$$p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

la fonction algébrique qui satisfait à l'équation proposée. Je dis que les coefficients $p_2, \ldots, p_\nu, \ldots, p_{\mu-1}$ s'expriment rationnellement en s et les quantités données de l'équation proposée.

Pour démontrer cela, on n'a qu'à montrer que les coefficients $p_2, \ldots, p_\nu, \ldots, p_{\mu-1}$ ne changent pas de valeur lorsqu'on donne aux radicaux des valeurs telles que s ne change pas de valeur. Si donc $p_2, \ldots, p_\nu, \ldots, p_{\mu-1}$, s se transforment en $p_2', \ldots, p_\nu', \ldots, p_{\mu-1}'$, s' lorsqu'on donne aux radicaux des valeurs quelconques dont ils sont susceptibles, telles que $s' = s$, il sera démontré qu'on doit avoir $p_2' = p_2, \ldots, p_\nu' = p_\nu, \ldots, p_{\mu-1}' = p_{\mu-1}$.

En effet, les μ racines de l'équation proposée $f(x) = 0$ sont

$$(1.)\quad \begin{cases} p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ p_0 + \alpha s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ p_0 + \alpha^2 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^4 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^{2\nu} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha^{2(\mu-1)} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_0 + \alpha^{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{\mu-2} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^{\mu-\nu} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \end{cases}$$

α désignant une racine imaginaire de l'équation binôme $\alpha^\mu - 1 = 0$. De même, comme

$$p'_0 + s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu s'^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} s'^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

est une racine de l'équation proposée, et que d'après l'hypothèse on a $s' = s$, les μ racines de l'équation proposée seront aussi données par les expressions

$$(2.)\quad \begin{cases} p'_0 + \alpha_0 s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_0^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_0^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_0^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ p'_0 + \alpha_1 s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_1^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_1^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_1^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ p'_0 + \alpha_2 s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_2^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_2^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_2^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p'_0 + \alpha_{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_{\mu-1}^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_{\mu-1}^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_{\mu-1}^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \end{cases}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$ désignent les μ racines de l'équation binôme $\alpha^\mu - 1 = 0$. Et comme chaque racine du premier système (1.) est égale à une racine du second système (2.), on aura

$$(3.)\quad \begin{cases} p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = p'_0 + \alpha_0 s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_0^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_0^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_0^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ p_0 + \alpha s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = p'_0 + \alpha_1 s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_1^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_1^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_1^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ p_0 + \alpha^2 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^4 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^{2\nu} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha^{2(\mu-1)} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = p'_0 + \alpha_2 s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_2^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_2^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_2^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_0 + \alpha^{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{\mu-2} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^{\mu-\nu} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha s^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = p'_0 + \alpha_{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha_{\mu-1}^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p'_\nu \alpha_{\mu-1}^\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + p'_{\mu-1} \alpha_{\mu-1}^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations, après les avoir respectivement multipliées par 1, α^{-1}, α^{-2}, ..., $\alpha^{-(\mu-1)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu s^{\frac{1}{\mu}} = \quad & s^{\frac{1}{\mu}}(\alpha_0 + \alpha_1\alpha^{-1} + \alpha_2\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)}) \\
+ \; & p_2' s^{\frac{2}{\mu}}(\alpha_0^2 + \alpha_1^2\alpha^{-1} + \alpha_2^2\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^2\alpha^{-(\mu-1)}) \\
+ \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \; & p_{\mu-1}' s^{\frac{\mu-1}{\mu}}(\alpha_0^{\mu-1} + \alpha_1^{\mu-1}\alpha^{-1} + \alpha_2^{\mu-1}\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)}).
\end{aligned}$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut ou que $s^{\frac{1}{\mu}}$ s'exprime rationnellement par p_2', p_3', ..., $p_{\mu-1}'$, s et α, ce qui n'a pas lieu, ou qu'on ait

$$\begin{aligned}
\mu &= \alpha_0 + \alpha_1\alpha^{-1} + \alpha_2\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)}, \\
0 &= p_2'(\alpha_0^2 + \alpha_1^2\alpha^{-1} + \alpha_2^2\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^2\alpha^{-(\mu-1)}), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= p_{\mu-1}'(\alpha_0^{\mu-1} + \alpha_1^{\mu-1}\alpha^{-1} + \alpha_2^{\mu-1}\alpha^{-2} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)}).
\end{aligned}$$

La première de ces équations ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$(4.) \qquad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \alpha^2, \quad \ldots, \quad \alpha_{\mu-1} = \alpha^{\mu-1} \qquad \text{(prop. } a.\text{)},$$

et les autres équations seront par là-même satisfaites (prop. *b.*). Si maintenant on multiplie les équations (3.) par 1, $\alpha^{-\nu}$, $\alpha^{-2\nu}$, ..., $\alpha^{-(\mu-1)\nu}$ et qu'on les ajoute, on aura

$$(5.) \quad \left\{ \begin{aligned}
\mu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} = \quad & s^{\frac{1}{\mu}}(\alpha_0 + \alpha_1\alpha^{-\nu} + \alpha_2\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)\nu}) \\
+ \; & p_2' s^{\frac{2}{\mu}}(\alpha_0^2 + \alpha_1^2\alpha^{-\nu} + \alpha_2^2\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^2\alpha^{-(\mu-1)\nu}) \\
+ \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \; & p_\nu' s^{\frac{\nu}{\mu}}(\alpha_0^\nu + \alpha_1^\nu\alpha^{-\nu} + \alpha_2^\nu\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^\nu\alpha^{-(\mu-1)\nu}) \\
+ \; & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \; & p_{\mu-1}' s^{\frac{\mu-1}{\mu}}(\alpha_0^{\mu-1} + \alpha_1^{\mu-1}\alpha^{-\nu} + \alpha_2^{\mu-1}\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1}\alpha^{-(\mu-1)\nu}).
\end{aligned} \right.$$

Les équations (4.) donnent

$$\alpha_0^\nu + \alpha_1^\nu\alpha^{-\nu} + \alpha_2^\nu\alpha^{-2\nu} + \cdots + \alpha_{\mu-1}^\nu\alpha^{-(\mu-1)\nu} = \mu,$$

d'où il suit que dans le second membre de l'équation (5.) chacun des coefficients des différentes puissances de $s^{\frac{1}{\mu}}$, à l'exception de celui de $s^{\frac{\nu}{\mu}}$, est égal à zéro (prop. *b.*), et l'on aura $\mu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} = \mu p_\nu' s^{\frac{\nu}{\mu}}$, donc $p_\nu = p_\nu'$.

2. Dénotons les μ racines de l'équation proposée par $x_0, x_1, \ldots, x_{\mu-1}$, dont les valeurs soient

$$\begin{aligned}
x_0 &= p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\
x_1 &= p_0 + \alpha s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha^{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\
x_2 &= p_0 + \alpha^2 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^4 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha^{2(\mu-1)} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{\mu-1} &= p_0 + \alpha^{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{\mu-2} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \alpha s^{\frac{\mu-1}{\mu}}.
\end{aligned}$$

On voit qu'à l'exception du premier terme p_0, qui entre dans toutes les racines, chacun des autres termes n'entre que dans une seule des racines, de sorte que chaque terme détermine une racine, comme p. e. le terme $p_r \alpha^{rh} s^{\frac{r}{\mu}}$ détermine la racine x_h.

Si en donnant aux radicaux toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, on dénote une valeur quelconque de $s^{\frac{1}{\mu}}$ par $s'^{\frac{1}{\mu}}$, *Abel* a démontré qu'on a

$$s'^{\frac{1}{\mu}} = q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

3. Théorème I. Si par un changement des valeurs des radicaux deux racines ne changent pas de valeur, aucune des autres racines ne changera non plus de valeur.

En effet, soient x_k, x_i les deux racines qui ne changent pas de valeur, de sorte qu'on ait $x'_k = x_k$, $x'_i = x_i$, c. à. d.

$$\begin{aligned}
p'_0 + \alpha'^k s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2k} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots &= p_0 + \alpha^k s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{2k} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,\\
p'_0 + \alpha'^i s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2i} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots &= p_0 + \alpha^i s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{2i} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots.
\end{aligned}$$

En faisant $s'^{\frac{1}{\mu}} = q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}}$, les deux équations donneront

$$\begin{aligned}
p'_0 + \alpha'^k q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots &= p_0 + \alpha^k s^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^{\nu k} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots,\\
p'_0 + \alpha'^i q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots &= p_0 + \alpha^i s^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + p_\nu \alpha^{\nu i} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots,
\end{aligned}$$

donc

$$\alpha'^k q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} = p_\nu \alpha^{\nu k} s^{\frac{\nu}{\mu}}, \quad \alpha'^i q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} = p_\nu \alpha^{\nu i} s^{\frac{\nu}{\mu}},$$

d'où l'on tire $\alpha' = \alpha^\nu$ et $q_\nu = p_\nu$.

Prenons maintenant une racine quelconque x_m qui prendra la valeur

$$x'_m = p'_0 + \alpha'^m s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2m} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots.$$

Le terme $\alpha'^m s'^{\frac{1}{\mu}}$ de la racine x'_m prendra, à cause des valeurs obtenues pour $s'^{\frac{1}{\mu}}$, α' et q_ν, la valeur $p_\nu \alpha^{\nu m} s^{\frac{\nu}{\mu}}$, qui détermine la racine x_m; donc $x'_m = x_m$.

4. Théorème II. Si une seule des racines, savoir x_k, ne change pas de valeur, et que x_{k+1} prenne la valeur x_h, une racine quelconque x_m prendra la valeur $x_{(m-k)(h-k)+k}$.

En effet, d'après l'hypothèse on a

$$p'_0 + \alpha'^k s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2k} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0 + \alpha^k s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{2k} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

$$p' + \alpha'^{k+1} s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2(k+1)} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0 + \alpha^h s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{2h} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots,$$

d'où, en posant $s'^{\frac{1}{\mu}} = q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}}$, on tire $\alpha' = \alpha^{\nu(h-k)}$, $q_\nu = p_\nu \alpha^{\nu k(1-h+k)}$.

Une racine quelconque x_m prendra la valeur

$$x'_m = p'_0 + \alpha'^m s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2m} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots;$$

en se servant des valeurs obtenues pour $s'^{\frac{1}{\mu}}$, α' et q_ν, on trouvera

$$\alpha'^m s'^{\frac{1}{\mu}} = p_\nu \alpha^{\nu[(m-k)(h-k)+k]} s^{\frac{\nu}{\mu}},$$

et comme le terme $p_\nu \alpha^{\nu[(m-k)(h-k)+k]} s^{\frac{\nu}{\mu}}$ de la racine x'_m détermine la racine $x_{(m-k)(h-k)+k}$, on aura $x'_m = x_{(m-k)(h-k)+k}$.

5. Théorème III. Si toutes les racines changent de valeur et que x_k prenne la valeur x_h, une autre racine quelconque x_m prendra la valeur $x_{(m+h-k)}$.

En effet, désignant par x_r la racine en laquelle se change x_m, de sorte que $x'_k = x_h$, $x'_m = x_r$, la racine x_r doit être telle que pour aucune valeur de l'indice t on n'ait $x'_t = x_t$, car d'après l'hypothèse toutes les racines changent de valeur. La valeur $s'^{\frac{1}{\mu}} = q_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}}$ substituée dans les équations $x'_k = x_h$, $x'_m = x_r$, c. à. d. dans les équations

$$p'_0 + \alpha'^k s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2k} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0 + \alpha^h s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{2h} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

$$p'_0 + \alpha'^m s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2m} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots = p_0 + \alpha^r s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \alpha^{2r} s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

donne

$$\alpha' = \alpha^{\frac{h-r}{k-m}\cdot\nu}, \quad q_\nu = p_\nu \alpha^{\frac{rk-hm}{k-m}\cdot\nu}.$$

De là on conclut que la valeur

$$x'_t = p'_0 + \alpha'^t s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \alpha'^{2t} s'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

que prend la racine x_t, sera

$$x'_t = p'_0 + p_\nu \alpha^{\frac{rk-hm+ht-rt}{k-m}\cdot\nu} s^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots,$$

d'où il suit

$$x'_t = x_{\left(\frac{rk-hm+ht-rt}{k-m}\right)} = x_{\left(\frac{rk-hm+ht-rt}{k-m} - t + t\right)}.$$

Comme par hypothèse la racine x'_t est différente de $x_t = x_{\mu p+t}$, il faut qu'il soit impossible de satisfaire en nombres entiers, par rapport à t et p, à l'équation

$$(h-r+m-k)t + (m-k)\mu p + rk - hm = 0,$$

k, h, m et r désignant des nombres entiers positifs, moindres que μ. Et si l'on cherche les valeurs de r qui remplissent cette condition, on trouve les suivantes

$$r = m+h-k \pm \mu, \quad r = m+h-k,$$

donc $x'_m = x_r = x_{m+h-k}$.

6. Après avoir démontré les trois théorèmes précédents, on voit que l'expression

$$s = \frac{1}{\mu^\mu}(x_0 + \alpha^{-1}x_1 + \alpha^{-2}x_2 + \cdots + \alpha^{-(\mu-1)}x_{\mu-1})^\mu$$

n'admet pour toutes les valeurs dont les radicaux sont susceptibles, que $\mu-1$ valeurs. Ces valeurs sont, par conséquent, racines d'une équation du degré $\mu-1$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités qui entrent dans l'équation proposée. D'ailleurs on voit aisément que chacune des $\mu-1$ valeurs en question s'exprime rationnellement par une quelconque d'entre elles et que s est racine d'une équation abélienne, dont le degré est $\mu-1$ ou un diviseur de $\mu-1$.

II.

Des équations dont le degré est $\mu^i \cdot \mu_1^{i_1} \cdot \mu_2^{i_2} \ldots \mu_n^{i_n}$, les nombres $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ étant premiers et différents entre eux.

7. Soit $m = \mu \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \ldots \mu_n$ le degré de l'équation proposée $F(x) = 0$, $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, désignant des nombres premiers, différents entre eux, et soit

$$p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

la fonction algébrique qui satisfait à l'équation proposée.

En dénotant par $\varphi(s^{\frac{1}{\mu}})$ une valeur de cette expression algébrique, les valeurs $\varphi(s^{\frac{1}{\mu}})$, $\varphi(\alpha s^{\frac{1}{\mu}})$, $\varphi(\alpha^2 s^{\frac{1}{\mu}})$, ..., $\varphi(\alpha^{\mu-1} s^{\frac{1}{\mu}})$ seront μ racines distinctes de l'équation proposée, α étant une racine imaginaire de $\alpha^\mu - 1 = 0$.

Le radical $s^{\frac{1}{\mu}}$ qui n'est pas contenu sous un autre radical, sera dit un radical extérieur.

8. Dénotons par $f_0(x, s^{\frac{1}{\mu}}) = 0$ l'équation du premier degré $x - \varphi(s^{\frac{1}{\mu}}) = 0$, et formons l'équation irréductible $\Pi f_0(x, s^{\frac{1}{\mu}}) = 0$ du degré μ, que nous dénoterons par $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$, où $t^{\frac{1}{\mu_1}}$ désigne un radical extérieur. En donnant aux radicaux toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, l'équation $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ donnera au moins $p = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$ équations différentes, et parmi ces équations il y en aura p qui n'ont pas de racines communes et dont le produit donne l'équation $f(x) = 0$. Soient

$$(6.) \quad f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0, \quad f_1(x, t_1^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0, \quad f_1(x, t_2^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0, \quad \dots, \quad f_1(x, t_{p-1}^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0,$$

ces équations et

$$(7.) \quad f(x) = f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) f_1(x, t_1^{\frac{1}{\mu_1}}) f_1(x, t_2^{\frac{1}{\mu_1}}) \dots f_1(x, t_{p-1}^{\frac{1}{\mu_1}}).$$

Je dis qu'en donnant aux radicaux toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, on ne peut déduire de $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ aucune équation qui ne soit contenue dans le système (6.). Car si le contraire avait lieu, soit $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ une équation déduite de $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ et étrangère au système (6.). Parmi ces dernières équations il existera au moins une équation qui, sans être identique à l'équation $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$, a au moins une racine commune avec $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$. Supposons que ce soit l'équation $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ qui ait une racine commune avec $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$.

De l'équation (7.) on tire

$$f(x) = f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) f_1(x, t_1'^{\frac{1}{\mu_1}}) f_1(x, t_2'^{\frac{1}{\mu_1}}) \dots f_1(x, t_{p-1}'^{\frac{1}{\mu_1}}),$$

et comme les deux équations $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$, $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ ont une racine commune, admettons que les fonctions $f_0(x, \alpha^k s^{\frac{1}{\mu}})$, $f_0(x, \alpha'^h s'^{\frac{1}{\mu}})$ soient égales.

De plus il est évident que le radical $s'^{\frac{1}{\mu}}$, qui est un radical extérieur de $f_0(x, s'^{\frac{1}{\mu}})$, doit faire partie des radicaux qui entrent dans $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$, car dans le cas contraire $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$ étant divisible par $f_0(x, \alpha'^h s'^{\frac{1}{\mu}})$ serait aussi divisible par $\Pi f_0(x, \alpha'^h s'^{\frac{1}{\mu}})$ ou $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}})$, ce qui est contre l'hypothèse. Le radical $s'^{\frac{1}{\mu}}$ faisant donc partie des radicaux de $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$, on voit aisément que $s'^{\frac{1}{\mu}}$ doit être un radical extérieur de $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$, car autrement $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$ contiendrait des radicaux qui n'entrent pas dans $f_0(x, s'^{\frac{1}{\mu}})$, ce qui n'est pas possible.

Mais si $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$ contient le radical extérieur $s'^{\frac{1}{\mu}}$, le degré m de l'équation proposée $f(x) = 0$ contiendra deux fois le facteur μ, ce qui est contre l'hypothèse. On ne peut donc admettre que les équations $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$, $f_1(x, t'^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ aient une racine commune sans être identiques. D'où l'on tire la conclusion qu'on ne peut déduire de $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}}) = 0$ d'autres équations que les p équations (6.), et que, par conséquent, les coefficients de $f_1(x, t^{\frac{1}{\mu_1}})$ s'expriment rationnellement par une racine d'une équation irréductible du degré $p = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités donnés qui entrent dans l'équation proposée $f(x) = 0$.

9. Soit l'équation proposée du degré $\mu^i v$, où μ est un nombre premier qui ne divise pas v, et supposons qu'on puisse former successivement des équations irréductibles des degrés μ, μ^2, μ^3, ..., μ^h dont les premiers membres divisent le premier membre de l'équation proposée, mais qu'on ne puisse plus former aucune équation irréductible du degré μ^{h+1} qui ait la même propriété, alors on demontre comme au n°. précédent que les coefficients de l'équation irréductible du degré μ^h s'expriment rationnellement par une racine d'une équation irréductible du degré $\mu^{i-h} v$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée.

III.

Des équations dont le degré est μ^n, μ étant un nombre premier.

10. Dénotons par $f_n(x) = 0$ l'équation proposée du degré μ^n et par $f_0(x) = 0$ l'équation du premier degré $x - x_1 = 0$, x_1 désignant une racine de l'équation proposée.

Formons les équations irréductibles $\Pi f_0(x) = 0$, $\Pi_2 f_0(x) = 0$, $\Pi_3 f_0(x) = 0$, ..., $\Pi_{n-1} f_0(x) = 0$, où l'opération $\Pi\Pi_p f_0(x)$ est désignée par $\Pi_{p+1} f_0(x)$. Dénotons par $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$, ..., $f_{n-1}(x) = 0$ ces équations irréductibles, dont les degrés sont μ, μ^2, μ^3, ..., μ^{n-1}.

En décomposant la fonction $f_n(x)$ en μ^{n-1} facteurs irréductibles du degré μ, soit

$$f_n(x) = f_1(x) f_1'(x) f_1''(x) \dots f_1^{(\mu^{n-1}-1)}(x),$$

où le produit des μ premiers facteurs est $\Pi f_1(x)$ ou $f_2(x)$. En décomposant $f_n(x)$ en μ^{n-2} facteurs irréductibles du degré μ^2, soit

$$f_n(x) = f_2(x) f_2'(x) f_2''(x) \dots f_2^{(\mu^{n-2}-1)}(x),$$

où le produit des μ premiers facteurs est $\Pi f_2(x)$ ou $f_3(x)$; et en continuant la décomposition, soit

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) f_{n-1}'(x) f_{n-1}''(x) \dots f_{n-1}^{(\mu-1)}(x).$$

Lorsque nous voudrons mettre en vue un certain des radicaux extérieurs $\varpi^{\frac{1}{\mu}}$ de l'équation $f_p(x) = 0$, pour prendre par rapport à ce radical le produit $\Pi f_p(x)$, nous écrirons $f_p(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}})$ au lieu de $f_p(x)$.

Nous supposerons toujours que l'équation proposée $f_n(x) = 0$ ne puisse être décomposée en μ^p équations, chacune du degré μ^{n-p}, telles que leurs coefficients soient des fonctions rationnelles d'une même racine d'une équation du degré μ^p, et que les coefficients de cette dernière soient des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée.

11. Soit

$$\Pi f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}}) = f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}}) f_m(x, \alpha\varpi^{\frac{1}{\mu}}) f_m(x, \alpha^2\varpi^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_m(x, \alpha^{\mu-1}\varpi^{\frac{1}{\mu}})$$

et par conséquent

$$\Pi f_m(x, \varpi'^{\frac{1}{\mu}}) = f_m(x, \varpi'^{\frac{1}{\mu}}) f_m(x, \alpha\varpi'^{\frac{1}{\mu}}) f_m(x, \alpha^2\varpi'^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_m(x, \alpha^{\mu-1}\varpi'^{\frac{1}{\mu}}).$$

Considérons la fonction $\Pi f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}})$ qui ne contient pas $\varpi^{\frac{1}{\mu}}$, et dénotons-la par $f_{m+1}(x, \nu^{\frac{1}{\mu}})$, $\nu^{\frac{1}{\mu}}$ désignant un radical extérieur; la fonction $\Pi f_m(x, \varpi'^{\frac{1}{\mu}})$ ne sera autre chose que $f_{m+1}(x, \nu'^{\frac{1}{\mu}})$, où $\nu'^{\frac{1}{\mu}}$ sera un radical extérieur.

Soit $f_m(x, \varpi'^{\frac{1}{\mu}}) = 0$ une équation déduite de $f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}}) = 0$, et telle que $\Pi_k f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}})$ soit divisible par $f_m(x, \varpi'^{\frac{1}{\mu}})$ sans que $\Pi_k f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}})$ soit divisible par $\Pi f_m(\varpi'^{\frac{1}{\mu}})$. Dans ce cas $\varpi'^{\frac{1}{\mu}}$ fait partie des radicaux extérieurs de $\Pi_k f_m(x, \varpi^{\frac{1}{\mu}})$.

12. Dénotons par $\varphi(\sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ la racine x_1 de l'équation proposée $f_n(x)=0$, $\sigma_1^{\frac{1}{\mu}}$ étant un radical extérieur, et par $f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=0$ l'équation $x-\varphi(\sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=0$.

Formons l'équation $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=0$ du degré μ, et supposons que $f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ sans qu'on ait $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, je dis que les équations $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=0$, $\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})=0$ n'auront qu'une seule racine commune, qui est $\varphi(\sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$, égale à $\varphi(\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$.

En effet, $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ étant divisible par $f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ sans être divisible par $\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, la fonction $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ contiendra le radical extérieur $\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}$, et on pourra, par conséquent, la dénoter par $f_1(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$. Et comme elle est divisible par $f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, il s'ensuit que les fonctions $f_1(x, \alpha\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, $f_1(x, \alpha^2\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, ..., $f_1(x, \alpha^{\mu-1}\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ seront respectivement divisibles par $f_0(x, \alpha\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, $f_0(x, \alpha^2\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, ..., $f_0(x, \alpha^{\mu-1}\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$. Mais comme les fonctions $f_1(x, \alpha\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, $f_1(x, \alpha^2\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, ..., $f_1(x, \alpha^{\mu-1}\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ n'ont pas de facteurs communs avec $f_1(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, ou $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$, il s'ensuivra que cette dernière fonction ne pourra non plus avoir de facteurs communs avec les fonctions $f_0(x, \alpha\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, $f_0(x, \alpha^2\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, ..., $f_0(x, \alpha^{\mu-1}\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$. Et comme, en outre, on a

$$\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}) = f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})f_0(x, \alpha\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})f_0(x, \alpha^2\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})\dots f_0(x, \alpha^{\mu-1}\sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}),$$

on en conclut que $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ ne peut avoir avec $\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ d'autres facteurs communs que $f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ qui, d'après l'hypothèse, est égal à $f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$; et les deux équations $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})=0$, $\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})=0$, si elles ont des racines communes, ne peuvent en avoir qu'une seule.

13. Puisqu'on a

$$\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n),$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$ étant μ des μ^n racines de l'équation proposée $f_n(x)=0$,

il s'ensuit que le nombre des valeurs qu'admet la fonction $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ ou $f_1(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, lorsqu'on donne aux radicaux toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, ne peut surpasser le nombre des valeurs différentes que donne le produit formé en combinant μ à μ les μ^n valeurs $(x-a_1)$, $(x-a_2)$, $(x-a_3)$, ..., $(x-a_{\mu^n})$ sous la condition que deux produits quelconques n'aient pas deux facteurs égaux. Et comme le nombre des produits ainsi formés est $\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$, il s'ensuit que $f_1(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ ne peut admettre plus de $\mu^{n-1}\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ valeurs.

14. Supposons qu'on ait formé les équations irréductibles

$$f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0, \quad \Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0, \quad \Pi_2 f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0, \quad \ldots,$$
$$\Pi_m f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0,$$

et que $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$, qui est divisible par $\Pi_m f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$, le soit en même temps par $\Pi_m f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, que nous dénoterons par $f_m(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$, sans que $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ soit divisible par $\Pi f_m(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$. Dans ce cas $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ contiendra le radical extérieur $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, et nous le dénoterons, par conséquent, par $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$. Si maintenant $f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$, je dis qu'on doit avoir

$$\Pi f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) = \Pi f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}).$$

En effet, soit

$$f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = x^{\mu^{m+a}} + A_1 x^{\mu^{m+a}-1} + \cdots + A_p x^{\mu^{m+a}-p} + \cdots = 0,$$

donc

$$f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) = x^{\mu^{m+a}} + A_1' x^{\mu^{m+a}-1} + \cdots + A_p' x^{\mu^{m+a}-p} + \cdots = 0.$$

Si dans $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ on remplace l'inconnue x par une indéterminée c, on pourra regarder l'expression algébrique $f_{m+a}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ comme racine d'une équation irréductible dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée $f_n(x) = 0$. Or-

donnons cette expression suivant les puissances entières du radical extérieur $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ de sorte qu'on ait

$$f_{m+\alpha}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = k_0 + k_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + k_2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + k_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

et par conséquent

$$f_{m+\alpha}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) = k_0' + k_1'\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}} + k_2'\varpi_1'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + k_{\mu-1}'\varpi_1'^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Comme nous avons $f_{m+\alpha}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+\alpha}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}})$, d'après l'hypothèse, on aura

$$(8.)\quad k_0 + k_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + k_2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + k_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}} = k_0' + k_1'\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}} + k_2'\varpi_1'^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + k_{\mu-1}'\varpi_1'^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Nous démontrerons en premier lieu que $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ ne fait pas partie des radicaux qui entrent dans $k_0', k_1', k_2', \ldots, k_{\mu-1}'$. Pour le prouver, soit

$$\varpi_1 = f(r_1^{\frac{1}{\mu_1}}, r_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots),$$

donc

$$\varpi_1' = f(\beta r_1'^{\frac{1}{\mu_1}}, \gamma r_2'^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots),$$

où $r_1^{\frac{1}{\mu_1}}, r_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots$ désignent tous les radicaux qui entrent dans ϖ_1, f une fonction rationnelle de ces radicaux et $\beta, \gamma, \ldots$ des racines de $\beta^{\mu_1}-1=0$, $\gamma^{\mu_2}-1=0, \ldots$.

Comme on peut donner à $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ sans changer les valeurs des radicaux qui entrent dans ϖ_1, il sera démontré qu'en changeant de cette manière la valeur de $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, la valeur de ϖ_1' ne sera pas changée. Car lorsqu'on ne change pas les valeurs $r_1^{\frac{1}{\mu_1}}, r_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots$, qui entrent dans ϖ_1, la fonction ϖ_1' ne pourra changer de valeur lorsque $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, que lorsque quelques-unes des racines $\beta, \gamma, \ldots$, qui n'entrent pas dans ϖ_1, changent de valeur. Supposons que β change de valeur lorsque $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$. Dans ce cas le radical $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ doit faire partie des radicaux de la racine β. Mais si la racine β de l'équation $\beta^{\mu_1}-1=0$ change de valeur lorsque le radical $\varpi^{\frac{1}{\mu}}$, qui en fait partie, prend la valeur

$\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, le nombre μ doit être un diviseur de μ_1-1; donc $\mu_1=\mu c+1$. Ainsi β sera racine de l'équation $\beta^{\mu c+1}-1=0$, et nous aurons

$$\varpi_1 = f(r_1^{\frac{1}{\mu c+1}}, r_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots),$$
$$\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} = [f(r_1^{\frac{1}{\mu c+1}}, r_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots)]^{\frac{1}{\mu}},$$

d'où il suivrait que la racine β, qui d'après l'hypothèse, contient le radical $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, contiendrait aussi le radical $r_1^{\frac{1}{\mu c+1}}$, ce qui n'est pas possible, puisque les indices des radicaux qui entrent dans la racine de l'équation $\beta^{\mu c+1}-1=0$ sont moindres que $\mu c+1$. On ne peut donc admettre que ϖ_1' change de valeur lorsque, sans changer les valeurs des radicaux de ϖ_1, le radical $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$.

Après avoir démontré cela, examinons si les coefficients h_0', h_1', h_2', ..., $h_{\mu-1}'$ contiennent le radical $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$. Si cela était possible, alors, en donnant à $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, sans changer les valeurs des radicaux contenus dans ϖ_1, les coefficients h_0', h_1', h_2', ..., $h_{\mu-1}'$ se transformeraient en h_0'', h_1'', h_2'', ..., $h_{\mu-1}''$, mais le radical $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ ne pourra en même temps changer de valeur; car si $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ changeait de valeur, il ne pourrait prendre que la valeur $\alpha'\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$, puisque nous venons de voir que ϖ_1' ne change pas de valeur. Ainsi si $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha'\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ lorsque $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ prendra la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ lorsque $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha'\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$, et les coefficients h_0', h_1', h_2', ..., $h_{\mu-1}'$ se transformeraient en même temps en h_0'', h_1'', h_2'', ..., $h_{\mu-1}''$, ce qui n'est pas possible, car lorsque le radical $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha'\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$, les coefficients h_0', h_1', h_2', ..., $h_{\mu-1}'$ ne changent ni de forme ni de valeur, vu que $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ est un radical extérieur. Donc, si l'on admet que les coefficients h_0', h_1', h_2', ..., $h_{\mu-1}'$ contiennent le radical $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, l'équation (8.) ayant lieu, on aura, en donnant à $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ successivement les valeurs $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, $\alpha^2\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, ..., $\alpha^{\mu-1}\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, les équations suivantes:

$$
(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&h_0 + h_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + h_2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}\\
&= h_0' + h_1'\varpi_2^{\frac{1}{\mu}} + h_2'\varpi_2^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}'\varpi_2^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\
&h_0 + h_1\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + h_2\alpha^2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}\alpha^{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}\\
&= h_0'' + h_1''\varpi_2^{\frac{1}{\mu}} + h_2''\varpi_2^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}''\varpi_2^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\
&h_0 + h_1\alpha^2\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + h_2\alpha^4\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}\alpha^{2(\mu-1)}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}\\
&= h_0''' + h_1'''\varpi_2^{\frac{1}{\mu}} + h_2'''\varpi_2^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}'''\varpi_2^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&h_0 + h_1\alpha^{\mu-1}\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + h_2\alpha^{\mu-2}\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}\alpha\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}\\
&= h_0^{(\mu)} + h_1^{(\mu)}\varpi_2^{\frac{1}{\mu}} + h_2^{(\mu)}\varpi_2^{\frac{2}{\mu}} + \dots + h_{\mu-1}^{(\mu)}\varpi_2^{\frac{\mu-1}{\mu}}.
\end{aligned}\right.
$$

En ajoutant ces équations après les avoir respectivement multipliées par $1, \alpha^{-m}, \alpha^{-2m}, \dots \alpha^{-(\mu-1)m}$, nous aurons

$$(10)\quad \mu h_m\varpi_1^{\frac{m}{\mu}} = \varphi_0(m) + \varphi_1(m)\varpi_2^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(m)\varpi_2^{\frac{2}{\mu}} + \dots + \varphi_r(m)\varpi_2^{\frac{r}{\mu}} + \dots + \varphi_{\mu-1}(m)\varpi_2^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

où

$$(11)\quad \varphi_r(m) = h_r' + h_r''\alpha^{-m} + h_r'''\alpha^{-2m} + \dots + h_r^{(\mu)}\alpha^{-(\mu-1)m},$$

et comme $\varpi_2^{\frac{1}{\mu}}$ ne change pas de valeur lorsque $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, et que réciproquement $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ ne change pas de valeur lorsque $\varpi_2^{\frac{1}{\mu}}$ prend la valeur $\alpha^r\varpi_2^{\frac{1}{\mu}}$, nous aurons aussi

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}\mu h_m\varpi_1^{\frac{m}{\mu}} &= \varphi_0(m) + \varphi_1(m)\alpha\varpi_2^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(m)\alpha^2\varpi_2^{\frac{2}{\mu}} + \dots\\ &\dots + \varphi_r(m)\alpha^r\varpi_2^{\frac{r}{\mu}} + \dots + \varphi_{\mu-1}(m)\alpha^{\mu-1}\varpi_2^{\frac{\mu-1}{\mu}},\end{aligned}\right.$$

d'où il résulte que les seconds membres des équations (10), (12) sont égaux, ce qui ne peut être que lorsque chacun des coefficients $\varphi_1(m)$, $\varphi_2(m)$, ... $\varphi_r(m)$, ... $\varphi_{\mu-1}(m)$ est égal à zéro. Donnant par conséquent à m les valeurs $1, 2, 3, \dots, \mu-1$, l'équation (11) donnera les équations

$$
\begin{aligned}
h_r' + h_r''\alpha^{-1} + h_r'''\alpha^{-2} + \dots + h_r^{(\mu)}\alpha^{-(\mu-1)} &= 0,\\
h_r' + h_r''\alpha^{-2} + h_r'''\alpha^{-2\cdot 2} + \dots + h_r^{(\mu)}\alpha^{-2(\mu-1)} &= 0,\\
h_r' + h_r''\alpha^{-3} + h_r'''\alpha^{-3\cdot 2} + \dots + h_r^{(\mu)}\alpha^{-3(\mu-1)} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
h_r' + h_r''\alpha^{-(\mu-1)} + h_r'''\alpha^{-(\mu-1)2} + \dots + h_r^{(\mu)}\alpha^{-(\mu-1)(\mu-1)} &= 0.
\end{aligned}
$$

d'où il suit que $\alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \alpha^{-3}, \ldots, \alpha^{-(\mu-1)}$ sont racines de l'équation

$$h'_r + h''_r y + h'''_r y^2 + \cdots + h_r^{(\mu)} y^{\mu-1} = 0,$$

et l'on aura $h'_r = h''_r = h'''_r = \cdots = h_r^{(\mu)}$.

Si donc on voulait admettre que les coefficients $h'_0, h'_1, h'_2, \ldots, h'_{\mu-1}$ contiennent $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, ils ne changeraient pas de valeur lorsqu'on donne à $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ la valeur $\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ sans changer les valeurs des radicaux de ϖ_1, et les deux premières des équations (9.) donneraient

$$h_0 + h_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + h^2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + h_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}} = h_0 + h_1\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + h_2\alpha^2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + h_{\mu-1}\alpha^{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

ce qui n'a pas lieu. Ainsi on ne peut admettre que les coefficients $h'_0, h'_1, h'_2, \ldots, h'_{\mu-1}$ contiennent $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$.

Cela étant, et tirant de l'équation (8.) la conclusion que $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ s'exprime rationnellement par $h_0, h_1, \ldots, h_{\mu-1}, h'_0, h'_1, \ldots, h'_{\mu-1}, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ et ϖ'_1, nous aurons

$$(13.)\quad \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}} = B_0 + B_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + B_2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + B_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \varpi'_1 = (B_0 + B_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + B_2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + B_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}})^\mu \\ \quad = q_0 + q_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + q_2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + q_\nu\varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + q_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \end{cases}$$

d'où l'on tire $\varpi'_1 - q_0 = 0,\ q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ \ldots,\ q_\nu = 0,\ \ldots,\ q_{\mu-1} = 0$. Car dans le cas contraire $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ s'exprimerait rationnellement par $\varpi'_1, \varpi_1, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{\mu-1}$, et il suivrait que $f_m(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ du degré μ^m par rapport à l'indéterminée c ne contienne pas le radical $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ tandis que $f_{m+a}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}})$ du degré μ^{m+a}, qui est divisible par $f_m(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ le contient, ce qui n'est pas possible.

De (14.) on aura par conséquent

$$\varpi'_1 = (B_0 + B_1\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + B_2\alpha^2\varpi_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + B_\nu\alpha^\nu\varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + B_{\mu-1}\alpha^{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}})^\mu,$$

et par suite

$$(B_0 + B_1\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + B_\nu\varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + B_{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}})\alpha^\nu = B_0 + B_1\alpha\varpi_1^{\frac{1}{\mu}} + \cdots$$
$$\cdots + B_\nu\alpha^\nu\varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}} + \cdots + B_{\mu-1}\alpha^{\mu-1}\varpi_1^{\frac{\mu-1}{\mu}};$$

donc

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 0, \quad \ldots, \quad B_{\nu-1} = 0, \quad B_{\nu+1} = 0, \quad \ldots, \quad B_{\mu-1} = 0,$$

et l'équation (13.) donnera

$$\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}} = B_\nu \varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Cette valeur de $\varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}$ introduite dans la relation

$$f_{m+a}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$$

entraîne

$$f_{m+a}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(c, B_\nu \varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}}) = f_{m+a}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}),$$

et cette relation ayant lieu, on aura aussi, en mettant $\alpha^k \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ au lieu de $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$, quel que soit k, la relation suivante

$$f_{m+a}(c, \alpha^k \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(c, B_\nu \alpha^{k\nu} \varpi_1^{\frac{\nu}{\mu}}) = f_{m+a}(c, \alpha^{k\nu} \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}),$$

d'où l'on tire

$$f_{m+a}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{m+a}(c, \alpha \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{m+a}(c, \alpha^2 \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) \ldots f_{m+a}(c, \alpha^{\mu-1} \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$$

$$= f_{m+a}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) f_{m+a}(c, \alpha^\nu \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) f_{m+a}(c, \alpha^{2\nu} \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}) \ldots f_{m+a}(c, \alpha^{(\mu-1)\nu} \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}),$$

ou

$$\Pi f_{m+a}(c, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = \Pi f_{m+a}(c, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}),$$

donc aussi, en remplaçant l'indéterminée c par l'inconnue x,

$$\Pi f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = \Pi f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}).$$

15. On conçoit et l'on démontre facilement que lorsque la relation

$$f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}})$$

entraîne

$$\Pi f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = \Pi f_{m+a}(x, \varpi_n'^{\frac{1}{\mu}}),$$

la relation

$$f_{m+a}(x, \varpi_n^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(x, \varpi_n'^{\frac{1}{\mu}}),$$

$f_{m+a}(x, \varpi_n^{\frac{1}{\mu}})$ étant une valeur quelconque de $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$, entraînera

$$\Pi f_{m+a}(x, \varpi_n^{\frac{1}{\mu}}) = \Pi f_{m+a}(x, \varpi_n'^{\frac{1}{\mu}}).$$

De là on tire la conclusion que si le nombre des valeurs qu'admet $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ est p, le nombre des valeurs qu'admet $\Pi f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ sera μ fois moindre ou ne pourra surpasser $\frac{p}{\mu}$, bien entendu que les conditions attachées à $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ du n°. 14. soient remplies.

16. Soit maintenant $f_n(x) = 0$ l'équation proposée du degré μ^n, dont une racine soit

$$x_1 = p_0 + \sigma_1^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \sigma_1^{\frac{2}{\mu}} + \cdots + p_{\mu-1} \sigma_1^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

et dénotons par $f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0$ l'équation $x - x_1 = 0$ du premier degré. Les fonctions

$$(15.) \quad \begin{cases} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}), \quad \Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}), \quad \Pi_2 f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \\ \Pi_m f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \quad \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \quad \Pi_{\mu^n-1} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) \end{cases}$$

diviseront $f_n(x)$, et si l'on dénote par $f_n(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ une valeur quelconque de $f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$, les fonctions

$$(16.) \quad \begin{cases} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \Pi_2 f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \\ \Pi_m(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \quad \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \quad \Pi_{\mu^n-1} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}) \end{cases}$$

diviseront aussi $f_n(x)$.

Si parmi les fonctions (15.) on prend une fonction quelconque $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ du degré μ^{m+a}, il existera parmi toutes les valeurs qu'admet cette fonction, μ^{n-m-a} valeurs qui n'ont pas de facteurs communs, et dont le produit donne la fonction $f_n(x)$, de sorte que

$$(17.) \quad f_n(x) = \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_2^{\frac{1}{\mu}}) \ldots \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_{\mu^{n-m-a}}^{\frac{1}{\mu}}).$$

Il est évident que parmi les valeurs que représente $f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, il en existe une, telle qu'en formant les fonctions (16.), la fonction $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ ne soit égale à aucun des facteurs qui figurent dans (17.), car dans le cas contraire $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ n'admettrait que μ^{n-m-a} valeurs, cas dont nous faisons abstraction.

17. Cela étant, soit

$$f_n(x) = \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}) \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_2'^{\frac{1}{\mu}}) \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_3'^{\frac{1}{\mu}}) \ldots \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_{\mu^{n-m-a}}'^{\frac{1}{\mu}}),$$

et comme la racine de l'équation $f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}) = 0$, qui satisfait à l'équation $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}) = 0$, doit aussi satisfaire à une des équations

$$\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0, \quad \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_2^{\frac{1}{\mu}}) = 0, \quad \ldots, \quad \Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_{\mu^n - m - a}^{\frac{1}{\mu}}) = 0,$$

supposons qu'elle satisfasse à l'équation $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0$, ou que $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ soit divisible par $f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$. De plus comme $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ peut être divisible par un certain nombre des fonctions $\Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, $\Pi_2 f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, etc. sans cependant être divisible par $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$, admettons que $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ soit divisible par

$$f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \Pi f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \Pi_2 f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}}), \quad \ldots, \quad \Pi_m f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$$

sans être divisible par $\Pi_{m+1} f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$.

En dénotant $\Pi_m f_0(x, \sigma_1'^{\frac{1}{\mu}})$ par $f_m(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$, la fonction $\Pi_{m+a} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ contiendra le radical extérieur $\varpi_1^{\frac{1}{\mu}}$ et pourra être dénotée par $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$. Par conséquent, toutes les fois qu'on a

$$f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}),$$

on aura aussi

$$\Pi f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}}) = \Pi f_{m+a}(x, \varpi_1'^{\frac{1}{\mu}}),$$

et il s'ensuivra que si $f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ n'admet que p valeurs, $\Pi f_{m+a}(x, \varpi_1^{\frac{1}{\mu}})$ ne peut admettre plus de $\frac{p}{\mu}$ valeurs. On tire de là la conclusion que $\Pi f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ du degré μ n'admettant que $\mu^{n-1} \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$ valeurs, la fonction $\Pi_{\mu^n - 1} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$ du degré μ^{n-1} n'admettra plus de $\mu \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$ valeurs, et les coefficients de l'équation $\Pi_{\mu^n - 1} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0$ s'exprimeront rationnellement par une racine r_1 d'une équation $F(r) = 0$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données de l'équation proposée $f_n(x) = 0$, et le degré de l'équation $F(r) = 0$ ne surpassera pas $\mu \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}$.

18. Il ne reste maintenant pour déterminer les coefficients de l'équation $\Pi_{\mu^n - 1} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = 0$ qu'à résoudre l'équation $F(r) = 0$. A cet

effet, ayant

$$\Pi_{\mu^n-1} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{\mu^n-1}) = 0,$$

on démontre aisément que les racines de l'équation $F(r) = 0$ sont les valeurs différentes de l'expression

$$\Pi_{\mu^n-1} f_0(c, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}}) = (c-x_1)(c-x_2)\dots(c-x_{\mu^n-1}),$$

c étant une indéterminée.

19. Considérons la décomposition

$$f_n(x) = f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_{n-1}(x, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}})$$

où $f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ désigne la fonction $\Pi_{n-1} f_0(x, \sigma_1^{\frac{1}{\mu}})$; et comme d'après l'hypothèse $f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ a plus de μ valeurs, supposons qu'on ait en donnant aux radicaux toutes leurs valeurs, les i décompositions

$$(18.)\quad \begin{cases} f_n(x) = f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha\,\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_{n-1}(x, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}}), \\ f_n(x) = f_{n-1}(x, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha\,\eta_2^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha^2\eta_2^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_{n-1}(x, \alpha^{\mu-1}\eta_2^{\frac{1}{\mu}}), \\ f_n(x) = f_{n-1}(x, \eta_3^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha\,\eta_3^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha^2\eta_3^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_{n-1}(x, \alpha^{\mu-1}\eta_3^{\frac{1}{\mu}}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) = f_{n-1}(x, \eta_i^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha\,\eta_i^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(x, \alpha^2\eta_i^{\frac{1}{\mu}}) \dots f_{n-1}(x, \alpha^{\mu-1}\eta_i^{\frac{1}{\mu}}). \end{cases}$$

D'après ce qui a été démontré, il s'ensuit que les facteurs qui figurent dans une quelconque des décompositions sont distincts des facteurs d'une quelconque des autres décompositions. D'où l'on tire la conclusion que le nombre des valeurs de $f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ est un multiple de μ. De sorte que si le nombre des valeurs est μi, i ne peut surpasser $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$. D'où il suit que le degré de l'équation $F(r)$ est μi, et que les racines de cette équation, qui sont les différentes valeurs de $f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$, seront

$$(19.)\quad \begin{cases} f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}), & \dots, & f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}}), \\ f_{n-1}(c, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha\eta_2^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_2^{\frac{1}{\mu}}), & \dots, & f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_2^{\frac{1}{\mu}}), \\ f_{n-1}(c, \eta_3^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha\eta_3^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_3^{\frac{1}{\mu}}), & \dots, & f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_3^{\frac{1}{\mu}}), \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(c, \eta_i^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha\eta_i^{\frac{1}{\mu}}), & f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_i^{\frac{1}{\mu}}), & \dots, & f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_i^{\frac{1}{\mu}}). \end{cases}$$

Ces racines ont la propriété que lorsque une racine d'une ligne horizontale quelconque se transforme dans une racine de la même ligne horizontale, toutes les racines de la ligne horizontale ne peuvent que se transformer les unes dans les autres; et lorsque une racine d'une ligne horizontale se transforme dans une racine d'une autre ligne horizontale, toutes les racines de la première ligne en question se transforment dans les racines de la seconde ligne en question (n°. 17.). De là il résulte que de l'équation irréductible du degré μ

$$(20.)\quad \begin{cases} \Pi(r-f_{n-1}(c,\eta_1^{\frac{1}{\mu}})) = (r-f_{n-1}(c,\eta_1^{\frac{1}{\mu}}))(r-f_{n-1}(c,\alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}))\dots(r-f_{n-1}(c,\alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}})) \\ \qquad = r^\mu+p_1r^{\mu-1}+p_2r^{\mu-2}+\dots+p_\mu = 0 \end{cases}$$

on ne peut former que i équations irréductibles, dont les racines sont respectivement les valeurs de chacune des lignes horizontales (19.). Par conséquent les coefficients p_1, p_2, ..., p_μ de l'équation (20.) s'expriment rationnellement par chacune des racines d'une équation irréductible du degré i dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données de l'équation proposée $f_n(x)=0$, et le degré i ne peut surpasser $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$.

IV.

20. En nous fondant sur la résolution que nous venons d'obtenir, nous pouvons trouver un résultat plus simple.

Nous avons supposé que $f_n(x)$ se décompose de i manières différentes et nous avons démontré que i ne peut surpasser $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$. Nous démontrerons maintenant que i est effectivement $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$.

Pour démontrer cela, nous démontrerons préalablement que si dans l'équation $\frac{f_n(x)}{x-x_1}=0$ on regarde x_1 comme donnée, l'équation $\frac{f_n(x)}{x-x_1}=0$ sera irréductible. Car autrement on aurait $\frac{f_n(x)}{x-x_1} = \varphi_1(x, x_1)\varphi_2(x, x_1)$, $\varphi_1(x, x_1)=0$ étant irréductible et du degré $p-1$, $\varphi_2(x, x_1)=0$ du degré μ^n-p: soient x_2, x_3, ..., x_p les racines de $\varphi_1(x, x_1)=0$ et x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_{μ^n} celles de $\varphi_2(x, x_1)=0$, $p-1$ et μ^n-p étant plus grands que l'unité.

En dénotant une racine quelconque de $\varphi_1(x, x_1)=0$ par x et de $\varphi_2(x, x_1)=0$ par y, et éliminant x_1, nous aurons $F(y, x)=0$, équation qui sera satisfaite en prenant pour x une racine quelconque de $\varphi_1(x, x_1)=0$ et pour y une racine quelconque de $\varphi_2(x, x_1)=0$. Soit par conséquent

$$(21.)\quad \begin{cases} F(y, x) = y^{\mu^n-p}+\psi_1(x)y^{\mu^n-p-1}+\dots+\psi_r(x)y^{\mu^n-p-r}+\dots = 0, \\ F(y, x) = x^{p-1}+\psi_1'(y)x^{p-2}+\dots+\psi_r'(y)x^{p-r}+\dots = 0. \end{cases}$$

Les racines de la première de ces équations en y étant les $\mu^n - p$ racines de $\varphi_2(x, x_1) = 0$ lorsque dans $\psi_1(x), \ldots, \psi_r(x), \ldots$ on prend pour x une racine quelconque de $\varphi_1(x, x_1) = 0$, il résulte $\psi_r(x_2) = \psi_r(x_3) = \cdots = \psi_r(x_p)$, d'où l'on conclut $\psi_r(x_2) = \theta(x_1)$, $\psi_r(x_3) = \theta(x_1)$, $\ldots$, $\psi_r(x_p) = \theta(x_p)$, c. à. d. $x_2, x_3, \ldots, x_p$ seront racines de $\psi_r(x) - \theta(x_1) = 0$, et l'on aura l'égalité $\psi_r(x) - \theta(x_1) = P\varphi_1(x, x_1)$ ou $\psi_r(x) = \theta(x_1) + P\varphi_1(x, x_1)$. Comme le second membre de cette égalité ne doit pas contenir x_1, il sera rationnel et symétrique par rapport à toutes les racines de $f_n(x) = 0$, d'où $\psi_r(x) = Qf_n(x)$; donc $F(y, x)$ serait par rapport à x au moins du degré μ^n, tandis qu'il n'est que du degré $p-1$. L'équation $\frac{f_n(x)}{x - x_1} = 0$ est donc irréductible.

Pour démontrer la proposition que nous avons en vue on remarquera maintenant que le facteur $(x - x_1)$ entre dans toutes les i décompositions (18.) et n'entre qu'une seule fois dans chacune de ces décompositions; de sorte que ce facteur entre dans une quelconque des fonctions

$$(22.)\qquad f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}),\quad f_{n-1}(x, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}),\quad f_{n-1}(x, \eta_3^{\frac{1}{\mu}}),\quad \ldots,\quad f_{n-1}(x, \eta_i^{\frac{1}{\mu}}).$$

Si dans la fonction $f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ on regarde x_1 comme donnée, la fonction $f_{n-1}(x, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ n'admettra que les i valeurs (22.), et toute fonction rationnelle et symétrique de ces valeurs sera une fonction rationnelle de x_1 et des quantités données qui entrent dans l'équation proposée $f_n(x) = 0$. Le produit de ces valeurs, que nous dénoterons par $F_1(x)$, le sera donc aussi.

Si l'on divise maintenant $F_1(x)$ par $(x - x_1)^i$ et qu'on dénote le quotient par $F_2(x)$, les coefficients de $F_2(x)$ seront aussi des fonctions rationnelles de x_1 et des quantités données qui entrent dans $f_n(x)$. Et comme $F_2(x) = 0$ contient au moins une racine qui satisfait à l'équation irréductible $\frac{f_n(x)}{x - x_1} = 0$, on aura

$$F_2(x) = \left(\frac{f_n(x)}{x - x_1}\right)^m.$$

Le degré de $F_2(x)$ étant égal à $i(\mu^{n-1} - 1)$ et celui de $\frac{f_n(x)}{x - x_1}$ à $\mu^n - 1$, on aura

$$i(\mu^{n-1} - 1) = m(\mu^n - 1),$$

donc

$$i = \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n-1} - 1}m = \mu m + \frac{m}{\left(\frac{\mu^{n-1} - 1}{\mu - 1}\right)}.$$

Comme d'ailleurs i et m sont des nombres entiers, on doit avoir

$$m = \frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}A,$$

où A désigne un nombre entier; donc $i = \frac{\mu^n-1}{\mu-1}A$. Mais d'après le dernier n°. i ne peut surpasser $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$, donc $A=1$, et par conséquent

$$i = \frac{\mu^n-1}{\mu-1} \text{ et } m = \frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}.$$

Il suit de là que les coefficients de l'équation irréductible (20.)

$$r^\mu + p_1 r^{\mu-1} + p_2 r^{\mu-2} + \dots = 0$$

dont $f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ est racine, sont des fonctions rationnelles d'une racine y d'une équation irréductible dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation $f_n(x)=0$, et le degré de l'équation en y est $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$.

21. Si pour un moment on ne donne qu'une seule valeur aux coefficients de l'équation (20.), la fonction cyclique

$$f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^{-1} f_{n-1}(c, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^{-2} f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \dots + \alpha^{-(\mu-1)} f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}})$$

des racines de l'équation n'admettra que les $\mu-1$ valeurs

$$(23.)\quad \begin{cases} \Big(f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^{-1} f_{n-1}(c, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^{-2} f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \dots \\ \qquad \dots + \alpha^{-(\mu-1)} f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}})\Big)^\mu = s_1, \\ \Big(f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^{-2} f_{n-1}(c, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^{-4} f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \dots \\ \qquad \dots + \alpha^{-2(\mu-1)} f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}})\Big)^\mu = s_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Big(f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha f_{n-1}(c, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \alpha^2 f_{n-1}(c, \alpha^2\eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + \dots \\ \qquad \dots + \alpha^{\mu-1} f_{n-1}(c, \alpha^{\mu-1}\eta_1^{\frac{1}{\mu}})\Big)^\mu = s_{\mu-1}, \end{cases}$$

valeurs que nous pouvons regarder comme connues.

Les équations (23.) résolues par rapport aux fonctions $f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$, $f_{n-1}(c, \alpha\eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ etc. donnent pour la première de ces fonctions la valeur

$$f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) = \frac{1}{\mu}(-p_1 + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \dots + s_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}})$$

où les quantités connues $s_1, s_2, \dots, s_{\mu-1}$ sont les $\mu-1$ racines d'une équa-

tion du degré $\mu-1$, et les coefficients de cette dernière des fonctions rationnelles de y, racine d'une équation du degré $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans $f_n(x)$.

Si maintenant on donne à la racine y toutes les $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ valeurs dont elle est susceptible, on tirera de la dernière équation les $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ équations suivantes

$$
\begin{aligned}
f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) &= \frac{1}{\mu}(-p_1 + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}}),\\
f_{n-1}(c, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}) &= \frac{1}{\mu}(-p_1' + s_\mu^{\frac{1}{\mu}} + s_{\mu+1}^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{2\mu-2}^{\frac{1}{\mu}}),\\
f_{n-1}(c, \eta_3^{\frac{1}{\mu}}) &= \frac{1}{\mu}(-p_1'' + s_{2\mu-1}^{\frac{1}{\mu}} + s_{2\mu}^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{3\mu-3}^{\frac{1}{\mu}}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{n-1}(c, \eta_i^{\frac{1}{\mu}}) &= \frac{1}{\mu}(-p_1^{(i-1)} + s_{\mu^n-\mu+1}^{\frac{1}{\mu}} + s_{\mu^n-\mu+2}^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}}).
\end{aligned}
$$

Dans ce système d'équations i est écrit au lieu de $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$; $p_1, p_1', p_1'', \ldots, p_1^{(i-1)}$ sont les $i = \frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ valeurs de p_1, et $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu-1}, s_\mu, s_{\mu+1}, \ldots, s_{\mu^n-1}$ sont les μ^n-1 racines d'une équation du degré μ^n-1 dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans $f_n(x)$.

En ajoutant toutes les valeurs de $f_{n-1}(c, \eta^{\frac{1}{\mu}})$, nous aurons

$$
\begin{aligned}
&f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) + f_{n-1}(c, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}) + \cdots + f_{n-1}(c, \eta_{\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}^{\frac{1}{\mu}})\\
&= \frac{1}{\mu}(q + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}}),
\end{aligned}
$$

où $q = -(p_1 + p_1' + p_1'' + \cdots + p_1^{(i-1)})$ est une fonction rationnelle des quantités données qui entrent dans $f_n(x)$.

22. Au lieu de la fonction

$$(c-x_1)(c-x_2)\ldots(c-x_{\mu^n-1}),$$

que nous avons désignée par $f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$, considérons la fonction

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{\mu^n-1},$$

et désignons-la par $\varphi_{n-1}(\eta_1^{\frac{1}{\mu}})$.

Appliquant à la fonction $\varphi_{n-1}(\eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ le raisonnement que nous venons d'appliquer à la fonction $f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}})$ et remplaçant, par conséquent, dans

(23.) les valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu^n-1}$, qui dépendent des différentes valeurs de $f_{n-1}(c, \eta^{\frac{1}{\mu}})$, par les valeurs correspondantes $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu^n-1}$, qui dépendent des différentes valeurs de $\varphi_{n-1}(\eta^{\frac{1}{\mu}})$, nous aurons

$$(24.)\quad \begin{cases} \varphi_{n-1}(\eta_1^{\frac{1}{\mu}})+\varphi_{n-1}(\eta_2^{\frac{1}{\mu}})+\cdots+\varphi_{n-1}(\eta_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}}) \\ = \frac{1}{\mu}(C+r_1^{\frac{1}{\mu}}+r_2^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+r_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}}), \end{cases}$$

où C désigne la somme de toutes les racines de l'équation proposée, prise $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ fois, et où $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu^n-1}$ sont racines d'une équation du degré μ^n-1 dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation $f_n(x) = 0$.

23. En ayant égard à ce que les fonctions

$$f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}),\quad f_{n-1}(c, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}),\quad \ldots,\quad f_{n-1}(c, \eta_{\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}^{\frac{1}{\mu}})$$

sont les $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ valeurs de

$$(c-x_1)(c-x_2)\ldots(c-x_{\mu^n-1}),$$

lorsqu'on y regarde x_1 comme quantité donnée, et en tenant compte de ce qui a été dit au nº. 20, nous aurons

$$(x-x_1)^i F_2(x) = F_1(x) \doteq f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}) f_{n-1}(c, \eta_2^{\frac{1}{\mu}})\ldots f_{n-1}(c, \eta_{\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}^{\frac{1}{\mu}})$$

et

$$F_2(x) = \left(\frac{f_n(x)}{x-x_1}\right)^m,$$

où $i = \frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ et $m = \frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}$.

On voit de là que dans la totalité des fonctions

$$f_{n-1}(c, \eta_1^{\frac{1}{\mu}}),\quad f_{n-1}(c, \eta_2^{\frac{1}{\mu}}),\quad \ldots,\quad f_{n-1}(c, \eta_{\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}^{\frac{1}{\mu}})$$

$(c-x_1)$ est contenu i ou $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ fois comme facteur, et que chaque valeur $(c-x_p)$, x_p étant différent de x_1, y est contenue m ou $\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}$ fois comme facteur. D'où l'on tire la conclusion que dans la totalité des fonctions

$$\varphi_{n-1}(\eta_1^{\frac{1}{\mu}}),\quad \varphi_{n-1}(\eta_2^{\frac{1}{\mu}}),\quad \ldots\quad \varphi_{n-1}(\eta_{\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}^{\frac{1}{\mu}})$$

x_1 est contenu $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$ fois comme terme, et que chaque racine x_p différente de x_1 y est contenue $\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}$ fois comme terme. Par conséquent on aura

$$\varphi_{n-1}(\eta_1^{\frac{1}{\mu}})+\varphi_{n-1}(\eta_2^{\frac{1}{\mu}})+\cdots+\varphi_{n-1}(\eta_{\frac{\mu^n-1}{\mu-1}}^{\frac{1}{\mu}})$$
$$= \frac{\mu^n-1}{\mu-1}x_1+\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}(x_2+x_3+\cdots+x_{\mu^n})$$
$$= \left(\frac{\mu^n-1}{\mu-1}-\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}\right)x_1+\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{\mu^n})$$
$$= \mu^{n-1}x_1-\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}a_1,$$

a_1 étant le coefficient de x^{μ^n-1} dans $f_n(x)$.

Faisant emploi de cette équation, la formule (24.) donne

$$\mu^{n-1}x_1-\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}a_1 = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{\mu^n-1}{\mu-1}a_1+r_1^{\frac{1}{\mu}}+r_2^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+r_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}}\right),$$

donc

$$x_1 = \frac{1}{\mu^n}(-a_1+r_1^{\frac{1}{\mu}}+r_2^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+r_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}}).$$

Cette formule est celle qu'Abel a indiquée (voir Oeuvres complètes, T. II. n°. XV).

24. En résumé, toutes les fois qu'une équation irréductible du degré μ^n est résoluble algébriquement, elle peut ou être décomposée en μ^p équations chacune du degré μ^{n-p} dont les coefficients sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une équation dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée, ou si cela n'a pas lieu, l'équation proposée peut être décomposée en μ équations chacune du degré μ^{n-1} dont les coefficients sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une équation du degré μ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une racine d'une équation du degré $\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée. Dans ce dernier cas on peut représenter les racines sous la forme

$$a_0+r_1^{\frac{1}{\mu}}+r_2^{\frac{1}{\mu}}+\cdots+r_{\mu^n-1}^{\frac{1}{\mu}},$$

où a_0 désigne une fonction rationnelle des quantités données qui entrent dans l'équation proposée et où $r_1, r_2, \ldots, r_{\mu^n-1}$ sont racines d'une équation du degré μ^n-1 dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des quantités données qui entrent dans l'équation proposée.

St. Pétersbourg, juin 1878.

Ueber die Functionen, welche durch Reihen von der Form dargestellt werden

$$1+\frac{p}{1}\frac{p'}{q'}\frac{p''}{q''}+\frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1}+\cdots.$$

(Von Herrn *J. Thomae* zu Freiburg in Baden.)

Die Untersuchung von Functionen, welche durch irgend welche analytische Forderungen definirt werden, erstrebt einerseits explicite Darstellungen zu gewinnen, andererseits diejenigen Eigenschaften zu entwickeln, welche man Unstetigkeiten der Functionen und ihre Periodicität nennt. Eine solche Untersuchung gewinnt einen besonders befriedigenden Abschluss dann, wenn es ihr gelingt, ein System von Eigenschaften aufzustellen, welche die Function völlig definiren, ohne ihre Darstellbarkeit vorauszusetzen. Seit der Erfindung der Methode *Cauchys* ist dies in mehreren Fällen vollständig geglückt, und noch immer hat eine solche Definition durch Unstetigkeiten und Periodicität, wo sie eine ausreichende war, den Erfolg gehabt, in das Wesen der betreffenden Functionen grosse Klarheit, und wenn Darstellungen vorhanden waren, für dieselben ordnende Gesichtspunkte herbeizubringen, und in vielen Fällen die vorhandenen Formen zu vermehren.

Diese Methode lässt sich mit Nutzen anwenden auf Functionen, die durch die Reihe definirt sind

$$F_h\begin{pmatrix} a, & a', & a'', & \dots & a^{(m)} \\ b, & b', & b'', & \dots & b^{(m)} \end{pmatrix} = 1+\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} H_\mu,$$

deren allgemeines Glied

$$H_\mu = \prod_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{h+b^{(\nu)}}{h-a^{(\nu)}+1}\,\frac{h+b^{(\nu)}+1}{h-a^{(\nu)}+2}\cdots\frac{h+b^{(\nu)}+\mu-1}{h-a^{(\nu)}+\mu}$$

ist. (In der hier folgenden Abhandlung wird in der Regel h einer der Zahlen $a, a', a'', \dots a^{(m)}$ gleich angenommen werden, der Index h an F aber soll ganz fortgelassen werden, wenn er Null ist.)

Diese Reihe, unter $R(x)$ den reellen Theil von x verstanden, convergirt so lange als

$$R(a+a'+\cdots+a^{(m)}+b+b'+\cdots+b^{(m)}-m) < 0$$

ist, oder in Worten, so lange als der reelle Theil der Summe ihrer $2m+2$ Parameter kleiner als m ist. Für $h=a$, $m=1$ ist sie durch *Gauss*sche Π-Functionen darstellbar, indem dann in *Gauss'* Bezeichnung und unter der Voraussetzung der Convergenz

$$F_a\binom{a,\ a'}{b,\ b'} = F\binom{0,\quad a'-a}{b+a,\ b'+a}$$

$$= F(a+b,\ a+b',\ a-a'+1,\ 1) = \frac{\Pi(a-a')\Pi(-a-a'-b-b')}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a'-b')}$$

ist, welche Formel vielfach angewendet werden wird.

Hier soll nun diese Reihe für den Fall $m=2$ nach der besprochenen Methode untersucht werden. Dazu werden einleitend einige bekannte Sätze aus der Functionentheorie und Differenzenrechnung vorausgeschickt, damit sie zur Hand seien. Nebenbei werden auch in den Gleichungen (11.) und (12.) zwei (im Grunde zehn) Transformationen gefunden, und unter (13.) und (13^a.) daraus leicht resultirende asymptotische Werthe der F-Reihe aufgestellt. Sodann werden im Artikel 1 durch die Sätze I bis VI diejenigen Eigenschaften zusammengestellt, welche hier zur Definition der zu untersuchenden Functionen dienen, woraus sich sogleich noch einige andere wesentliche Eigenschaften VII und VIII und die Transformationen (14.), (15.), (16.) ergeben. Im Artikel 2 wird darauf gezeigt, dass die so definirte Function einer Recursionsformel zweiter Ordnung (19.) mit völlig bestimmten Coefficienten genügen muss. Da umgekehrt die Integrale dieser Recursionsformel die geforderten Eigenschaften besitzen, so ist damit die Existenz der Function, die zwei willkürliche periodische Functionen linear und homogen enthält (Satz IX.), erwiesen. Im Artikel 3 wird die Recursionsformel mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten durch F-Reihen integrirt, und werden sogleich für jeden der zwölf unter IV definirten Zweige Darstellungen gefunden. Diese Darstellungen reichen jedoch noch nicht für alle Fälle aus, weil die Reihen nicht immer convergiren. Es werden aber in den Artikeln 4, 5, 6 für jeden Zweig zehn verschiedene Darstellungen durch F-Reihen gegeben. Von diesen 120 Reihen, die zur Darstellung der Integrale der Recursionsformel (19.) dienen, convergiren 64 für alle Werthe der Veränderlichen n, während jedoch die Parameter verschiedenen Bedingungen unterworfen sind. Jeder der zwölf Zweige kann durch irgend zwei von ihnen linear mit periodischen Coefficienten dargestellt werden, und es ist nothwendig, diese Relationen aufzufinden. Dabei wird es genügen, so

viele von ihnen wirklich aufzustellen, als nöthig sind, die übrigen durch blosse Elimination zu erhalten. Die Zweige sind nach ihrem Verhalten im Unendlichen in zwei Klassen eingetheilt, in positive und negative. Der Artikel 7 enthält den Zusammenhang der Zweige der einzelnen Klassen unter sich, und der Artikel 8 den Zusammenhang zwischen Zweigen verschiedener Klassen. Im Artikel 9 wird die F-Reihe in Bezug auf ihr Verhalten untersucht, wenn einzelne Parameter über alle Grenzen wachsen, wofür die Gleichungen (13.) und (13^a.) schon specielle Beispiele abgaben. Die asymptotischen Werthe einer Function gehören mit zu den wichtigsten Eigenschaften derselben, weshalb eine grössere Anzahl im Artikel 9 aufgestellt wurde. Einzelne sind auch für die weiteren Untersuchungen selbst unentbehrlich, wie z. B. die Formel (73.), welche die Mittel liefert, die Convergenz des Kettenbruches festzustellen, in welchen im Artikel 12 der Quotient zweier F-Reihen entwickelt wird. Im Artikel 10 wird in einer Weise, die derjenigen ganz ähnlich ist, welche *Riemann* bei der *Gauss*schen Reihe anwendet, der allgemeine Satz bewiesen, dass zwischen je drei F-Reihen, deren Parameter sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, eine lineare homogene Relation mit rationalen Coefficienten statt hat, und im Artikel 11 werden eine Anzahl solcher Relationen hergeleitet. Sind die Parameter um *unbestimmte* ganze Zahlen von einander verschieden, so ist eine explicite Darstellung der Coefficienten im Allgemeinen nicht möglich. Im Artikel 12 wird jedoch ein Fall behandelt, in welchem diese Coefficienten die Näherungszähler und Nenner eines einfachen Kettenbruches sind, von dem es sich zeigt, dass er in's Unendliche fortgesetzt, unter gewissen Bedingungen den Quotienten zweier F-Reihen darstellt. Im Artikel 13 wird noch gezeigt, wie sich die F-Reihe durch bestimmte Integrale darstellen lässt, und manche der bis dahin nur mit Hilfe der Theorie der endlichen Differenzenrechnung gefundenen Resultate auch aus ihnen hätten gezogen werden können, und wie sie namentlich zur Herleitung von Beziehungen zwischen contiguen Relationen benutzt werden können.

Der Parallelismus, der zwischen den hier behandelten Functionen und den durch die *Gauss*sche Reihe dargestellten in *Riemann*s Behandlungsweise, und ebenso der durch die *Heine*sche Reihe dargestellten, wie sie von mir in diesem Journal Bd. 70, S. 258 u. s. f. behandelt sind*), fällt leicht in

*) Dort befindet sich unter den definirenden Eigenschaften eine unschwer auszufüllende Lücke. Es könnten nämlich auf S. 267 die Nennerdeterminanten verschwinden.

die Augen. Wie man durch einen Grenzübergang von den hier aufgestellten Formeln unmittelbar zu den analogen der *Gauss*schen Reihe gelangen könne, habe ich bereits in einem Aufsatze in *Schlömilchs* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 16, S. 146 und S. 428 vielfach dargethan, und auch dort die Vermuthung ausgesprochen, dass es vielleicht einer Untersuchung, die sich auf den hier gewählten Standpunkt stellen würde, gelingen möchte, Ordnung in den ausserordentlichen Formenreichthum, der den der hypergeometrischen Reihe noch übertrifft, zu bringen, was sich bestätigt hat. Zudem wurde damals der verschiedene Charakter der positiven und negativen Zweige noch nicht erkannt, und in Folge dessen auch der Zusammenhang der zu verschiedenen Klassen gehörenden Zweige nicht aufgestellt. Mit den contiguen Functionen und den Kettenbrüchen beschäftigten sich jene Aufsätze überhaupt nicht.

Einleitung.

Bezeichnet man die Differenz $\varphi(n+1)-\varphi(n)$ mit $\Delta\varphi(n)$, so wird die Differenzengleichung, bez. Recursionsformel

$$(1.)\qquad \Delta\varphi(n)=0,\quad \varphi(n+1)=\varphi(n)$$

unendlich viele Integrale (Lösungen) zulassen, selbst wenn man, was hier immer geschieht, die Forderung hinzufügt, dass die Genüge leistende Function nur in einzelnen Punkten unstetig sei, und dass ihr nach der complexen Veränderlichen n genommener Differentialquotient abgesehen von einzelnen Punkten überall von den speciellen Werthen des Differentials dn unabhängig sei. Eine solche Function soll hier immer kurz eine Function der complexen Veränderlichen n heissen, ohne dass ein so schleppender Zusatz wie monogen oder dergleichen hinzugefügt wird. Jede solche Lösung der Gleichung (1.) heisst eine periodische Function von n, und es ist also hier an diesen Namen der Kürze halber der Periodicitätsmodul Eins geknüpft. Beispiele einwerthiger periodischer Functionen sind

$$\sin 2n\pi,\ \cos 2n\pi,\ e^{2ni\pi},\ e^{ni\pi}.\sin n\pi,\ e^{\sin 2n\pi},\ \sin(n+a)\pi:\sin(n+b)\pi,\ \sin\operatorname{am} 4nK, \text{ etc.}$$

Auch jede Constante muss zu ihnen gezählt werden. Legen wir die bekannte von der Repräsentation der complexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene hergenommene Terminologie zu Grunde, so gilt von solchen periodischen Functionen der Satz:

(A.) *Eine einändrige periodische Function der complexen Variabeln n,*

die in einem in imaginärer Richtung unendlichen Parallelstreifen von der Breite Eins nirgend unendlich wird, ist eine Constante.

Da sie sich nämlich periodisch fortsetzt, so ist sie überall endlich, und folglich constant. Für manche Leser ist es vielleicht nöthig hinzuzufügen, was ich unter einer Function, die nirgend unendlich gross wird, verstehe. Ich verstehe darunter eine Function, die *keinen* Punkt besitzt, dem man die Veränderliche auf irgend eine Weise so nähern kann, dass ihr Werth über alle Grenzen wächst. Somit ist z. B. $\sin 2n\pi$ keine überall endliche Function. Bekanntlich gilt der Satz:

(B.) *Wenn eine Function der complexen Veränderlichen n in einem Punkte unbestimmt wird, so muss sie entweder in jeder noch so kleinen Umgebung des Punktes unendlich oft unendlich gross werden, oder es muss eine Art der Annäherung geben, bei der die Function in einer Ordnung über alle Grenzen wächst, die (durch Potenzexponenten gemessen) über alle Grenzen gross ist.*

Hieraus entspringt auch der Satz:

(C.) *Eine Function $F(n)$ der complexen Veränderlichen n, welche für endliche Werthe von n endlich bleibt, aber für wachsende n mit einer solchen bestimmten Potenz von n multiplicirt werden kann, dass das Product bei jeder Art des Anwachsens von n über alle Grenzen endlich bleibt, ist eine ganze Function höchtens vom Grade m, wenn für irgend eine Richtung der wachsenden n $F(n).n^{-m}$ endlich bleibt.*

Die periodischen Functionen spielen in der Differenzenrechnung etwa dieselbe Rolle, wie die willkürlichen Constanten in der Differentialrechnung, z. B. in dem Satze:

(D.) *Die Differenzengleichung $\Delta\varphi(n) = f(n)$ besitzt abgesehen von einer willkürlichen periodischen Function, welche additiv hinzutreten kann, nur eine Lösung.*

Die Differenz zweier Lösungen genügt nämlich offenbar der Differenzengleichung (1.), welche die periodischen Functionen definirt. Es soll hier die Lösung der Differenzengleichung $\Delta\varphi(n) = f(n)$ mit $Sf(n)\Delta n$ oder kürzer mit $Sf(n)$ bezeichnet werden, so dass die Gleichungen

$$\Delta\varphi(n) = f(n), \quad \varphi(n) = Sf(n)$$

für die Unbekannte $\varphi(n)$ dasselbe bedeuten. Giebt man den Werth von $Sf(n)$ in einzelnen im Endlichen liegenden Punkten an, so wird dadurch die Function noch nicht zu einer bestimmten, weil es unendlich viele periodische

Functionen giebt, die in diesen Punkten verschwinden. Giebt man aber für $\lim\varphi(n)$ einen bestimmten Werth an, wenn der reelle Theil von n entweder positiv, oder auch wenn er negativ über alle Grenzen wächst, so ist die Function bestimmt. Denn

(E.) ***Eine periodische Function $p(n)$, für welche $\lim p(n)=0$ ist, ist Null.***

Dabei bezieht sich das Zeichen lim auf den reellen Theil von n. Der Satz (E.) beweist sich so. Es ist

$$\lim p(n+x)=\lim p(n)=0.$$

Ist nun n eine ganze Zahl, so ist $\lim p(n+x)=p(x)$. Also ist $p(x)$ der Null für reelle x gleich, und also ist $p(x)$ überall Null.

Weiter spielen die periodischen Functionen eine Rolle in dem Satze:

(F.) ***Zwischen je $n+1$ Integralen einer linearen homogenen Recursionsformel (Differenzengleichung) n^{ter} Ordnung besteht stets eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten.***

So wie sich die Integrale einer Differentialgleichung durch Potenzreihen darstellen lassen, deren Exponenten um eine Einheit steigen oder fallen, so lassen sich die Integrale einer Recursionsformel oder Differenzengleichung in eine nach *Gauss*schen Π-Functionen mit um Eins zu- oder abnehmenden Argumenten fortschreitende Reihe entwickeln, wofür gegenwärtiger Aufsatz selbst im Artikel 3 ein Beispiel bietet. Ueberhaupt aber spielen hier die Π-Functionen eine ähnliche Rolle, wie die Potenzen eines Binoms in der Differentialrechnung. Letztere werden nämlich durch die Gleichung $xf'(x)=\mu f(x)$ definirt. Dem analog wird die Π-Function durch die Gleichung definirt

$$(2.)\qquad n\Delta\varphi(n)=\mu.\varphi(n),\quad n\varphi(n+1)=(n+\mu)\varphi(n).$$

Durch diese Gleichung, deren Lösung

$$(3.)\qquad \varphi(n)=\Pi(n+\mu-1):\Pi(n-1)=\sin n\pi.\Pi(-n):\sin(n+\mu)\pi.\Pi(-n-\mu)$$

ist, wird $\varphi(n)$ bis auf eine willkürliche periodische Function, die als Factor hinzutreten kann, bestimmt. Der Quotient zweier Lösungen genügt nämlich offenbar der die periodischen Functionen definirenden Recursionsformel (1.). In der unter (3.) gegebenen Lösung ist dieser Factor so bestimmt, dass

$$(4.)\qquad \lim\varphi(n).n^{-\mu}=\lim\Pi(n+\mu-1):\Pi(n-1)n^{\mu}=1$$

ist, wenn der reelle Theil von n positiv über alle Grenzen wächst. Der Grenzwerth bleibt derselbe, wenn auch der imaginäre Theil zugleich über

alle Grenzen wächst. Wie sich die Function für Werthe von n mit einem negativen unendlichen reellen Theile verhält, erkennt man leicht aus ihrer zweiten Form, wenn aber der imaginäre Theil allein unendlich wird, so haben wir die Grenzwerthe

$$(5.)\qquad \lim \Pi(n+\mu):\Pi(n) = 0 \quad \text{oder} \quad \infty,$$

je nachdem $\mu < 0$ oder > 0 ist*). Liegt der reelle Theil von μ zwischen den ganzen Zahlen m und $m+1$, so ist immer

$$(5^a.)\qquad \lim_{n=i\infty} \Pi(n+\mu):\Pi(n)n^{m+1} = 0.$$

Dem Logarithmus entspricht in der Differenzenrechnung die Function, welche von *Gauss* mit $\Psi(n-1)$ bezeichnet wird, und die er durch die Gleichung

$$(6.)\qquad \Psi(n) = \frac{d\lg\Pi(n)}{dn} = \frac{d}{dn}\lg\frac{n}{\sin n\pi\,\Pi(-n-1)}$$

definirt. Sie kann auch durch die Differenzengleichung bestimmt werden

$$(7.)\qquad \Delta\Psi(n-1) = \Psi(n)-\Psi(n-1) = 1:n,$$

wenn noch hinzugefügt wird, dass

$$(8.)\qquad \lim\{\Psi(n)-\lg n\} = 0, \quad \Psi(0) = 0{,}57721566\ldots,$$

d. h. dass dieser Grenzwerth für positiv wachsende n der Null gleich sei, woraus sich der Werth der *Mascheroni*schen Constanten $\Psi(0)$ leicht ergiebt.

Es empfiehlt sich zuweilen, neben dem gewöhnlich in Anwendung kommenden Summenzeichen Σ noch das Zeichen S mit Angabe der Sum-

---

*) Für Werthe von μ, deren reeller Theil > 1 ist, erkennt man die Richtigkeit dieses Satzes durch eine ganz oberflächliche Betrachtung des Integrales

$$\int_0^1 s^{u+iv-1}(1-s)^{ni}\,ds = \Pi(u+vi-1)\Pi(ni):\Pi(u+vi+ni)$$

$$= \int_0^1 s^{u-1}e^{iv\lg s+ni\lg(1-s)}\,ds = \int_0^1 s^{u-1}\{\cos(v\lg s+n\lg(1-s))+i\sin(v\lg s+n\lg(1-s))\}ds,$$

welches offenbar endlich bleibt, so lange u positiv ist, wie gross auch n sein mag. Mithin ist (in nicht misszuverstehender abgekürzter Bezeichnungsweise)

$$\Pi(i\infty):\Pi(\mu+i\infty) = \Pi(i\infty):(\mu+i\infty)\Pi(\mu-1+i\infty) = 0,$$

wenn $R(\mu) > 1$ ist, weil $1:(\mu+i\infty)$ Null, und $\Pi(i\infty):\Pi(\mu-1+i\infty)$ endlich ist. Für Werthe von μ, deren reeller Theil zwischen Null und Eins liegt, ist wohl eine eingehendere Untersuchung des Integrales nöthig, obgleich sich auch schon Folgerungen daraus ziehen lassen, dass in dem Ausdrucke

$$\frac{\Pi(i\infty)}{\Pi(1+i\infty)} = \frac{\Pi(i\infty)}{\Pi(\mu+i\infty)}\cdot\frac{\Pi(\mu+i\infty)}{\Pi(1+i\infty)} = 0$$

wenigstens ein Factor verschwinden muss.

mationsgrenzen ähnlich wie bei bestimmten Integralen einzuführen. Dies geschieht durch die Gleichung

$$(9.)\qquad \overset{a+x}{\underset{a}{S}} f(n)\Delta(n) = \overset{a+x}{\underset{a}{S}} f(n) = \sum_{m=0}^{m=x} f(a+m),$$

welche jedoch nur einen Sinn hat, wenn x eine ganze positive oder negative Zahl, oder (unter Voraussetzung der Convergenz) unendlich gross ist. Hat $\alpha+\beta-\gamma$ einen negativen reellen Theil, so ergiebt sich in dieser Bezeichnung

$$(10.)\quad \begin{cases} \overset{\infty}{\underset{0}{S}} \dfrac{\Pi(n+\alpha-1)\Pi(n+\beta-1)}{\Pi(n)\Pi(n+\gamma-1)} \\ = F\begin{pmatrix}0, & -\gamma+1\\ \alpha, & \beta\end{pmatrix} \dfrac{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}{\Pi(0)\Pi(\gamma-1)} = \dfrac{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}, \end{cases}$$

oder

$$(10^a.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi(u-1)}{\Pi(v-1)\Pi(w-1)} \\ = \dfrac{1}{\Pi(w-u-1)\Pi(v-u-1)} \overset{\infty}{\underset{0}{S}} \dfrac{\Pi(n+w-u-1)\Pi(n+v-u-1)}{\Pi(n)\Pi(n+v+w-u-1)}. \end{cases}$$

Von dieser Darstellung eines Π-Functionenquotienten durch eine bestimmte Summe machen wir Anwendung, um eine Transformation der F-Reihe auszuführen, die uns später nützlich sein wird. Wir setzen nämlich in die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_{(\mu)} \frac{\Pi(\mu+a+b-1)\Pi(\mu+a+b'-1)\Pi(\mu+a+b''-1)}{\Pi(\mu)\Pi(\mu+a-a')\Pi(\mu+a-a'')}$$

für $\Pi(\mu+a+b-1):\Pi(\mu+a-a')\Pi(\mu+a-a'')$ die durch $(10^a.)$ gegebene bestimmte Summe ein, und finden so für diese Reihe den Ausdruck

$$\frac{1}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)} \sum_0^\infty{}_{(\mu)} \frac{\Pi(\mu+a+b'-1)\Pi(\mu+a+b''-1)}{\Pi(\mu)} \cdot \overset{\infty}{\underset{0}{S}} \frac{\Pi(n-a'-b)\Pi(n-a''-b)}{\Pi(n)\Pi(n+\mu+a-a'-a''-b+1)}$$

$$= \frac{1}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)} \overset{\infty}{\underset{0}{S}} \frac{\Pi(n-a'-b)\Pi(n-a''-b)}{\Pi(n)} \sum_0^\infty{}_{(\mu)} \frac{\Pi(\mu+a+b'-1)\Pi(\mu+a+b''-1)}{\Pi(\mu)\Pi(n+\mu+a-a'-a''-b+1)}$$

$$= \frac{\Pi(a+b'-1)\Pi(a+b''-1)}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)} \overset{\infty}{\underset{0}{S}} \frac{\Pi(n-a'-b)\Pi(n-a''-b)\Pi(n-a-a'-a''-b-b'-b''+1)}{\Pi(n)\Pi(n+1-a'-a''-b-b')\Pi(n+1-a'-a''-b-b'')}.$$

Hieraus erhalten wir schliesslich die Formel

$$(11.)\quad \begin{cases} F_a\begin{pmatrix}a, a', a''\\ b, b', b''\end{pmatrix} \\ = \dfrac{\Pi(a-a')\Pi(a-a'')\Pi(1-a-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(a+b-1)\Pi(1-a'-a''-b-b')\Pi(1-a'-a''-b-b'')} F_{-b}\begin{pmatrix}-b, & a'+a''+b'-1, & a'+a''+b''-1\\ 1-a', & 1-a'', & 2-a-a'-a''-b'-b''\end{pmatrix}, \end{cases}$$

und durch Wiederholung derselben Transformation noch die Formel

$$(12.)\quad \begin{cases} F_a\begin{pmatrix}a, a', a''\\ b, b', b''\end{pmatrix} \\ = \dfrac{\Pi(a-a'')\Pi(1-a-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(-a''-b)\Pi(1-a'-a''-b'-b'')} F_a\begin{pmatrix}a, & a', & a+a'+a''+b'+b''-1\\ b, & 1-a-a'-b', & 1-a-a'-b''\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Da die Convergenz des in (11.) und (12.) rechts stehenden Ausdruckes unabhängig von b'' ist, so kann man darin b'' über alle Grenzen wachsen lassen, wodurch sich die F-Reihen in *Gauss*sche Reihen verwandeln, deren letztes Element Eins ist, die sich also auf Π-Functionen reduciren. Man erhält auf diese Weise unter der Voraussetzung $R(b) < R(b')$ die Formeln

$$(13.)\quad \lim_{b''=-\infty}(-b'')^{a+b} F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = \frac{\Pi(a-a')\Pi(a-a'')\Pi(b'-b-1)}{\Pi(a+b'-1)\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)},$$

und, wenn m eine ganze positive Zahl ist,

$$(13^a.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{m=\infty} F_a\begin{pmatrix} a, a', & a'' \\ b, b', & b''+m \end{pmatrix} m^{a+b} \\ = \dfrac{\sin(a'+a''+b'+b'')\pi}{\sin(a+a'+a''+b+b'+b'')\pi} \cdot \dfrac{\Pi(a-a')\Pi(a-a'')\Pi(b'-b-1)}{\Pi(a+b'-1)\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)}. \end{cases}$$

Ist $R(b) > R(b')$, so hat man in diesen Formeln b mit b' zu vertauschen. Dass übrigens diese Resultate richtig bleiben, auch wenn die Reihe F nicht convergirt, sofern man sie nur als Function ihrer complexen Parameter stetig fortsetzt, ergiebt sich später von selbst.

Der zweite Grenzübergang kann Bedenken erregen, weil die einzelnen Terme der Reihe trotz der Convergenz möglicher Weise von Anfang an bis zu einem von m abhängenden Gliede zunehmen, so dass sich die Convergenz mit wachsenden Werthen von m mehr und mehr verzögert. Eine eingehende Untersuchung darüber anzustellen ist jedoch nicht nöthig, weil sich das Resultat im Artikel 8. in anderer Weise bestätigt.

Um den Ausdruck zu erleichtern, führen wir einige abkürzende Wendungen ein.

Wir nennen eine im Unendlichen periodische Function eine solche, welche asymptotisch bei wachsendem n die Gleichung $\varphi(n+1) = \varphi(n)$ befriedigt, wie z. B. n^μ, $\lg n$, $\lg\lg n$, $\Pi(n+\mu):\Pi(n)$ u. s. w.

Sodann verstehen wir unter einer *Punktfolge* oder schlechthin *Folge* α das System von Werthen, für welche $\Pi(n+\alpha)$ als Function von n unendlich gross wird, und nennen das System von Werthen, für welche $\Pi(n+\alpha).\sin(n+\alpha)\pi$ verschwindet, die α *conjugirte Folge.* Das System von Werthen, für welche $\sin(n+\alpha)\pi$ verschwindet, soll die *complete Punktfolge oder complete Folge* α heissen.

Artikel 1. Die definirenden Eigenschaften.

Zur Definition der Functionen, welche den Gegenstand gegenwärtiger Untersuchungen ausmachen, wählen wir folgende Eigenschaften.

I. *Die Function*

$$W\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & n\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$$

ist eine überall einändrige Function der complexen Veränderlichen n, die nur für unendlich grosse Werthe von n unbestimmt (vieldeutig) werden kann.

II. *Die Summe der Parameter ist Eins.*

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1.$$

Der Fall, in welchem gewisse Aggregate der Parameter, wie $\alpha-\alpha'$, $\alpha+\beta$ u. s. w. ganzzahlige Werthe erhalten, ist in manchen Beziehungen als ein singulärer, als ein Grenzfall zu behandeln. Hier sollen der Einfachheit halber immer die allgemeinen Werthe dieser Parameter zu Grunde liegend gedacht werden.

III. *Zwischen je drei Zweigen der Function W findet stets eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten statt:*

$$c'(n)W'(n)+c''(n)W''(n)+c'''(n)W'''(n) = 0.$$

IV. *Die Function lässt sich in die Formen setzen*

$$\overset{+}{c}_\alpha W_+^\alpha+\overset{+}{c}_{\alpha'}W_+^{\alpha'},\quad \overset{+}{c}_\beta W_+^\beta+\overset{+}{c}_{\beta'}W_+^{\beta'},\quad \overset{+}{c}_\gamma W_+^\gamma+\overset{+}{c}_{\gamma'}W_+^{\gamma'},$$

$$\overset{-}{c}_\alpha W_-^\alpha+\overset{-}{c}_{\alpha'}W_-^{\alpha'},\quad \overset{-}{c}_\beta W_-^\beta+\overset{-}{c}_{\beta'}W_-^{\beta'},\quad \overset{-}{c}_\gamma W_-^\gamma+\overset{-}{c}_{\gamma'}W_-^{\gamma'},$$

in denen $\overset{+}{c}_\alpha, \overset{+}{c}_{\alpha'}, \overset{+}{c}_\beta, \dots \overset{-}{c}_\alpha, \overset{-}{c}_{\alpha'}, \dots \overset{-}{c}_{\gamma'}$ *periodische Functionen von n sind.*

$$n^\gamma.W_+^\gamma,\quad n^{\gamma'}.W_+^{\gamma'}$$

nehmen für Werthe von n, deren reeller Theil positiv über alle Grenzen wächst, bez. die Formen an

$$1+n^{-1}M_\gamma+n^{-2}N_\gamma,\quad 1+n^{-1}M_{\gamma'}+n^{-2}N_{\gamma'},$$

in denen M_γ, $M_{\gamma'}$ *Constante sind,* N_γ, $N_{\gamma'}$ *aber Functionen von n sind, die mit wachsendem n sich Constanten nähern.*

$$n^\gamma.W_-^\gamma,\quad n^{\gamma'}.W_-^{\gamma'}$$

nehmen für Werthe von n, deren reeller Theil negativ über alle Grenzen wächst, bez. die Formen an

$$1+n^{-1}P_\gamma+n^{-2}Q_\gamma,\quad 1+n^{-1}P_{\gamma'}+n^{-2}Q_{\gamma'},$$

in denen P_γ, $P_{\gamma'}$ *Constante,* Q_γ, $Q_{\gamma'}$ *aber Functionen von n sind, die sich mit wachsendem n Constanten nähern.*

Die Zweige W_+^α, $W_+^{\alpha'}$ *werden bez. in den Punktfolgen* α, α' *unendlich gross erster Ordnung und sind sonst für endliche n endlich. Die Zweige* W_-^α, $W_-^{\alpha'}$ *werden bez. in den* α, α' *conjugirten Punktfolgen unendlich klein erster Ordnung und beide in den* $-\beta$, $-\beta'$ *conjugirten Folgen unendlich gross erster Ordnung.*

Die Zweige W_-^β, $W_-^{\beta'}$ werden bez. in den $-\beta$, $-\beta'$ conjugirten Folgen unendlich gross erster Ordnung und bleiben sonst endlich für endliche n. Die Zweige W_+^β, $W_+^{\beta'}$ verschwinden bez. in den Punktfolgen $-\beta$, $-\beta'$, und werden beide in den Folgen α, α' unendlich gross erster Ordnung und bleiben sonst endlich für endlichen.

Die Zweige mit der Marke $+$ sollen positive, mit der Marke $-$ negative Zweige genannt werden.

V. *Die positiven Zweige W_+^α, $W_+^{\alpha'}$, W_+^β, $W_+^{\beta'}$ können mit einer solchen Potenz von n multiplicirt werden, dass die Producte für Werthe von n, deren reeller Theil positiv oder deren imaginärer Theil über alle Grenzen wächst, bestimmte Grenzwerthe erhalten. Die negativen Zweige W_-^β, $W_-^{\beta'}$, W_-^α, $W_-^{\alpha'}$ können ebenfalls mit solchen Potenzen von n multiplicirt werden, dass die Producte für Werthe von n, deren reeller Theil negativ oder deren imaginärer Theil über alle Grenzen wächst, bestimmte Werthe annehmen. Sämmtliche Zweige sind im Unendlichen periodische Functionen.*

Die Beziehungen, die zwischen den unter IV. definirten Zweigen stattfinden, setzen wir in die Formen

$$W_+^\alpha = (\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\alpha})\, W_-^\alpha + (\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\alpha'})\, W_-^{\alpha'} = (\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\beta})\, W_+^\beta + (\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\beta'})\, W_+^{\beta'} = \cdots,$$

$$W_+^{\alpha'} = (\overset{+}{\alpha'}, \overset{-}{\alpha})\, W_-^\alpha + (\overset{+}{\alpha'}, \overset{-}{\alpha'})\, W_-^{\alpha'} = (\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\beta})\, W_+^\beta + (\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\beta'})\, W_+^{\beta'} = \cdots,$$

worin die Coefficienten $(\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\alpha})$ ... periodische Functionen von n sind. Wir müssen in Bezug auf dieselben noch folgenden Satz hinzufügen:

VI. *Die Coefficienten $(\overset{-}{\alpha}, \overset{-}{\beta})$, $(\overset{-}{\alpha}, \overset{-}{\beta'})$, $(\overset{-}{\alpha'}, \overset{-}{\beta})$, $(\overset{-}{\alpha'}, \overset{-}{\beta'})$ sollen in den Punkten β, β' und daher in den zugehörigen completen Punktfolgen $-\beta$, $-\beta'$, nicht unendlich werden.*

Im Grunde bedeutet dieser letzte Satz nur die Verneinung einer Beschränkung. Denn wenn in der Gleichung

$$W_-^\alpha = (\overset{-}{\alpha} . \overset{-}{\beta})\, W_-^\beta + (\overset{-}{\alpha}, \overset{-}{\beta'})\, W_-^{\beta'}$$

die Coefficienten in den Punktfolgen $-\beta$, $-\beta'$ unendlich würden, so müssten in den Punkten der Folgen $-\beta$, $-\beta'$, in denen die linke Seite endlich bleibt, Beziehungen zwischen W_-^β und $W_-^{\beta'}$ bestehen.

Aus diesen Sätzen folgen sogleich noch die beiden neuen:

VII. *Eine Function W verliert ihren Charakter als solche nicht, wenn sie mit einer periodischen Function multiplicirt wird.*

VIII. *In einer Function W kann man den Parameter α mit α', den Parameter β mit β', endlich γ mit γ' vertauschen, ohne sie zu ändern.*

Ferner ergeben sich aus der Definition sofort die Gleichungen

$$(14.)\qquad W\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix}, n\Big) = W\begin{pmatrix} \alpha-\mu, & \beta+\mu, & \gamma \\ \alpha'-\mu, & \beta'+\mu, & \gamma' \end{pmatrix}, n+\mu\Big),$$

worin μ willkürlich ist, so dass man also die Allgemeinheit nicht beschränken würde, wenn man eine der Grössen α, α', β, β' der Null gleich annähme, wodurch jedoch die Symmetrie litte.

$$(15.)\qquad \begin{cases} W\Big(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix}, n\Big) = \dfrac{\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(-\alpha-n-1)} W\Big(\begin{matrix} -\beta, & -\alpha, & \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha', & \beta', & \alpha+\beta+\gamma' \end{matrix}, n\Big) \\ = \dfrac{\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(-\alpha'-n-1)} W\Big(\begin{matrix} \alpha, & -\alpha', & \alpha'+\beta+\gamma \\ -\beta, & \beta', & \alpha'+\beta+\gamma' \end{matrix}, n\Big) \\ = \dfrac{\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-n-1)} W\Big(\begin{matrix} -\beta', & \beta, & \alpha+\beta'+\gamma \\ \alpha', & -\alpha, & \alpha+\beta'+\gamma' \end{matrix}, n\Big) \\ = \dfrac{\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha'-n-1)} W\Big(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \alpha'+\beta'+\gamma \\ -\beta', & -\alpha', & \alpha'+\beta'+\gamma' \end{matrix}, n\Big) \\ = \dfrac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-n-1)} W\Big(\begin{matrix} -\beta, & -\alpha, & 1-\gamma \\ -\beta', & -\alpha', & 1-\gamma' \end{matrix}, n\Big), \end{cases}$$

$$(16.)\qquad \begin{cases} W\Big(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix}, n\Big) = W\Big(\begin{matrix} \beta+1, & \alpha-1, & \gamma \\ \beta'+1, & \alpha'-1, & \gamma' \end{matrix}, -n-2\Big) \\ = \dfrac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-n-1)} W\Big(\begin{matrix} 1-\alpha, & -1-\beta, & 1-\gamma \\ 1-\alpha', & -1-\beta', & 1-\gamma' \end{matrix}, -n-2\Big). \end{cases}$$

Es fragt sich nun, ob eine Function, die die Forderungen I. bis VI. erfüllt, wirklich existirt, und in wie weit sie durch diese Eigenschaften bestimmt ist, welche Frage der nächste Artikel beantwortet.

Artikel 2. Die Existenz der Function *W*.

Es sei m eine ganze Zahl und $\varDelta_{n,m}$ gleich

$$\begin{vmatrix} W^{\alpha}_{-}(n+m), & W^{\alpha'}_{-}(n+m) \\ W^{\alpha}_{-}(n), & W^{\alpha'}_{-}(n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\bar\alpha, \bar\beta), & (\bar\alpha, \bar\beta') \\ (\bar\alpha', \bar\beta), & (\bar\alpha', \bar\beta') \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W^{\beta}_{-}(n+m), & W^{\beta'}_{-}(n+m) \\ W^{\beta}_{-}(n), & W^{\beta'}_{-}(n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\bar\alpha, \overset{+}{\gamma}), & (\bar\alpha, \overset{+}{\gamma}') \\ (\bar\alpha', \overset{+}{\gamma}), & (\bar\alpha', \overset{+}{\gamma}') \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W^{\gamma}_{+}(n+m), & W^{\gamma'}_{+}(n+m) \\ W^{\gamma}_{+}(n), & W^{\gamma'}_{+}(n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\bar\alpha, \bar\gamma), & (\bar\alpha, \bar\gamma') \\ (\bar\alpha', \bar\gamma), & (\bar\alpha', \bar\gamma') \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W^{\gamma}_{-}(n+m), & W^{\gamma'}_{-}(n+m) \\ W^{\gamma}_{-}(n), & W^{\gamma'}_{-}(n) \end{vmatrix},$$

so erkennt man sogleich, dass

$$(17.)\qquad \varDelta_{n,m} \cdot \frac{\Pi(-\alpha-n-1)\,\Pi(-\alpha'-n-1)}{\Pi(\beta-n-m-1)\,\Pi(\beta'-n-m-1)}$$

für endliche Werthe von n endlich bleibt. Da ferner der Ausdruck für ein

wachsendes n in einer durch den Exponenten einer Potenz messbaren Ordnung unendlich gross wird, so ist er eine ganze Function von n. Für ein n, dessen reeller Theil über alle Grenzen wächst, nähert sich dieser Ausdruck der Potenz

$$(18.)\qquad n^{-\gamma-\gamma'-\beta-\beta'-\alpha-\alpha'-1+m+m} = n^{2(m-1)},$$

und es ist daher der Grad der Function der $2(m-1)^{\text{te}}$. Für $m=1$ und $m=2$ fliessen hieraus die beiden Gleichungen

$$\begin{vmatrix} W^{\alpha}_{-}(n+1), & W^{\alpha'}_{-}(n+1) \\ W^{\alpha}_{-}(n), & W^{\alpha'}_{-}(n) \end{vmatrix} = \frac{D\,.\,\Pi(\beta-n-2)\Pi(\beta'-n-2)}{\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-n-1)},$$

$$\begin{vmatrix} W^{\alpha}_{-}(n+2), & W^{\alpha'}_{-}(n+2) \\ W^{\alpha}_{-}(n), & W^{\alpha'}_{-}(n) \end{vmatrix} = \frac{D(An^2+Bn+C)}{(n-\beta+2)(n-\beta'+2)}\,\frac{\Pi(\beta-n-2)\Pi(\beta'-n-2)}{\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-n-1)},$$

worin A, B, C, D Constante sind. Setzt man diese Ausdrücke in die Identität

$$\begin{vmatrix} W(n), & W(n+1), & W(n+2) \\ W^{\alpha}_{-}(n), & W^{\alpha}_{-}(n+1), & W^{\alpha}_{-}(n+2) \\ W^{\alpha'}_{-}(n), & W^{\alpha'}_{-}(n+1), & W^{\alpha'}_{-}(n+2) \end{vmatrix} = 0$$

ein, so erhält man für $W(n)$ die Recursionsformel

$$(n+\alpha+1)(n+\alpha'+1)W(n)-(An^2+Bn+C)W(n+1)+ (n+2-\beta)(n+2-\beta')W(n+2) = 0.$$

Nun ist $W(n)$ eine im Unendlichen periodische Function, also muss die Recursionsformel, die für sehr grosse n nach Division mit nn näherungsweise die Form annimmt

$$W(n)-AW(n+1)+W(n+2) = 0,$$

durch eine Function integrirt werden, für welche $W(n):W(n+1):W(n+2) = 1:1:1$ ist, so dass $1-A+1=2-A=0$ also $A=2$ sein muss. Es bleiben noch B und C zu bestimmen. Dazu dient die unter IV. gemachte Voraussetzung, dass die Recursionsformel durch einen Ausdruck von der Form

$$n^{\mu}+Mn^{\mu-1}+Nn^{\mu-2}$$

muss integrirt werden können, wenn M constant ist, N aber für wachsende n sich ebenfalls einer Constanten nähert. Wird dieser Ausdruck in die Recursionsformel eingesetzt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}&(n^{\mu}+Mn^{\mu-1}+n^{\mu-2})(n^2+n(2+\alpha+\alpha')+(\alpha+1)(\alpha'+1))\\ &-((n+1)^{\mu}+M(n+1)^{\mu-1}+N(n+1)^{\mu-2})(2n^2+Bn+C)\\ &+((n+2)^{\mu}+M(n+2)^{\mu-1}+N(n+2)^{\mu-2})(n^2+n(4-\beta-\beta')+(2-\beta)(2-\beta')) = 0.\end{aligned}$$

Lässt man, nach Potenzen von n ordnend, wobei sich $n^{\mu+2}$ von selbst hebt,

alle Glieder niederer Ordnung als n^μ fort, so folgt weiter

$$0 = n^{\mu+1}(6+\alpha+\alpha'-\beta-\beta'-B)$$
$$+n^\mu(\overline{\alpha+1}.\overline{\alpha'+1}+\overline{2-\beta}.\overline{2-\beta'}-C-M.\overline{6+\alpha+\alpha'-\beta-\beta'-B}-\mu.\overline{B-9+2\beta+2\beta'}+\mu\mu).$$

Hierin ist M mit dem Coefficienten von $n^{\mu+1}$ multiplicirt, und da dieser für sich verschwinden muss, so erhält man für B und C die von M freien Gleichungen

$$B = 6+\alpha+\alpha'-\beta-\beta'$$
$$C = \overline{\alpha+1}.\overline{\alpha'+1}+\overline{2-\beta}.\overline{2-\beta'}-\mu.\overline{B-9+2\beta+2\beta'}+\mu\mu$$
$$= (\alpha+1)(\alpha'+1)+(2-\beta)(2-\beta')-\mu(\alpha+\alpha'+\beta+\beta'-1)+\mu\mu.$$

Nach den unter IV. gemachten Voraussetzungen sollen diese Gleichungen befriedigt werden, wenn $-\gamma$, $-\gamma'$ für μ gesetzt wird. Daraus ergiebt sich für C der Werth

$$C = (\alpha+1)(\alpha'+1)+(2-\beta)(2-\beta')-\gamma\gamma'.$$

Ausserdem muss

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1$$

sein, wie es die unter II aufgestellte Forderung erheischt. Somit erhalten wir endlich für $W(n)$ die Recursionsformel

$$(19.)\quad \begin{cases} 0 = (n+\alpha+1)(n+\alpha'+1)W(n)+(n+2-\beta)(n+2-\beta')W(n+2) \\ -(2nn+n.\overline{6+\alpha+\alpha'-\beta-\beta'}+\overline{\alpha+1}.\overline{\alpha'+1}+\overline{2-\beta}.\overline{2-\beta'}-\gamma\gamma')W(n+1), \end{cases}$$

oder die Differenzengleichung

$$(20.)\quad \begin{cases} (n+2-\beta)(n+2-\beta')\Delta^2 W(n)+\gamma\gamma' W(n) \\ +(n(1+\gamma+\gamma')+\gamma\gamma'+(2-\beta)(2-\beta')-(\alpha+1)(\alpha'+1))\Delta W(n) = 0. \end{cases}$$

Nun liefert die allgemeine Theorie der Differenzengleichungen den Satz:

IX. *Eine Function W der complexen Veränderlichen n ist durch die Eigenschaften* I, II, III, IV, V, VI *bis auf zwei willkürliche periodische Functionen, von denen sie selbst eine lineare homogene Function ist, völlig bestimmt.*

Die angewandte Methode zeigt übrigens, dass man im Grunde zur Definition der Function nur dreier Paare der unter IV. aufgestellten Zweige bedarf.

Wir suchen nun im folgenden Artikel zu Darstellungen der so definirten Function zu gelangen.

Artikel 3. Darstellung der Function W durch Reihen.

Nach der Methode der unbestimmten Coefficienten lässt sich eine Lösung der Recursionsformel (19.) nach Π-Functionen mit um Eins steigenden oder fallenden Argumenten in eine unendliche Reihe von der Form

$$\Sigma_{(\mu)} a_\mu \Pi(n+\mu-1):\Pi(n+\lambda)$$

entwickeln. Einfachste*) Resultate ergeben sich, wenn man $\lambda = -\beta$ oder $\lambda = -\beta'$ setzt. Für $\lambda = -\beta$ erhalten wir nämlich durch Einsetzen der genannten Reihe in die Gleichung (19.) die Bedingung

$$\Sigma_{(\mu)} \frac{a_\mu}{\Pi(n+1-\beta)} \left\{ \begin{array}{l} \Pi(n+\mu-1)(n+2-\beta') \\ +\Pi(n+\mu-1)(n+\alpha+1)(n+\alpha'+1)(n+1-\beta) \\ -\Pi(n+\mu)(2nn+(6+\alpha+\alpha'-\beta-\beta')n \\ +(\alpha+1)(\alpha'+1)+(2-\beta)(2-\beta')-\gamma\gamma') \end{array} \right\}$$

$$= \Sigma_{(\mu)} \frac{a_\mu}{\Pi(n+1-\beta)} \left\{ \begin{array}{l} \Pi(n+\mu)((\gamma-1)(\gamma'-1)-(1+\alpha+\alpha'+\beta')\beta \\ -\mu(1+\alpha+\alpha'+\beta'-\beta)+\mu\mu) \\ -\Pi(n+\mu-1)(\mu+\beta-1)(\mu-\alpha-1)(\mu-\alpha'-1) \end{array} \right\}$$

$$= \Sigma_{(\mu)} \frac{a_\mu}{\Pi(n+1-\beta)} \left\{ \begin{array}{l} \Pi(n+\mu)(\mu+\beta+\gamma-1)(\mu+\beta+\gamma'-1) \\ -\Pi(n+\mu-1)(\mu+\beta-1)(\mu-\alpha-1)(\mu-\alpha'-1) \end{array} \right\} = 0^{**}).$$

Setzt man hierin den Coefficienten von $\Pi(n+\mu)$ der Null gleich, so ergiebt sich daraus für a_μ die Recursionsformel erster Ordnung

$$(21.)\quad a_{\mu+1}(\mu+\beta)(\mu-\alpha)(\mu-\alpha') = a_\mu(\mu+\beta+\gamma-1)(\mu+\beta+\gamma'-1),$$

welche durch die Gleichung

$$(22.)\quad a_\mu = \frac{\Pi(\mu+\beta+\gamma-2)\Pi(\mu+\beta+\gamma'-2)}{\Pi(\mu+\beta-1)\Pi(\mu-\alpha-1)\Pi(\mu-\alpha'-1)}$$

oder

$$(22^a.)\quad a_\mu = \frac{\Pi(\alpha-\mu)\Pi(\alpha'-\mu)}{\Pi(\mu+\beta-1)\Pi(1-\beta-\gamma-\mu)\Pi(1-\beta-\gamma'-\mu)}.$$

völlig integrirt wird, wenn noch ein in μ periodischer sonst willkürlicher Factor diesen Lösungen zugefügt wird, der übrigens hier, wo für μ nur um ganze Zahlen verschiedene Werthe gesetzt werden, constant ist.

Ist μ' das kleinste vorkommende μ der Reihe, so muss $a_{\mu'-1}$ Null sein, was in der Lösung (22.) dadurch erreicht wird, dass man $-\beta+1$, oder $\alpha+1$ oder $\alpha'+1$ für μ setzt. Diese Anfangswerthe für μ liefern drei verschiedene Reihen, welche für $W(n)$ gesetzt werden können. Vertauscht man noch in der ersten β mit β', so erhält man folgende vier Reihen, in denen die Summen über alle ganzzahligen m von 0 bis ∞ zu erstrecken sind:

---

*) Wenn man eine Differentialgleichung durch Reihen integrirt, die nach Potenzen von $x-a$ fortschreiten, so wird für diejenigen Werthe von a, für welche der Coefficient der höchsten Differentialquotienten verschwindet, die Integration am einfachsten. Aehnlich verhält es sich mit λ.

**) Man vergleiche mein Programm „Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet." Halle bei L. Nebert 1875 Seite 7. Um von der dort gewählten Bezeichnung zu der hier angewandten überzugehen, braucht man nur $\beta'=0$ und $\alpha+1$, $\alpha'+1$ für α, α' zu setzen.

$$(23.)\quad \Sigma\frac{\Pi(m+n-\beta)\Pi(m+\gamma-1)\Pi(m+\gamma'-1)}{\Pi(n-\beta)\Pi(m)\Pi(m-\alpha-\beta)\Pi(m-\alpha'-\beta)},$$

$$(24.)\quad \Sigma\frac{\Pi(m+n-\beta')\Pi(m+\gamma-1)\Pi(m+\gamma'-1)}{\Pi(n-\beta')\Pi(m)\Pi(m-\alpha-\beta')\Pi(m-\alpha'-\beta')},$$

$$(25.)\quad \Sigma\frac{\Pi(m+n+\alpha)\Pi(m+\alpha+\beta+\gamma-1)\Pi(m+\alpha+\beta+\gamma'-1)}{\Pi(n-\beta)\Pi(m)\Pi(m+\alpha-\alpha')\Pi(m+\alpha+\beta)},$$

$$(26.)\quad \Sigma\frac{\Pi(m+n+\alpha')\Pi(m+\alpha'+\beta+\gamma-1)\Pi(m+\alpha'+\beta+\gamma'-1)}{\Pi(n-\beta)\Pi(m)\Pi(m+\alpha'-\alpha)\Pi(m+\alpha'+\beta)}.$$

Ist aber μ' das grösste vorkommende μ, so muss $a_{\mu'+1}$ verschwinden. Dies geschieht, wenn man für a_μ die Formel (22^a.) nimmt, dadurch, dass man μ' entweder $1-\beta-\gamma$ oder $1-\beta-\gamma'$ gleich setzt. Daraus ergeben sich zur Darstellung von $W(n)$ die beiden neuen Reihen

$$(27.)\quad (-1)^n\Sigma\frac{\Pi(m+\alpha+\beta+\gamma-1)\Pi(m+\alpha'+\beta+\gamma-1)\Pi(m+\gamma-1)}{\Pi(n-\beta)\Pi(m)\Pi(m+\gamma-\gamma')\Pi(m+\beta+\gamma-n-1)},$$

$$(28.)\quad (-1)^n\Sigma\frac{\Pi(m+\alpha+\beta+\gamma'-1)\Pi(m+\alpha'+\beta+\gamma'-1)\Pi(m+\gamma'-1)}{\Pi(n-\beta)\Pi(m)\Pi(m+\gamma'-\gamma)\Pi(m+\beta+\gamma'-n-1)}.$$

Setzen wir nun ferner in der Recursionsformel (19.) $-n-2$ an die Stelle von n; $\beta-1$, $\beta'-1$ an die Stelle von α, α' und $\alpha+1$, $\alpha'+1$ an die Stelle von β, β', so erhalten wir die nämliche Recursionsformel wieder, was auch aus der Gleichung (16.) zu folgern wäre. Die aufgestellten sechs Reihen liefern durch die hieraus fliessende Substitution sechs neue Reihen, die für W gesetzt werden können. Diese zwölf Reihen entsprechen den zwölf verschiedenen Zweigen*), wie sie unter IV definirt wurden, was in den drei nächstfolgenden Artikeln ausführlich nachgewiesen werden wird.

Artikel 4. Discussion der Zweige W_-^β, $W_-^{\beta'}$, W_+^α, $W_+^{\alpha'}$.

Die Reihe (24.) schreibt sich in der am Anfang dieser Abhandlung eingeführten Bezeichnung mit Fortlassung constanter Factoren in der Form

$$F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta', & \alpha'+\beta' \\ \gamma, & \gamma', & n-\beta'+1\end{pmatrix}$$

und bleibt ungeändert, wenn man α mit α', oder γ mit γ' vertauscht. Wenden wir auf diese Reihe die Transformationen (11.) und (12.), indem wir dabei die Elemente mit einander vertauschen, bei denen die Natur der Reihe die

*) Der Name „Zweig" ist im Grunde unzulässig bei einer einändrigen Function, und es wäre correcter zu sagen, „Darstellungselement." Allein wegen der Analogie mit der *Gauss*schen und *Heine*schen Reihe mag das Wort hier beibehalten werden. Eigenthümlich ist es, dass man durch einen einfachen Grenzübergang die einändrige Function W in die mehrändrige *Riemann*sche Function P verwandeln kann. Das einfachste Beispiel dieser Art ist ($\lim h=\infty$)

$$\lim h^\beta\Pi(xh+\alpha):h^\alpha\Pi(xh+\beta) = x^{\alpha-\beta}.$$

Vertauschung zulässt, so oft an, bis wir auf keine neuen Formen mehr kommen, so gelangen wir zu folgenden zehn einander gleichen, aber formal, und in Bezug auf ihre Convergenzgebiete verschiedenen Ausdrücken

$$
\text{(29.)}\quad \left|\begin{array}{l}
F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta', & \alpha'+\beta' \\ \gamma, & \gamma', & n-\beta'+1 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(\beta-\beta')\Pi(-\alpha'-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta', & \beta'-\beta \\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma', & n-\beta'+1 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(\beta-\beta')\Pi(-\alpha-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta', & \beta'-\beta \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & n-\beta'+1 \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(n-\beta')\Pi(\beta+\gamma-n-1)\Pi(\beta+\gamma'-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & n+1-\beta-\gamma, & n+1-\beta-\gamma' \\ \beta-n, & -\alpha-n, & -\alpha'-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(\beta+\gamma-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta', & n+1-\beta-\gamma \\ \gamma, & \alpha'+\beta+\gamma, & -\alpha-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(\beta+\gamma'-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta', & n+1-\beta-\gamma' \\ \gamma', & \alpha'+\beta+\gamma', & -\alpha-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(\beta+\gamma-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta', & n+1-\beta-\gamma \\ \gamma, & \alpha+\beta+\gamma, & -\alpha'-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(\beta+\gamma'-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta', & n+1-\beta-\gamma' \\ \gamma', & \alpha+\beta+\gamma', & -\alpha'-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\beta')\Pi(\beta+\gamma'-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \beta'-\beta, & n+1-\beta-\gamma' \\ \alpha'+\beta+\gamma', & \alpha+\beta+\gamma', & \beta-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(\gamma'-1)\Pi(\beta-\beta')\Pi(\beta+\gamma-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \beta'-\beta, & n+1-\beta-\gamma \\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma, & \beta-n \end{pmatrix}.
\end{array}\right.
$$

Die Convergenz dieser Reihen hängt nur von den reellen Theilen der Parameter und des Argumentes ab, und die Convergenzbedingungen dieser zehn Reihen sind bez.

$R(n-\beta)<0$, $R(n+\alpha')<0$, $R(n+\alpha)<0$, $R(\beta'-n-1)<0$, $R(\alpha+\beta+\gamma')>0$, $R(\alpha+\beta+\gamma)>0$, $R(\alpha'+\beta+\gamma')>0$, $R(\alpha'+\beta+\gamma)>0$, $R(\gamma)>0$, $R(\gamma')>0$.

Um den durch diese zehn Reihen dargestellten Zweig zu discutiren, bemerken wir, dass die Recursionsformel (19.) unmittelbar lehrt, dass eine Function $W(n)$ nur in den einfachen oder den conjugirten Folgen der Punkte α, α', $-\beta$, $-\beta'$ unendlich gross werden kann, wenn sie nicht in einer completen Folge unendlich wird, was beliebig oft statthaben kann. Aus denjenigen Reihen, deren Convergenz von n unabhängig ist, erkennt man leicht, wo der dargestellte Zweig unendlich wird. Er wird nämlich einzig und allein in der $-\beta$ conjugirten Punktfolge unendlich gross, und ist daher durch

$$W^{\beta}_{-}(n),$$

zu bezeichnen.

Für $n=-\alpha$, $n=-\alpha'$ hat man

$$W_-^{\beta}(-\alpha)=\frac{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')},$$

$$W_-^{\beta}(-\alpha')=\frac{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(\alpha'+\beta-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\,\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')}.$$

Ferner hat man die Gleichungen

$$W_-^{\beta}(\beta'-1)=1,\quad \lim_{n=\beta}\frac{W_-^{\beta}(n)}{\Pi(\beta-n-1)}=\frac{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')}{\Pi(\beta-\beta')\,\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma'-1)}.$$

$W_-^{\beta}(n)$ verschwindet in der Punktfolge $-\beta'$ *nicht.* Ebenso wenig in den Folgen α, α' oder den ihnen conjugirten. Unter der Voraussetzung $R(\gamma) < R(\gamma')$ ergiebt sich der Grenzwerth

$$\lim_{n=-\infty}(-n)^{\gamma}\,W_-^{\beta}(n)=\frac{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(\gamma'-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)}.$$

Die zehn Reihen, welche den Zweig $W_-^{\beta'}(n)$ darstellen, brauchen nicht besonders aufgeschrieben zu werden, weil sie aus den Formen (29.) dadurch erhalten werden, dass man darin β mit β' vertauscht.

Wenden wir aber die Gleichung (16.) auf die Formen (29.) an, so erhalten wir die zehn neuen einander gleichen, formal verschiedenen Ausdrücke, welche für $W(n)$ in der Recursionsformel (19.) eingesetzt werden können:

$$(30.)\quad\left\{\begin{aligned}
&F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta, & \alpha'+\beta' \\ \gamma, & \gamma', & -\alpha'-n\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(n-\beta')}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta, & \alpha'-\alpha \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(n-\beta)}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta', & \alpha'-\alpha \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & -\alpha'-n\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(-\alpha'-n-1)\,\Pi(\alpha+\gamma+n)\,\Pi(\alpha+\gamma'+n)}\,F\begin{pmatrix}0, & -\alpha-\gamma-n, & -\alpha-\gamma'-n \\ n+\alpha+1, & n-\beta+1, & n-\beta'+1\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\,\Pi(n+\alpha+\gamma)}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta, & -\alpha-\gamma-n \\ \gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & n-\beta+1\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\,\Pi(n+\alpha+\gamma')}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta, & -\alpha-\gamma'-n \\ \gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & n-\beta+1\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\,\Pi(n+\alpha+\gamma)}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta', & -\alpha-\gamma-n \\ \gamma, & \alpha+\beta+\gamma, & n-\beta'+1\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\,\Pi(n+\alpha+\gamma')}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta', & -\alpha-\gamma'-n \\ \gamma', & \alpha+\beta+\gamma', & n-\beta'+1\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha+\gamma'+n)}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & n+\alpha+1\end{pmatrix},\\
&\frac{\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(n+\alpha)}{\Pi(\gamma'-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha+\gamma+n)}\,F\begin{pmatrix}0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\gamma-n \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & n+\alpha+1\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Reihen convergiren bez. so lange, als

$$R(\alpha-n-1)<0, R(\beta'-n-1)<0, R(\beta-n-1)<0, R(n+\alpha')<0, R(\alpha+\beta+\gamma')>0,$$
$$R(\alpha+\beta+\gamma)>0, R(\alpha+\beta'+\gamma')>0, R(\alpha+\beta'+\gamma)>0, R(\gamma)>0, R(\gamma')>0$$

ist. Es werden dieselben einzig und allein in den Punkten der Folge α unendlich gross und sind sonst für endliche Werthe endlich. Der durch sie dargestellte Zweig ist durch

$$W_{+}^{\alpha}(n)$$

zu bezeichnen, da auch noch unter der Voraussetzung $R(\gamma)<R(\gamma')$

$$\lim_{n=+\infty} n^{\gamma} W_{+}^{\alpha}(n) = \frac{\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(\gamma'-1)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)}$$

ist.

Die Ausdrücke für den Zweig $W_{+}^{\alpha'}(n)$ hinzuschreiben ist nicht nöthig, weil sie aus den vorstehenden durch Vertauschung von α mit α' erhalten werden.

Artikel 5. Discussion der Zweige W_{-}^{α}, $W_{-}^{\alpha'}$, W_{+}^{β}, $W_{+}^{\beta'}$.

Nun untersuchen wir die Reihe (25.). Dabei richten wir den noch willkürlichen periodischen Factor so ein, dass die Symmetrie gewahrt wird. Wir erhalten dann die zehn einander gleichen, in der Form verschiedenen Ausdrücke

$$(31.)\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{\Pi(-\gamma)(\Pi-\gamma')\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha')\Pi(\alpha+\beta)\Pi(-\alpha-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\beta \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha')\Pi(\alpha+\beta')\Pi(-\alpha-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\beta' \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha+\beta)\Pi(\alpha+\beta')\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta, & -\alpha-\beta' \\ 1-\gamma, & 1-\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(n+\alpha)\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma-n)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\gamma+n, & \alpha'+\gamma'+n \\ -\alpha'-n, & \beta-n, & \beta'-n \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma')}{\Pi(\alpha-\alpha')} \frac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & \alpha'+\gamma'+n \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & -\alpha'-n \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha-\alpha')\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & \alpha'+\gamma+n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma')\Pi(-\gamma)\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha+\beta)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta, & \alpha'+\gamma'+n \\ \alpha+\beta+\gamma, & 1-\gamma', & \beta-n \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha+\beta)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma-n)} F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta, & \alpha'+\gamma+n \\ \alpha+\beta+\gamma', & 1-\gamma, & \beta-n \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha+\beta')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta', & \alpha'+\gamma'+n \\ \alpha+\beta'+\gamma, & 1-\gamma', & \beta'-n \end{pmatrix}, \\
\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\alpha+\beta')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma-n)} F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta', & \alpha'+\gamma+n \\ \alpha+\beta'+\gamma', & 1-\gamma, & \beta'-n \end{pmatrix}.
\end{array}\right.$$

Diese Reihen convergiren, so lange bez.
$R(n-\beta'-1)<0$, $R(n-\beta-1)<0$, $R(n+\alpha')<0$, $R(-n-\alpha-1)<0$, $R(\gamma-1)<0$, $R(\gamma'-1)<0$, $R(\alpha+\beta'+\gamma')>0$, $R(\alpha+\beta'+\gamma)>0$, $R(\alpha+\beta+\gamma')>0$, $R(\alpha+\beta+\gamma)>0$ ist. Sie verschwinden in der α conjugirten Punktfolge und werden in den $-\beta$, $-\beta'$ conjugirten Punktfolgen unendlich gross erster Ordnung, und bleiben sonst endlich für endliche n. Für $n=-\alpha$ erhalten sie den Werth

$$\Pi(\beta+\alpha'+1)\,\Pi(\beta'+\alpha'-1) : \Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha'-\alpha-1).$$

Der durch sie dargestellte Zweig ist nach den früher gemachten Festsetzungen mit

$$W^{\alpha}_{-}(n)$$

zu bezeichnen, da unter der Voraussetzung $R(\gamma)<R(\gamma')$ auch noch

$$\lim_{n=-\infty} (-n)^{\gamma}\, W^{\alpha}_{-}(n) = \frac{\Pi(-\gamma')\,\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}$$

sich ergiebt.

Die Reihen für $W^{\alpha'}_{-}(n)$ hinzuschreiben ist nicht nöthig, weil sie aus den vorstehenden durch Vertauschung von α mit α' unmittelbar hervorgehen.

Wenden wir aber auf diese Ausdrücke die Gleichung (16.) an, so erhalten wir folgende zehn neue, einander gleiche, nur in der Form verschiedene Ausdrücke für $W(n)$

$$32.)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)}{\Pi(\beta-\beta')\Pi(\alpha+\beta)\Pi(n-\beta)}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & \beta'-\beta, & -\alpha-\beta\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \beta-n\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\beta-\beta')\Pi(\alpha'+\beta)\Pi(n-\beta)}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & \beta'-\beta, & -\alpha'-\beta\\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma', & \beta-n\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha+\beta)\Pi(\alpha'+\beta)\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta')}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & -\alpha-\beta, & -\alpha'-\beta\\ 1-\gamma, & 1-\gamma', & \beta-n\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(n-\beta)\Pi(\beta-n-1)\Pi(n+1-\beta'-\gamma)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & \beta'+\gamma-n-1, & \beta'+\gamma'-n-1\\ n-\beta'+1, & n+\alpha+1, & n+\alpha'+1\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\beta-\beta')\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & \beta'-\beta, & \beta'+\gamma'-n-1\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma, & n-\beta'+1\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\beta-\beta')\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma)}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & \beta'-\beta, & \beta'+\gamma-n-1\\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha'+\beta+\gamma', & n-\beta'+1\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha+\beta)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & -\alpha-\beta, & \beta'+\gamma'-n-1\\ \alpha+\beta+\gamma, & 1-\gamma', & n+\alpha+1\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha+\beta)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma)}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & -\alpha-\beta, & \beta'+\gamma-n-1\\ \alpha+\beta+\gamma', & 1-\gamma, & n+\alpha+1\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha'+\beta)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & -\alpha'-\beta, & \beta'+\gamma'-n-1\\ \alpha'+\beta+\gamma, & 1-\gamma', & n+\alpha'+1\end{array}\right),\\
&\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha'+\beta)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma)}\,F\left(\begin{array}{ccc}0, & -\alpha'-\beta, & \beta'+\gamma-n-1\\ \alpha'+\beta+\gamma', & 1-\gamma, & n+\alpha'+1\end{array}\right),
\end{aligned}\right.$$

Diese Reihen convergiren, so lange bez.

$R(\alpha'+n+1)>0, R(\alpha+n+1)>0, R(\beta'-n-1)<0, R(n-\beta)<0, R(\gamma-1)<0,$
$R(\gamma'-1)<0, R(\alpha'+\beta+\gamma')>0, R(\alpha'+\beta+\gamma)>0, R(\alpha+\beta+\gamma')>0, R(\alpha+\beta+\gamma)>0$

ist. Es werden aber diese Ausdrücke in den Punktfolgen α, α' unendlich gross erster Ordnung und verschwinden in der Folge $-\beta$. Der durch sie dargestellte Zweig ist daher durch

$$W_+^\beta(n)$$

zu bezeichnen, da auch noch unter der Voraussetzung $R(\gamma)<R(\gamma')$

$$\lim_{n=+\infty}(n)^\gamma W_+^\beta(n) = \frac{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}$$

ist. Die Reihen für den Zweig $W_+^{\beta'}(n)$ erhält man aus den vorstehenden, wenn man überall β mit β' vertauscht, weshalb ihre Aufstellung unterbleibt.

Artikel 6. Die Zweige W_+^γ, $W_+^{\gamma'}$, W_-^γ, $W_-^{\gamma'}$.

Nun betrachten wir die Reihe (27.) und erhalten aus ihr durch Multiplication mit einem periodischen Factor die zehn einander gleichen Ausdrücke

$$(33.)\quad \begin{cases}
\dfrac{\Pi(\beta-n-1)}{\Pi(\beta+\gamma-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \gamma'-\gamma, & n+1-\beta-\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma, & \gamma \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\beta'+\gamma-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & \gamma'-\gamma, & n+1-\beta'-\gamma \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma, & \gamma \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \gamma'-\gamma, & \alpha'+\gamma'+n \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & 1-\gamma' \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha'-n-1)\Pi(-\alpha-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \gamma'-\gamma, & \alpha+\gamma'+n \\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma, & 1-\gamma' \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(\beta+\gamma-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\gamma'+n, & n+1-\beta-\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma, & -\alpha'-n, & \beta-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(\beta'+\gamma-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\gamma'+n, & n+1-\beta'-\gamma \\ \alpha+\beta'+\gamma, & -\alpha'-n, & \beta'-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(\beta+\gamma-n-1)\Pi(-\alpha-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\gamma'+n, & n+1-\beta-\gamma \\ \alpha'+\beta+\gamma, & -\alpha-n, & \beta-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(\beta'+\gamma-n-1)\Pi(-\alpha-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\gamma'+n, & n+1-\beta'-\gamma \\ \alpha'+\beta'+\gamma, & -\alpha-n, & \beta'-n \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(-\gamma')\Pi(\beta+\gamma-n-1)\Pi(\beta'+\gamma-n-1)} F\begin{pmatrix} 0, & n+1-\beta-\gamma, & n+1-\beta'-\gamma \\ \gamma, & -n-\alpha, & -n-\alpha' \end{pmatrix}, \\[2ex]
\dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha-\gamma'-n)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\gamma'+n, & \alpha'+\gamma'+n \\ 1-\gamma', & \beta-n, & \beta'-n \end{pmatrix}.
\end{cases}$$

Diese Reihen convergiren, so lange bez.

$R(n-\beta')<0,\ R(n-\beta)<0,\ R(n+\alpha)<0,\ R(n+\alpha')<0,\ R(\alpha'+\beta'+\gamma)>0,$
$R(\alpha'+\beta+\gamma)>0,\ R(\alpha+\beta'+\gamma)>0,\ R(\alpha+\beta+\gamma)>0,\ R(1-\gamma')>0, R(\gamma)>0$

ist. Man erkennt leicht, dass diese Ausdrücke sich in die Form setzen lassen

$$n^{-\gamma}+Mn^{-\gamma-1}+Nn^{-\gamma-2},$$

worin M eine Constante ist, und N sich einer Constanten nähert, wenn der reelle Theil von n negativ über alle Grenzen wächst. Daher ist der Zweig, den diese Ausdrücke darstellen, mit

$$W^{\gamma}_{-}(n)$$

zu bezeichnen. Man erhält daraus den Zweig $W^{\gamma'}_{-}(n)$, wenn man überall γ und γ' mit einander vertauscht. Die Gleichung (16.) liefert hierzu noch die zehn neuen Ausdrücke

$$(34.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\Pi(n+\alpha)}{\Pi(\alpha+\gamma+n)}F\left(\begin{matrix}0, & \gamma'-\gamma, & -\alpha-\gamma-n\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & \gamma\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha'+\gamma+n)}F\left(\begin{matrix}0, & \gamma'-\gamma, & -\alpha'-\gamma-n\\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma, & \gamma\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(n-\beta)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \gamma'-\gamma, & \beta'+\gamma'-n-1\\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma, & 1-\gamma'\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(n-\beta')\Pi(n+1-\beta-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \gamma'-\gamma, & \beta+\gamma'-n-1\\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha'+\beta'+\gamma, & 1-\gamma'\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(\alpha+\gamma+n)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \beta'+\gamma'-n-1, & -\alpha-\gamma-n\\ \alpha+\beta+\gamma, & n-\beta'+1, & \alpha+n+1\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(\alpha'+\gamma+n)\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \beta'+\gamma'-n-1, & -\alpha'-\gamma-n\\ \alpha'+\beta+\gamma, & n-\beta'+1, & \alpha'+n+1\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(\alpha+\gamma+n)\Pi(n+1-\beta-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \beta+\gamma'-n-1, & -\alpha-\gamma-n\\ \alpha+\beta'+\gamma, & n-\beta+1, & \alpha+n+1\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(\alpha'+\gamma+n)\Pi(n+1-\beta-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \beta+\gamma'-n-1, & -\alpha'-\gamma-n\\ \alpha'+\beta'+\gamma, & n-\beta+1, & \alpha'+n+1\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(-\gamma')\Pi(\alpha+\gamma+n)\Pi(\alpha'+\gamma+n)}F\left(\begin{matrix}0, & -\alpha-\gamma-n, & -\alpha'-\gamma-n\\ \gamma, & n-\beta+1, & n-\beta'+1\end{matrix}\right),\\
&\frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\gamma-1)\Pi(n+1-\beta-\gamma')\Pi(n+1-\beta'-\gamma')}F\left(\begin{matrix}0, & \beta+\gamma'-n-1, & \beta'+\gamma'-n-1\\ \gamma, & \alpha+n+1, & \alpha'+n+1\end{matrix}\right).
\end{aligned}\right.$$

Diese Reihen convergiren, so lange bez.

$R(n+\alpha'+1)>0, R(n+\alpha+1)>0, R(n+1-\beta)>0, R(n+1-\beta')>0, R(\alpha'+\beta'+\gamma)>0,$
$R(\alpha+\beta'+\gamma)>0, R(\alpha'+\beta+\gamma)>0, R(\alpha+\beta+\gamma)>0, R(1-\gamma')>0, R(\gamma)>0$

ist. Es können diese Ausdrücke, wie man leicht sieht, in die Form ge-

bracht werden

$$n^{-\gamma}+Pn^{-\gamma-1}+Qn^{-\gamma-2},$$

worin P eine Constante ist, und Q sich einer Constanten nähert, wenn der reelle Theil von n positiv über alle Grenzen wächst. Der durch sie dargestellte Zweig ist daher mit

$$W_{+}^{\gamma}(n)$$

zu bezeichnen. Die Darstellungen von $W_{+}^{\gamma'}(n)$ erhält man durch Vertauschung von γ mit γ'.

Artikel 7. Zusammenhang der positiven Zweige unter sich, und der negativen Zweige unter sich.

Eine wesentliche Aufgabe der Untersuchung der die Gleichung (19.) befriedigenden Functionen ist die, den Zusammenhang der verschiedenen Lösungen unter einander nach dem Satze, dass zwischen je drei Zweigen eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten statt haben muss, aufzustellen. Wir beginnen mit der Formel

$$W_{-}^{\beta}(n) = (\bar{\beta},\bar{\gamma})W_{-}^{\gamma}(n)+(\bar{\beta},\bar{\gamma}')W_{-}^{\gamma'}(n).$$

Setzen wir hierin $n+m$ für n, so ändern sich dadurch die periodischen Functionen $(\bar{\beta},\bar{\gamma})$, $(\bar{\beta},\bar{\gamma}')$ gar nicht, wenn m eine positive oder negative ganze Zahl ist. Gehen wir sodann unter der augenblicklichen Voraussetzung $R(\gamma)<R(\gamma')$ mit der ganzen Zahl m zur Grenze $-\infty$ über, so erhalten wir sofort, da die Grenzwerthe $W_{-}^{\beta}(n+m)$, $W_{-}^{\gamma}(n+m)$, $W_{-}^{\gamma'}(n+m)$ bereit stehen, für $(\bar{\beta},\bar{\gamma})$ den Quotienten

$$\Pi(-\alpha-\beta)\,\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(\gamma'-\gamma-1):\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\,\Pi(\gamma'-1).$$

Da nun die linke Seite der Gleichung, die uns zu diesem Resultate führte, eine Vertauschung der Parameter γ, γ' zulässt, so muss sie auch die rechte zulassen. Daraus ergiebt sich $(\bar{\beta},\bar{\gamma}')$, und die Voraussetzung $R(\gamma)<R(\gamma')$ wird überflüssig. Wir erhalten so vermöge der Symmetrie das Gleichungssystem

$$(35.)\quad\begin{cases}(\bar{\beta},\bar{\gamma}) = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{(-\alpha-\beta'-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\,\Pi(\gamma'-1)},\\[2ex](\bar{\beta},\bar{\gamma}') = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\,\Pi(\gamma-1)},\\[2ex](\bar{\beta}',\bar{\gamma}) = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta)\,\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma'-1)},\\[2ex](\bar{\beta}',\bar{\gamma}') = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta)\,\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\,\Pi(\gamma-1)}.\end{cases}$$

woraus leicht die Determinante berechnet wird

$$(36.)\quad (\bar\beta,\bar\gamma)(\bar\beta',\bar\gamma')-(\bar\beta,\bar\gamma')(\bar\beta',\bar\gamma) = \frac{\Pi(-\alpha-\beta)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')}{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma'-1)(\gamma'-\gamma)\pi\operatorname{cosec}(\beta-\beta')\pi}.$$

Durch blosse Elimination findet man hieraus den Werth

$$(37.)\quad (\bar\gamma,\bar\beta) = \frac{\pi\operatorname{cosec}(\beta'-\beta)\pi\,\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')},$$

aus dem $(\bar\gamma,\bar\beta')$, $(\bar\gamma',\bar\beta)$, $(\bar\gamma',\bar\beta')$ erhalten werden, wenn man bez. β mit β', γ mit γ' und endlich sowohl β mit β' als auch γ mit γ' vertauscht.

Beachtet man, dass durch die Transformation (16.) W^β_- in W^α_+, W^γ_- in W^γ_+, $W^{\gamma'}_-$ in $W^{\gamma'}_+$ übergeht, so findet man mittelst dieser Transformation ohne alle weitere Rechnung das Gleichungssystem

$$(38.)\quad \begin{cases} (\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\gamma}) = \dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(\gamma'-1)}, \\ (\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\gamma}{}') = \dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(\gamma-1)}, \\ (\overset{+}{\alpha}{}',\overset{+}{\gamma}) = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(\gamma'-1)}, \\ (\overset{+}{\alpha}{}',\overset{+}{\gamma}{}') = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(\gamma-1)}, \end{cases}$$

mit der Determinante

$$(\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}{}',\overset{+}{\gamma}{}')-(\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\gamma}{}')(\overset{+}{\alpha}{}',\overset{+}{\gamma}) = \frac{\Pi(-\alpha-\beta)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')}{(\gamma'-\gamma)\pi\operatorname{cosec}(\alpha-\alpha')\pi\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma'-1)},$$

und somit

$$(39.)\quad (\overset{+}{\gamma},\overset{+}{\alpha}) = \frac{\pi\operatorname{cosec}(\alpha'-\alpha)\pi\,\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')},\quad \text{u. s. w.}$$

Weiter setzen wir die Gleichung an

$$W^\alpha_-(n) = (\bar\alpha,\bar\gamma)W^\gamma_-(n)+(\bar\alpha,\bar\gamma')W^{\gamma'}_-(n).$$

Schreiben wir nun wieder $n+m$ für n, so bleiben $(\bar\alpha,\bar\gamma)$, $(\bar\alpha,\bar\gamma')$ ungeändert, wenn m eine ganze positive oder negative Zahl ist. Gehen wir mit derselben zur Grenze $-\infty$ über, so erhalten wir die Coefficienten leicht, und zwar liefert die Symmetrie das System von Gleichungen

$$(40.)\quad \begin{cases} (\bar\alpha,\bar\gamma) = \dfrac{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}, \\ (\bar\alpha,\bar\gamma') = \dfrac{\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')}, \\ (\bar\alpha',\bar\gamma) = \dfrac{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)}, \\ (\bar\alpha',\bar\gamma') = \dfrac{\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')}, \end{cases}$$

mit der Determinante

$$(41.)\quad (\bar\alpha,\bar\gamma)(\bar\alpha',\bar\gamma')-(\bar\alpha',\bar\gamma)(\bar\alpha,\bar\gamma') = \Pi(-\gamma)\,\Pi(-\gamma'):(\gamma'-\gamma)\,\pi\,\mathrm{cosec}\,(\alpha-\alpha')\pi.$$

Hieraus folgt

$$(42.)\quad (\bar\gamma,\bar\alpha) = \frac{\Pi(\gamma-\gamma')\,\pi\,\mathrm{cosec}(\alpha'-\alpha)\pi}{\Pi(-\gamma')\,\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')},\quad \text{u. s. w.}$$

Die Gleichung (16.) liefert hieraus wieder die Systeme

$$(43.)\quad (\overset{+}{\beta},\overset{+}{\gamma}) = \frac{\Pi(-\gamma')\,\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)},\quad \text{u. s. w.}$$

$$(44.)\quad (\overset{+}{\gamma},\overset{+}{\beta}) = \frac{\Pi(\gamma-\gamma')\,\pi\,\mathrm{cosec}(\beta'-\beta)\pi}{\Pi(-\gamma')\,\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')},\quad \text{u. s. w.}$$

Stellt man die zu dem System (35.) gehörenden Gleichungen in **F**-Reihen auf, so findet sich unter ihnen in nur einfach abgeänderter Bezeichnung die folgende vor

$$(45.)\quad \begin{cases} F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \\ = \dfrac{\Pi(b''-b'-1)\,\Pi(a-a')\,\Pi(a-a'')\,\Pi(-a-b)}{\Pi(b'-b)\,\Pi(a+b''-1)\,\Pi(-a'-b')\,\Pi(-a''-b')}\cdot F_{b'}\begin{pmatrix} b, b', b'' \\ a, a', a'' \end{pmatrix} \\ + \dfrac{\Pi(b'-b''-1)\,\Pi(a-a')\,\Pi(a-a'')\,\Pi(-a-b)}{\Pi(b''-b)\,\Pi(a+b'-1)\,\Pi(-a'-b'')\,\Pi(-a''-b'')}\cdot F_{b''}\begin{pmatrix} b, b', b'' \\ a, a', a'' \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Bildet man sodann noch die beiden Gleichungen, welche hieraus **entstehen,** wenn man a mit a', und a mit a'' vertauscht, so kann man **aus ihnen** $F_{b'}$ und $F_{b''}$ eliminiren, und erhält als Resultat die Gleichung

$$(46.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi(a''-a-1)\,\Pi(a'-a-1)}{\Pi(-a-b)\,\Pi(-a-b')\,\Pi(-a-b'')}\,F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \\ + \dfrac{\Pi(a''-a'-1)\,\Pi(a-a'-1)}{\Pi(-a'-b)\,\Pi(-a'-b')\,\Pi(-a'-b'')}\,F_{a'}\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \\ + \dfrac{\Pi(a-a''-1)\,\Pi(a'-a''-1)}{\Pi(-a''-b)\,\Pi(-a''-b')\,\Pi(-a''-b'')}\,F_{a''}\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Macht man in dieser Gleichung die Rücksubstitution, indem man **bez. für**

$$a,\quad a',\quad a'',\quad b,\quad b',\quad b'',$$

wieder

$$-\beta,\quad \alpha,\quad \alpha',\quad n+1,\quad \beta+\gamma,\quad \beta+\gamma'$$

setzt, so fliesst daraus die Gleichung

$$(47.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi(\alpha+\beta-1)\,\Pi(\alpha'+\beta-1)}{\Pi(-\gamma)\,\Pi(-\gamma')\,\Pi(\beta-n-1)}\,F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta, & \alpha'+\beta \\ \gamma, & \gamma', & n-\beta+1 \end{pmatrix} \\ + \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta-1)\,\Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha-n-1)}\,F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & -\alpha-\beta \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+n+1 \end{pmatrix} \\ + \dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta-1)\,\Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\,\Pi(-\alpha'-n-1)}\,F\begin{pmatrix} 0, & \alpha-\alpha', & -\alpha'-\beta \\ \alpha'+\beta+\gamma, & \alpha'+\beta+\gamma', & \alpha'+n+1 \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Dies ist eine Gleichung zwischen den Zweigen $W^{\beta'}_{-}$, W^{α}_{-}, $W^{\alpha'}_{-}$, und sie liefert ein System von Coefficienten, von denen wir nur einen Repräsentanten hinschreiben, weil die übrigen durch Vertauschung von α mit α', von β mit β', und gleichzeitiger Vertauschung von α mit α' und β mit β' aus ihm erhalten werden, nämlich

$$(48.)\quad (\bar{\beta},\bar{\alpha}) = \frac{\pi\operatorname{cosec}(\alpha-\alpha')\pi\,.\,\pi\operatorname{cosec}(\alpha+\beta')\pi}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(\alpha+\beta'-1)\Pi(\alpha'+\beta'-1)},\ \text{u. s. w.}$$

Durch Elimination folgt

$$(48^a.)\quad (\bar{\alpha},\bar{\beta}) = \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi.\sin(\alpha+\beta')\pi\sin(\alpha'+\beta')\pi}{\sin\gamma\pi\sin\gamma'\pi\,\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')}\;\frac{\Pi(\alpha+\beta'-1)\Pi(\alpha'+\beta'-1)}{\sin(\beta'-\beta)\pi},$$

u. s. w.

Daraus liefert die Gleichung (16.) noch die Systeme

$$(49.)\quad (\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\beta}) = \frac{\pi\operatorname{cosec}(\beta-\beta')\pi\,.\,\pi\operatorname{cosec}(\alpha'+\beta)\pi}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(\alpha'+\beta-1)\Pi(\alpha'+\beta'-1)},\ \text{u. s. w.}$$

$$(49^a.)\quad (\overset{+}{\beta},\overset{+}{\alpha}) = \frac{\sin(\alpha+\beta)\pi\sin(\alpha'+\beta)\pi\sin(\alpha'+\beta')\pi\,\Pi(\alpha'+\beta-1)\Pi(\alpha'+\beta'-1)}{\sin\gamma\pi\sin\gamma'\pi\sin(\alpha'-\alpha)\pi\,\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')},\ \text{u. s. w.}$$

Damit ist der Zusammenhang sämmtlicher positiven Zweige unter sich und der negativen Zweige unter sich hergestellt. Wollte man Relationen zwischen drei Zweigen, die alle drei verschiedenen Paaren angehören, wie etwa zwischen W^{α}_{+}, W^{β}_{+}, W^{γ}_{+} aufstellen, so würde man dazu nur einer Elimination aus linearen Gleichungen bedürfen.

Artikel 8. Zusammenhang der positiven und negativen Zweige unter einander.

Die Relation

$$W^{\beta'}_{+} = (\overset{+}{\beta'},\overset{+}{\gamma})W^{\gamma}_{+} + (\overset{+}{\beta'},\overset{+}{\gamma'})W^{\gamma'}_{+},$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(-\gamma')\Pi(n+\alpha')}{\pi\operatorname{cosec}(\beta'-n)\pi\,\Pi(n+1-\beta-\gamma)\Pi(n+1-\beta-\gamma')}F_{n+1}\begin{pmatrix} n+1, & \beta+\gamma, & \beta+\gamma' \\ -\beta, & \alpha, & \alpha' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(n+\alpha+\gamma)}F\begin{pmatrix} 0, & \gamma'-\gamma, & -\alpha-\gamma-n \\ \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma, & \gamma \end{pmatrix}$$
$$+\frac{\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(\alpha+\gamma'+n)}F\begin{pmatrix} 0, & \gamma-\gamma', & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta+\gamma', & \alpha+\beta'+\gamma', & \gamma' \end{pmatrix},$$

liefert in veränderter Bezeichnung die Gleichung

$$(50.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin(a+a'+a''+b+b'+b''-1)\pi\,\Pi(a+b''-1)}{\pi\,\Pi(a-a')\Pi(a-a'')}F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Pi(a''-a'-1)}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a'-b')\Pi(-a'-b'')\Pi(a+a'+b+b'-1)}F_{a'}\begin{pmatrix} a', & a'', & 1-a-b-b' \\ b, & b', & 1-a'-a''-b'' \end{pmatrix} \\ &+\frac{\Pi(a'-a''-1)}{\Pi(-a''-b)\Pi(-a''-b')\Pi(-a''-b'')\Pi(a+a''+b+b'-1)}F_{a''}\begin{pmatrix} a', & a'', & 1-a-b-b' \\ b, & b', & 1-a'-a''-b'' \end{pmatrix}. \end{aligned}\right.$$

In dieser Gleichung kommt an derselben Stelle der F-Reihen b'' links positiv, rechts negativ vor. Man kann daher rechts den Grenzübergang $b'' = +\infty$ ausführen, und erhält so auf der linken Seite den Grenzübergang (13^a.), der hiernach unbedenklich ausführbar wird. Wir können also die Gleichung (13^a.) anstandslos anwenden, und erhalten so unter der Voraussetzung $R(\gamma) < R(\gamma')$, wenn m eine ganze Zahl ist, die Grenzwerthe

$$(51.)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{m=+\infty} m^\gamma W^\beta_-(n+m) \\ = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(\gamma'-1)} \dfrac{\sin(n-\beta-\gamma)\pi}{\sin(n-\beta)\pi}, \\ \lim\limits_{m=-\infty} (-m)^\gamma W^\beta_+(n+m) \\ = \dfrac{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)} \dfrac{\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta'-\gamma'-1)\pi}{\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi}. \end{array}\right.$$

$$(52.)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{m=+\infty} m^\gamma W^\alpha_-(n+m) \\ = \dfrac{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)} \dfrac{\sin(n+\alpha+1)\pi\sin(n+\alpha'+\gamma')\pi}{\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}, \\ \lim\limits_{m=-\infty} (-m^\gamma) W^\alpha_+(n+m) \\ = \dfrac{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(\gamma'-1)} \dfrac{\sin(n+\alpha+\gamma)\pi}{\sin(n+\alpha)\pi}. \end{array}\right.$$

Hieraus erhält man auch leicht die Grenzwerthe von W^γ_- in positiver und von W^γ_+ in negativer Richtung. Denn da

$$W^\gamma_+(n+m) = (\overset{+}{\gamma}, \overset{+}{\beta}) W^\beta_+(n+m) + (\overset{+}{\gamma}, \overset{+}{\beta'}) W^{\beta'}_+(n+m)$$

ist, so ergiebt sich, wenn $R(\gamma) < R(\gamma')$, und m ganz ist,

$$\lim_{m=-\infty} (-m)^\gamma W^\gamma_+(n+m)$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\cos(2n-\beta-\beta'-\gamma')\pi\sin(\gamma'-\gamma)\pi + \sin\gamma\pi\cos(\beta-\beta')\pi + \sin\gamma'\pi\cos(\alpha-\alpha')\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi},$$

und wenn $R(\gamma) > R(\gamma')$ ist,

$$\lim_{m=-\infty} (-m)^{\gamma'} W^\gamma_+(n+m)$$

$$= \frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma-\gamma'-1).\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha)\pi.\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha')\pi}{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')}.$$

Diese Grenzwerthe sind nun zugleich, und zwar unabhängig von der Gleichung $R(\gamma) \gtrless R(\gamma')$ die Coefficienten $(\overset{+}{\gamma}, \overset{-}{\gamma})$, $(\overset{+}{\gamma}, \overset{-}{\gamma'})$, und wir erhalten so das

System von Gleichungen

$$
(53.)\begin{cases}
(\overset{+}{\gamma},\overset{-}{\gamma}) = \frac{1}{2}\,\dfrac{\sin\gamma\pi\cos(\beta-\beta')\pi+\sin\gamma'\pi\cos(\alpha-\alpha')\pi+\cos(2n-\beta-\beta'-\gamma')\sin(\gamma'-\gamma)\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi}, \\[2ex]
(\overset{+}{\gamma},\overset{-}{\gamma'}) = \dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma-\gamma'-1).\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha)\pi.\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha')\pi}{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')}, \\[2ex]
(\overset{+}{\gamma'},\overset{-}{\gamma}) = \dfrac{\Pi(\gamma'-\gamma)\Pi(\gamma'-\gamma-1).\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha)\pi.\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha')\pi}{\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma'-1)\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}, \\[2ex]
(\overset{+}{\gamma'},\overset{-}{\gamma'}) = \frac{1}{2}\,\dfrac{\cos(\beta-\beta')\pi\sin\gamma'\pi+\cos(\alpha-\alpha')\pi\sin\gamma\pi+\cos(2n-\beta-\beta'-\gamma)\pi\sin(\gamma-\gamma')\pi}{\sin(\gamma-\gamma')\pi\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi},
\end{cases}
$$

woraus vermöge der Gleichung (16.) noch das System fliesst:

$$
(54.)\begin{cases}
(\overset{-}{\gamma},\overset{+}{\gamma}) = \frac{1}{2}\,\dfrac{\cos(\alpha-\alpha')\pi\sin\gamma\pi+\cos(\beta-\beta')\pi\sin\gamma'\pi+\cos(2n+\alpha+\alpha'+\gamma')\pi\sin(\gamma'-\gamma)\pi}{\sin(\gamma'-\gamma)\pi\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}, \\[2ex]
(\overset{-}{\gamma},\overset{+}{\gamma'}) = \dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma-\gamma'-1).\pi\operatorname{cosec}(n-\beta)\pi.\pi\operatorname{cosec}(n-\beta')\pi}{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')}, \\[2ex]
(\overset{-}{\gamma'},\overset{+}{\gamma}) = \dfrac{\Pi(\gamma'-\gamma)\Pi(\gamma'-\gamma-1).\pi\operatorname{cosec}(n-\beta)\pi.\pi\operatorname{cosec}(n-\beta')\pi}{\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma'-1)\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}, \\[2ex]
(\overset{-}{\gamma'},\overset{+}{\gamma'}) = \frac{1}{2}\,\dfrac{\cos(\alpha-\alpha')\pi\sin\gamma'\pi+\cos(\beta-\beta')\pi\sin\gamma\pi+\cos(2n+\alpha+\alpha'+\gamma)\pi\sin(\gamma-\gamma')\pi}{\sin(\gamma-\gamma')\pi\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}.
\end{cases}
$$

Machen wir in (50.) die Substitution bez.

$$-\beta,\quad \alpha,\quad \alpha',\quad n+1,\quad \beta+\gamma,\quad \beta+\gamma'$$

für

$$a\quad a'\quad a''\quad b\quad b'\quad b'',$$

so erhalten wir eine Relation zwischen den Zweigen $W_-^{\beta'}$, W_+^{α}, $W_+^{\alpha'}$, aus der wir ein System von Coefficienten ableiten, von welchen wir einen hersetzen;

$$(55.)\quad (\overset{-}{\beta},\overset{+}{\alpha}) = \frac{\Pi(-\alpha-\beta').\pi\operatorname{cosec}(\alpha'-\alpha)\pi.\pi\operatorname{cosec}(n-\beta+1)\pi}{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma').\pi\operatorname{cosec}(n+\alpha)\pi},$$

woraus $(\overset{-}{\beta},\overset{+}{\alpha'}),(\overset{-}{\beta'},\overset{+}{\alpha}),(\overset{-}{\beta'},\overset{+}{\alpha'})$ erhalten werden, wenn rechts die α, β ebenso wie links mit α',β' vertauscht werden. Die Gleichung (16.) liefert hieraus die Coefficienten

$$(56.)\quad (\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\beta}) = \frac{\Pi(\beta-\beta')\Pi(\beta'-\beta-1)\Pi(-\alpha'-\beta)\sin(n-\beta+1)\pi}{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\sin(n+\alpha)\pi},\quad \text{u. s. w.}$$

Setzen wir ferner die Gleichung an

$$W_+^{\alpha} = (\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})\,W_-^{\gamma} + (\overset{+}{\alpha'},\overset{-}{\gamma'})\,W_-^{\gamma'},$$

und machen einen Augenblick die Voraussetzung $R(\gamma)<R(\gamma')$, die jedoch wegen der Symmetrie sogleich wieder fallen gelassen werden kann, so er-

halten wir durch Grenzübergang

$$(57.)\quad (\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}) = \frac{\Pi(\gamma'-\gamma-1)\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')}{\Pi(\gamma'-1)\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}\cdot\frac{\sin(n+\alpha+\gamma)\pi}{\sin(n+\alpha)\pi},$$

woraus $(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')$, $(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})$, $(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')$ durch Buchstabenvertauschung erhalten werden. Die Determinante dieser Coefficienten ist

$$(58.)\quad \begin{cases} (\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}) \\ = \dfrac{\Pi(-\alpha-\beta)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')}{(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma'-1)\Pi(\gamma-1)\pi\operatorname{cosec}(\alpha-\alpha')\pi}\cdot\dfrac{\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}{\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi}. \end{cases}$$

Endlich liefert die Gleichung (16.) noch den Coefficienten

$$(59.)\quad (\overset{-}{\beta},\overset{+}{\gamma}) = \frac{\Pi(\gamma'-\gamma-1)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')}{\Pi(\gamma'-1)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}\cdot\frac{\sin(n-\beta-\gamma)\pi}{\sin(n-\beta)\pi},$$

und durch Elimination findet man

$$(60.)\quad \begin{cases} (\overset{-}{\gamma},\overset{+}{\alpha}) = (\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}'):(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}') \\ = \dfrac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma'-1)\pi\operatorname{cosec}(\alpha-\alpha')\pi}{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')}\cdot\dfrac{\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha'+\gamma')\pi}{\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}. \end{cases}$$

$$(61.)\quad (\overset{+}{\gamma},\overset{-}{\beta}) = \frac{\Pi(\gamma-\gamma')\Pi(\gamma'-1)\pi\operatorname{cosec}(\beta-\beta')\pi}{\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')}\cdot\frac{\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta'-\gamma')\pi}{\sin(n+\alpha)\pi\sin(n+\alpha')\pi}.$$

u. s. w.

Was die Grössen $(\overset{-}{\alpha},\overset{+}{\alpha})$ u. s. w. anbetrifft, die complicirter ausfallen, d. h. von der Natur der oben schon erhaltenen Coefficienten $(\overset{+}{\gamma},\overset{-}{\gamma})$ u. s. w. sind, so mag es genügen, dieselben hier durch schon bekannte Grössen auszudrücken. Es ist nämlich

$$(62.)\quad \begin{cases} (\overset{-}{\alpha},\overset{+}{\alpha}) = \dfrac{(\overset{-}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{-}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})}{(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')}, \\[2ex] (\overset{-}{\alpha},\overset{+}{\alpha}') = \dfrac{(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{-}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')-(\overset{-}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')}{(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})}, \\[2ex] (\overset{-}{\alpha}',\overset{+}{\alpha}) = \dfrac{(\overset{-}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{-}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})}{(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})}, \\[2ex] (\overset{-}{\alpha}',\overset{+}{\alpha}') = \dfrac{(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{-}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{-}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')}{(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma}')-(\overset{+}{\alpha}',\overset{-}{\gamma})(\overset{+}{\alpha},\overset{-}{\gamma}')}. \end{cases}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen allen Zweigen der Function W erstellt, so dass die Relationen, welche sich nicht unmittelbar hier vorfinden, durch einfache Elimination zu erlangen sind.

Artikel 9. Asymptotische Werthe der F-Reihe.

Bei vielen Untersuchungen ist es von Nutzen, im Besitze der Werthe zu sein, welche eine Function annimmt, wenn ihre Parameter über alle Grenzen wachsen, oder zu wissen, wie sie sich asymptotisch verhält. Es sollen deshalb in diesem Artikel die Grenzen untersucht werden, welchen sich die Function

$$F\begin{pmatrix} 0, & a'-\varepsilon'\omega, & b''-\varepsilon''\omega \\ b+\eta\omega, & b'+\eta'\omega, & b''+\eta''\omega \end{pmatrix}$$

nähert, wenn ω positiv über alle Grenzen wächst, während $\varepsilon', \varepsilon'', \eta, \eta', \eta''$ die Werthe $0, +1, -1$ annehmen. Es würden sich auf diese Weise, wenn man alle Combinationen zuliesse, $3^5-1=242$ Formeln ergeben. Die Liste derselben würde sich zwar dadurch etwas vermindern, dass von solchen Formeln, die sich durch blosse Vertauschung der Parameter $a'\,a''$ unter einander, oder der Parameter b, b', b'' mit einander ergeben, nur ein Repräsentant aufgeschrieben würde. Andererseits würden sich aber diese Formeln wieder dadurch vermehren, dass einige von ihnen bei verschiedenen Verhältnissen der endlich bleibenden Parameter verschiedene Gestalt erhalten. Daher wollen wir nur diejenigen hier aufstellen, welche für uns die wichtigsten sind, und welche sich als unmittelbare Anwendung der bisher erzielten Resultate ergeben.

Von unmittelbarer Evidenz sind die Formeln

$$(63.)\quad \lim F\begin{pmatrix} 0, a', a''-\omega \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'-\omega, & a''-\omega \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} = \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'-\omega, & a''-\omega \\ b, & b', & b''\pm\omega \end{pmatrix} = 1,$$

weil sich die F-Reihen bei dem geforderten Grenzübergang auf ihr Anfangsglied zurückziehen.

Mit Hilfe der Formel (12.) findet man daher sogleich

$$(64.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'-\omega, & a''-\omega \\ b, & b'+\omega, & b''+\omega \end{pmatrix} \\ = \lim \dfrac{\Pi(\omega-a'')}{\Pi(\omega-b-a'')}\,\dfrac{\Pi(1-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(1-a'-a''-b'-b'')}\,F\begin{pmatrix} 0, & a'-\omega, & a'+a''+b+b''-1 \\ b, & 1-a'-b', & 1-a'-b'' \end{pmatrix} \\ = \lim \dfrac{\omega^b\,\Pi(1-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(1-a'-a''-b'-b'')}. \end{cases}$$

Will man in dem Ausdrucke $F\binom{0,\,a',\,a''-\omega}{b,\,b',\,b''+\omega}$ zur Grenze übergehen, so muss zunächst gefragt werden, ob die Reihe convergirt. Betrachtet man aber F als eine Function der complexen Veränderlichen a', a'', b, b', b'', so kann man die Function auch da, wo die sie darstellende Reihe nicht convergirt, als die stetige Fortsetzung aus Gebieten heraus, in denen sie convergirt, ansehen, und so immer nach dem Grenzwerthe fragen. Ist nun zuerst $R(b+b'+a'-1)<0$, so ergiebt noch die unmittelbare Ansicht der Reihe, weil sie sich nach dem Grenzübergang auf die *Gauss*sche reducirt, die Formel

$$(65.)\quad \lim F\binom{0,\,a',\,a''-\omega}{b,\,b',\,b''+\omega} = \frac{\Pi(-a')\Pi(-a'-b'-b)}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a'-b')}.$$

Ist aber $R(b+b'+a'-1)>0$, so müssen wir die F-Reihe zuerst mittels der Formel (12.) transformiren, und erhalten dann

$$(65^a.)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim F\binom{0,\,a',\,a''-\omega}{b,\,b',\,b''+\omega} \\ = \dfrac{\omega^{a'+b+b'-1}\Pi(-a')\Pi(2-a'-b-b')\Pi(1-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(-a''-b'')\Pi(b-1)\Pi(b'-1)}. \end{array}\right.$$

Ist $R(a'+b+b')<0$ so ist in *Gauss*' Bezeichnung

$$(66.)\quad \lim F\binom{0,\,a',\,a''-\omega}{b,\,b',\,b''-\omega} = F(b,\,b',\,1-a',\,-1).$$

Ebenso erhält man, wenn $R(a'+b+b'-1)<0$ ist,

$$(67.)\quad \lim F\binom{0,\,a',\,a''+\omega}{b,\,b',\,b''-\omega} = \frac{\Pi(-a')\Pi(-b-b'-a')}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a'-b')},$$

und wenn $R(a'+b+b'-1)>0$ ist,

$$(67^a.)\quad \left\{\begin{array}{l} \lim F\binom{0,\,a',\,a''+\omega}{b,\,b',\,b''-\omega} \\ = \lim \dfrac{\sin(\omega+a'+a''+b+b'-1)\pi}{\omega^{1-b-b'-a'}\sin(a''+\omega)\pi}\cdot\dfrac{\Pi(-a')\Pi(2-a'-b-b')\Pi(1-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(-a'-b'')\Pi(b-1)\Pi(b'-1)}. \end{array}\right.$$

Hieraus wurden unter (13.) und (13^a.) schon die beiden Gleichungen abgeleitet*):

$$(68.)\quad \lim F\binom{0,\,a',\,a''}{b,\,b',\,b''-\omega} = \lim \frac{\omega^{-b}\Pi(-a')\Pi(-a'')\Pi(b'-b-1)}{\Pi(b'-1)\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)},$$

*) Die Schreibweise, bei welcher das Zeichen lim angewendet wird, ohne dass ein bestimmter oder endlicher Grenzwerth vorhanden ist, kann getadelt werden. Sie ist hier der Bequemlichkeit halber benutzt, und ich glaube nicht, dass sie zu Irrthümern zu verleiten vermag.

$$(69.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, a', a'' \\ b, b', b''+\omega \end{pmatrix} \\ = \lim \dfrac{\omega^{-b}\sin(a'+a''+b'+b''+\omega)\pi}{\sin(a'+a''+b+b'+b''+\omega)\pi}\,\dfrac{\Pi(-a')\Pi(-a'')\Pi(b'-b-1)}{\Pi(-a'-b)\Pi(-a''-b)\Pi(b'-1)}, \end{cases}$$

wenn $R(b-b') < 0$ ist. Ist $R(b'-b) < 0$, so hat man b mit b' zu vertauschen. Durch Anwendung der Gleichung (11.) erhält man

$$(70.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'-\omega, & a''-\omega \\ b+\omega, & b'+\omega, & b''+\omega \end{pmatrix} \\ = \dfrac{\omega^{2-2a''-a'-b-b'-b''}\pi\operatorname{cosec}(\omega+a'+a''+b+b'+b''-1)\pi\,\Pi(a'-a''-1)}{\Pi(-a''-b)\Pi(-a''-b')\Pi(-a''-b'')}, \end{cases}$$

wenn $R(a'-a'') < 0$ ist. Ist $R(a'-a'') > 0$, so hat man a' mit a'' zu vertauschen. Ebenso ist

$$(71.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'+\omega, & a''+\omega \\ b-\omega, & b'-\omega, & b''-\omega \end{pmatrix} \\ = \lim \dfrac{\omega^{2-2a''-a'-b-b'-b''}\pi\operatorname{cosec}(\omega+a'+a''+b+b'+b'')\pi\operatorname{cosec}(\omega-b)\pi\,\Pi(a'-a''-1)}{\operatorname{cosec}(\omega+a')\pi\,\Pi(-a''-b)\Pi(-a''-b')\Pi(-a''-b'')}, \end{cases}$$

wenn $R(a'-a'') < 0$ ist. Ist $R(a'-a'') > 0$, so muss man a' mit a'' vertauschen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$g\begin{pmatrix} \gamma'-\gamma, & -\alpha-\gamma-n \\ \gamma, \alpha+\beta+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma \end{pmatrix} = \frac{\sin(n+\alpha)\pi}{\sin(n+\alpha+\gamma)\pi}\overset{+\;\;-}{(\gamma, \gamma)},$$

und machen in der unter (53.) im Artikel 8. gefundenen Formel

$$\gamma'-\gamma = a', \quad -\alpha-\gamma-n = a'', \quad \gamma = b, \quad \alpha+\beta+\gamma = b', \quad \alpha+\beta'+\gamma = b'',$$

so erhalten wir, wenn $R(a') > 0$ ist,

$$(72.)\quad \begin{cases} F\begin{pmatrix} 0, a', a''+\omega \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \\ = \lim \dfrac{\omega^{-a'}\pi\operatorname{cosec}(a'+a''+b+b'+b''+\omega-1)\pi\,\Pi(-a')\Pi(-a'-1)}{\Pi(-b-a')\Pi(-b'-a')\Pi(-b''-a')\Pi(b-1)\Pi(b'-1)\Pi(b''-1)}. \end{cases}$$

Ist aber $R(a') < 0$, so ist

$$(72^a.)\quad F\begin{pmatrix} 0, a', a''+\omega \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = \lim g\begin{pmatrix} a', a''+\omega \\ b, b', b'' \end{pmatrix}.$$

Dass in g die Elemente b, b', b'' mit einander vertauscht werden können, ist durch Umformung der trigonometrischen Ausdrücke leicht zu erweisen. Die Gleichung (12.) liefert die Beziehung

$$\lim F\begin{pmatrix} 0, a'+\omega, a''+\omega \\ b, b'-\omega, b''-\omega \end{pmatrix}$$

$$= \lim \frac{\Pi(-a''-\omega)\Pi(1-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(-b-a''-\omega)\Pi(1-a'-a''-b'-b'')}\,F\begin{pmatrix} 0, & a'+\omega, & a'+a''+b'+b''-1 \\ b, & 1-a'-b', & 1-a'-b'' \end{pmatrix},$$

und hieraus fliesst, wenn $R(a'+a''+b'+b''-1)>0$ ist, die Gleichung

$$(73.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'+\omega, & a''+\omega \\ b, & b'-\omega, & b''-\omega \end{pmatrix} \\ = \dfrac{\omega^{b-a'-a''-b'-b''+1}\,\pi \operatorname{cosec}(a''+\omega)\pi \,.\, \pi \operatorname{cosec}(a'+\omega)\pi \,.\, \Pi(-a'-a''-b'-b'')}{\Pi(b-1)\Pi(-a'-b')\Pi(-a'-b'')\Pi(-a''-b')\Pi(-a''-b'')}. \end{cases}$$

Für $R(a'+a''+b'+b''-1)<0$ wird die Formel etwas complicirter.

Einen für uns wichtigen Grenzwerth erhalten wir aus der Gleichung

$$W^{\gamma}_{+} = (\overset{+}{\gamma}, \overset{-}{\gamma}) W^{\gamma}_{-} + (\overset{+}{\gamma}, \overset{-}{\gamma'}) W^{\gamma'}_{-}.$$

Wir multipliciren dieselbe mit $\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma'):\Pi(\gamma-\gamma')$, und erhalten so die Gleichung

$$\frac{\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\alpha+\gamma+n)\Pi(n+1-\beta-\gamma')} F\begin{pmatrix} 0, & \beta+\gamma'-n-1, & -\alpha-\gamma-n \\ \alpha+\beta'+\gamma, & n-\beta+1, & \alpha+n+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(\overset{+}{\gamma}, \overset{-}{\gamma})\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\beta'+\gamma-n-1)\Pi(-\alpha'-\gamma'-n)} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\gamma'+n, & n+1-\beta'-\gamma \\ \alpha+\beta'+\gamma, & -\alpha'-n, & \beta'-n \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi \sin(\alpha'+\gamma+n)\pi \sin(n+1-\beta'-\gamma')\pi}{\sin(\gamma-\gamma')\pi \sin(n+\alpha)\pi \sin(n+\alpha')\pi} \frac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)\Pi(n+\alpha'+\gamma-1)\Pi(n-\beta'-\gamma)}{\Pi(-\gamma')\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')} G,$$

wenn zur augenblicklichen Abkürzung G für

$$F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\gamma+n, & n+1-\beta'-\gamma' \\ \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n, & \beta'-n \end{pmatrix}$$

geschrieben wird.

Setzen wir nun $\gamma'-\omega$ für γ', $\gamma+\omega$ für γ, so gehen die beiden F-Reihen in Eins über, während G uns die gesuchte Relation liefert, nämlich

$$G = F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\gamma+n+\omega, & n+1-\beta'-\gamma'+\omega \\ \alpha+\beta'+\gamma'-\omega, & -\alpha'-n, & \beta'-n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sin(\gamma-\gamma'+2\omega)\pi \sin(n+\alpha)\pi \sin(n+\alpha')\pi\, \omega^{-4n-\alpha-\alpha'-2+\beta+\beta'}}{\sin(\alpha+\beta'+\gamma+\omega)\pi \sin(\alpha'+\gamma+n+\omega)\pi \sin(n+1-\beta'-\gamma'+\omega)\pi} \cdot \frac{\Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\cos(2n-\beta-\beta'-\gamma'+\omega)\pi \sin(\gamma'-\gamma+2\omega)\pi + \sin(\gamma+\omega)\pi \cos(\beta-\beta')\pi + \sin(\gamma'-\omega)\pi \cos(\alpha-\alpha')\pi}{\sin(\alpha+\beta'+\gamma+\omega)\pi \sin(\alpha'+\gamma+n+\omega)\pi \sin(n+1-\beta'-\gamma'+\omega)\pi}.$$

Um die Formel in einer für unsere späteren Zwecke brauchbaren Form zu erhalten, ändern wir noch die Bezeichnung dahin ab, dass wir a' für $\alpha'+\gamma+n$, a'' für $n+1-\beta'-\gamma'$, b für $\alpha+\beta'+\gamma'$, b' für $-\alpha'-n$, b'' für $\beta'-n$ schreiben, woraus, wenn $R(b'+b''-a'-a''-2b)>0$ ist, die Formel fliesst

$$(74.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'+\omega, & a''+\omega \\ b-\omega, & b', & b'' \end{pmatrix} \\ = \dfrac{\sin(a'+a''+b'+b''+2\omega)\pi \sin(a''+b)\pi \sin b'\pi\, \Pi(a''+b-1)\Pi(-b')\,\omega^{b'+b''-a'-a''-2b}}{\sin(a'+a''+b+b'+b''+\omega)\pi \sin(a'+\omega)\pi \sin(a''+\omega)\pi\, \Pi(b''-1)\Pi(-a'-b)}, \end{cases}$$

und wenn $R(b'+b''-a'-a''-2b) < 0$ ist,

$$(74^a.)\quad \begin{cases} \lim F\begin{pmatrix} 0, & a'+\omega, & a''+\omega \\ b+\omega, & b', & b'' \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2}\,\frac{\cos(a'+a''+b+\omega)\pi\sin(a'+a''+b'+b''+2\omega)\pi+\sin(a'+b'+\omega)\cos(1-a'-b-b'')\pi+\sin(a''+b''+\omega)\pi\cos(1-a''-b-b')\pi}{\sin(a'+a''+b+b'+b''+\omega-1)\pi\sin(a'+\omega)\pi\sin(a''+\omega)\pi}. \end{cases}$$

Setzen wir noch in $(74^a.)$

$$a'=\alpha+\beta',\ a''=-\alpha'-\gamma'-n,\ b=\alpha'+\beta+\gamma',\ b'=\gamma',\ b''=n-\beta'+1,$$

so folgt, wenn $R(2n+1-\alpha-\alpha'-2\beta-2\beta') < 0$, und m eine *ganze* Zahl ist,

$$(74^b.)\quad \begin{cases} \lim\limits_{m=\infty} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha+\beta'+m, & m-\alpha'-\gamma'-n \\ \alpha'+\beta+\gamma'-m, & \gamma', & n-\beta'+1 \end{pmatrix} \\ = (-1)^{m+1}\frac{\sin(\alpha-\alpha')\pi\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi}{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\sin(\alpha+\beta')\pi\sin(\alpha'+\gamma'+n)\pi}\,\frac{\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)}{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma'-1)}\,m^{2n+\gamma+\gamma'-\beta-\beta'}. \end{cases}$$

Man kann mit den hier aufgestellten Formeln auch noch $F\begin{pmatrix} 0, & a'-\omega, & a''+\omega \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ ohne Schwierigkeiten berechnen. Wir begnügen uns mit der Andeutung des Calcüls. Wählt man zur Darstellung der Zweige der Function W in der Gleichung

$$W_+^\beta = (\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha})\, W^\alpha + (\overset{+}{\beta}, \overset{-}{\alpha'})\, W^{\alpha'}$$

bez. die F-Reihen

$$F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta, & -\alpha'-\beta \\ 1-\gamma, & 1-\gamma', & \beta-n \end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha-\beta, & -\alpha-\beta' \\ 1-\gamma, & 1-\gamma', & n+\alpha+1 \end{pmatrix},\ F\begin{pmatrix} 0, & -\alpha'-\beta, & -\alpha'-\beta' \\ 1-\gamma, & 1-\gamma', & \alpha'+n+1 \end{pmatrix}$$

und setzt man $\alpha'+\omega$ für α', $\alpha-\omega$ für α, so hat die erste Function die gesuchte Form, und die Grenzwerthe der beiden letzten sind bekannt, womit der Grenzwerth der ersten gefunden wird.

Artikel 10. Zusammenhang zwischen contiguen Functionen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{W}_+^\alpha$, $\mathfrak{W}_+^{\alpha'}$, $\mathfrak{W}_+^\beta$, $\mathfrak{W}_+^{\beta'}$, $\mathfrak{W}_+^\gamma$, $\mathfrak{W}_+^{\gamma'}$ oder kürzer mit Fortlassung des Index + mit $\mathfrak{W}^\alpha$, $\mathfrak{W}^{\alpha'}$, ... $\mathfrak{W}^{\gamma'}$ Grössen, welche sich von den für W_+^α, $W_+^{\alpha'}$, W_+^β, $W_+^{\beta'}$, W_+^γ, $W_+^{\gamma'}$ früher aufgestellten Reihen bez. durch constante noch nicht bestimmte Factoren w^α, $w^{\alpha'}$, w^β, $w^{\beta'}$, w^γ, $w^{\gamma'}$ unterscheiden. Ferner soll

$$\mathfrak{W}^\alpha = \alpha_\beta\, \mathfrak{W}^\beta + \alpha_{\beta'}\, \mathfrak{W}^{\beta'} = \alpha_\gamma\, \mathfrak{W}^\gamma + \alpha_{\gamma'}\, \mathfrak{W}^{\gamma'},$$
$$\mathfrak{W}^{\alpha'} = \alpha'_\beta\, \mathfrak{W}^\beta + \alpha'_{\beta'}\, \mathfrak{W}^{\beta'} = \alpha'_\gamma\, \mathfrak{W}^\gamma + \alpha'_{\gamma'}\, \mathfrak{W}^{\gamma'}$$

gesetzt werden. So erhalten wir mit Hilfe der Formeln des Artikels 7. die Verhältnisse

$$(75.)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} : \dfrac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} = \dfrac{(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\gamma})}{(\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\gamma})} : \dfrac{(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\beta})}{(\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\beta})} = -\dfrac{\sin(\alpha+\beta')\pi}{\sin(\alpha'+\beta')\pi}\,\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}, \\[2ex] \dfrac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} : \dfrac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}} = \dfrac{(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\gamma})}{(\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\gamma})} : \dfrac{(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\beta'})}{(\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\beta'})} = -\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{\sin(\alpha'+\beta)\pi}\,\dfrac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}. \end{cases}$$

Hieraus fliessen noch zwei Gleichungen, wenn man γ mit γ' vertauscht. Die Gleichheit der beiden sich aus diesen Beziehungen für jedes der beiden Verhältnisse

$$\frac{\alpha_\gamma}{\alpha_{\gamma'}} : \frac{\alpha'_\gamma}{\alpha'_{\gamma'}}, \quad \frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta} : \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha_{\beta'}}$$

ergebenden Werthe erhellt als eine unmittelbare Folge der Gleichung

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1.$$

Das erste dieser Verhältnisse rechnen wir aus und erhalten

$$(76.)\quad \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} : \frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}} = \frac{\alpha_\gamma . \alpha'_{\gamma'}}{\alpha_{\gamma'} . \alpha'_\gamma} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}\,\frac{\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}.$$

Demnach sind die vier Grössen $\alpha_\beta : \alpha'_\beta$, $\alpha_{\beta'} : \alpha'_{\beta'}$, $\alpha_\gamma : \alpha'_\gamma$, $\alpha_{\gamma'} : \alpha'_{\gamma'}$ durch eine von ihnen, z. B. durch $\alpha_\beta : \alpha'_\beta$ bestimmt, und die drei Grössen $\alpha'_{\beta'}$, α'_γ, $\alpha'_{\gamma'}$ durch die fünf Grössen α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$, welche von den Verhältnissen der willkürlichen Constanten in $\mathfrak{W}^\alpha$, $\mathfrak{W}^{\alpha'}$, ..., also den Grössen

$$w^\alpha : w^{\alpha'} : w^\beta : w^{\beta'} : w^\gamma : w^{\gamma'}$$

abhängen, und durch geeignete Bestimmung derselben jedwede Werthe annehmen können.

Sind nun in den Functionen

$$W = W\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \end{pmatrix}, n\Big), \quad W_1 = W\Big(\begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\ \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1 \end{matrix}, n\Big),$$

die entsprechenden Parameter um ganze Zahlen von einander verschieden, in welchem Falle sie contigue Functionen W heissen sollen, und ist $\bar{\alpha}$ die kleinere der Zahlen α, α_1; $\bar{\alpha}'$ die kleinere der Zahlen α', α'_1; $\bar{\beta}$ die kleinere der Zahlen β, β_1; $\bar{\beta}'$ die kleinere der Zahlen β', β'_1 und ebenso $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}'$ bez. die kleinere von γ, γ_1 und γ', γ'_1, so kann man die acht Grössen $(\alpha_\beta)_1$, $(\alpha'_\beta)_1$, $(\alpha'_{\beta'})_1$, ... bez. den acht Grössen α_β, α'_β, $\alpha'_{\beta'}$, ... gleich annehmen, weil die Gleichungen (75.) ungeändert bleiben, wenn die Parameter um ganze Zahlen abgeändert werden, und daher aus der Gleichheit der fünf willkürlichen die Gleichheit der übrigen folgt. Mithin ist

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{W}^{\alpha}, \mathfrak{W}^{\alpha'} \\ \mathfrak{W}_1^{\alpha}, \mathfrak{W}_1^{\alpha'} \end{vmatrix} \cdot \frac{\Pi(n-\bar\beta)\Pi(n-\bar\beta')}{\Pi(n+\bar\alpha)\Pi(n+\bar\alpha')} = \begin{vmatrix} \alpha_{\beta}, \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_{\beta}, \alpha'_{\beta'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{W}^{\beta}, \mathfrak{W}^{\beta'} \\ \mathfrak{W}_1^{\beta}, \mathfrak{W}_1^{\beta'} \end{vmatrix} \cdot \frac{\Pi(n-\bar\beta)\Pi(n-\bar\beta')}{\Pi(n+\bar\alpha)\Pi(n+\bar\alpha')}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{\gamma}, \alpha_{\gamma'} \\ \alpha'_{\gamma}, \alpha'_{\gamma'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{W}^{\gamma}, \mathfrak{W}^{\gamma'} \\ \mathfrak{W}_1^{\gamma}, \mathfrak{W}_1^{\gamma'} \end{vmatrix} \cdot \frac{n^{\bar\gamma+\bar\gamma'}\Pi(n-\bar\beta)\Pi(n-\bar\beta')}{\Pi(n+\bar\alpha)\Pi(n+\bar\alpha')} n^{\bar\alpha+\bar\alpha'+\bar\beta+\bar\beta'} . n^{-\bar\alpha-\bar\alpha'-\bar\beta-\bar\beta'-\bar\gamma-\bar\gamma'}$$

eine allenthalben einändrige und für endliche n endliche Function, die im Unendlichen periodisch ist, und deshalb bei jeder Art der Annäherung von n an Unendlich wie $n^{-\bar\alpha-\bar\alpha'-\bar\beta-\bar\beta'-\bar\gamma-\bar\gamma'}$ unendlich gross wird. Sind nun weiter

$$\mathfrak{W},\ \ \mathfrak{W}_1 = W\left(\begin{matrix}\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \\ \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1,\end{matrix}\ n\right),\ \mathfrak{W}_2 = W\left(\begin{matrix}\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \\ \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2,\end{matrix}\ n\right),$$

drei contigue Functionen, in denen die Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden, so fliesst aus der eben bewiesenen Beziehung mittels der identischen Gleichung

$$\mathfrak{W}^{\alpha}(\mathfrak{W}_1^{\alpha_1}\mathfrak{W}_2^{\alpha'_2} - \mathfrak{W}_1^{\alpha'_1}\mathfrak{W}_2^{\alpha_2})$$
$$+ \mathfrak{W}_1^{\alpha_1}(\mathfrak{W}_2^{\alpha_2}\mathfrak{W}^{\alpha'} - \mathfrak{W}^{\alpha}\mathfrak{W}_2^{\alpha'_2}) + \mathfrak{W}_2^{\alpha_2}(\mathfrak{W}^{\alpha}\mathfrak{W}_1^{\alpha'_1} - \mathfrak{W}^{\alpha'}\mathfrak{W}_1^{\alpha_1}) = 0$$

der wichtige Satz, dass zwischen ihren entsprechenden Zweigen eine lineare homogene Gleichung mit ganzen Coefficienten in n statt hat, und also

(77.) ***Es lassen sich sämmtliche W-Functionen, deren entsprechende Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden, durch zwei beliebige unter ihnen linear mit rationalen Functionen von n als Coefficienten ausdrücken.***

In diesem Satze kann noch unbeschadet seiner Giltigkeit die Veränderliche n selbst mit unter die Parameter aufgenommen werden, weil mittels der Gleichung (14.) des Artikels 1. jede W-Function mit der Veränderlichen $n+\mu$ durch eine andre ausgedrückt werden kann, mit der Veränderlichen n, und den Parametern $\alpha+\mu$, $\alpha'+\mu$, $\beta-\mu$, $\beta'-\mu$.

Setzt man nun

$$(78.)\quad \begin{cases} \alpha_{\gamma} = \dfrac{\pi e^{(\alpha+\beta+\gamma)i\pi}}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi}, & \alpha_{\gamma'} = \dfrac{\pi e^{(\alpha+\beta+\gamma')i\pi}}{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi}, \\ \alpha'_{\gamma} = \dfrac{\pi e^{(\alpha'+\beta+\gamma)i\pi}}{\pi\sin(\alpha'+\beta+\gamma)\pi}, & \alpha'_{\gamma'} = \dfrac{\pi e^{(\alpha'+\beta+\gamma')\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi}, \end{cases}$$

welche Annahme mit der Gleichung (76.) verträglich ist, so bleiben diese Coefficienten für alle contiguen Functionen dieselben, und wir haben

$$\alpha_{\gamma} w^{\gamma} : w^{\alpha} = (\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\gamma}),\ \ \alpha'_{\gamma} w^{\gamma} : w^{\alpha'} = (\overset{+}{\alpha'}, \overset{+}{\gamma})$$

und also

$$(79.)\quad \frac{w^{\alpha}}{w^{\alpha'}} = \frac{\overset{+\ +}{(\alpha',\gamma)}}{\underset{(\alpha,\gamma)}{+\ +}} \cdot \frac{\alpha_\gamma}{\alpha'_\gamma} = \frac{\Pi(-\alpha-\beta)\Pi(-\alpha-\beta')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)e^{\alpha i\pi}}{\Pi(-\alpha'-\beta)\Pi(-\alpha'-\beta')\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')e^{\alpha' i\pi}},$$

wodurch die Verhältnisse $w^{\alpha}:w^{\alpha'}:w^{\gamma}:w^{\gamma'}$ völlig bestimmt sind. Setzt man hierin noch $\alpha+m$ für α, $\alpha'-m$ für α', wenn m eine ganze positive Zahl ist, und geht mit m zur Grenze ∞ über, so erhält man beiläufig, wenn durch diese Substitution w^{α} in w^{α}_{m}, $w^{\alpha'}$ in $w^{\alpha'}_{m}$ übergeht:

$$(79^a.)\quad \lim_{m=\infty} \frac{w^{\alpha}_{m}}{w^{\alpha'}_{m}} = \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi e^{\alpha i\pi}}{\sin(\alpha+\beta)\pi\sin(\alpha'+\beta')\pi e^{\alpha' i\pi}}.$$

Artikel 11. Einige Gleichungen zwischen contiguen Functionen.

In diesem Artikel sollen nun einige Relationen zwischen contiguen Functionen wirklich aufgestellt werden.

Zur Abkürzung bezeichnen wir mit U, V, X, Y bez. die Functionen

$$\mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma, \\ \alpha', \beta', \gamma',\end{pmatrix}n, \quad \mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, \gamma+1, \\ \alpha'-1, & \beta', \gamma',\end{pmatrix}n, \quad \mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha+1, & \beta, \gamma, \\ \alpha'-1, & \beta', \gamma',\end{pmatrix}n, \quad \mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha+1, & \beta, \gamma+1, \\ \alpha'-2, & \beta', \gamma',\end{pmatrix}n.$$

$$\frac{U^{\alpha}}{u^{\alpha}},\ \frac{U^{\alpha'}}{u^{\alpha'}},\ \frac{U^{\beta}}{u^{\beta}},\ \dots\ \frac{V^{\alpha}}{v^{\alpha}},\ \dots\ \frac{X^{\alpha}}{x^{\alpha}},\ \dots\ \frac{Y^{\alpha}}{y^{\alpha}},\ \frac{Y^{\alpha'}}{y^{\alpha'}},\ \dots\ \frac{Y^{\gamma'}}{y^{\gamma'}},$$

seien die positiven Zweige dieser Functionen mit den Constanten versehen, wie sie in den Formeln der Artikel 4., 5., 6. enthalten sind. Die Verhältnisse der Constanten $u^{\alpha}, u^{\alpha'}, u^{\beta}, u^{\beta'}, \dots$ und ebenso der $v^{\alpha}, v^{\alpha'}, \dots$ $x^{\alpha}, x^{\alpha'}, \dots$ $y^{\alpha}, y^{\alpha'}, \dots$ $y^{\gamma'}$ seien so bestimmt, wie die $w^{\alpha}, w^{\alpha'}, \dots$ des vorigen Artikels, d. h. so, dass die Gleichungen (78.) und (79.) statt haben. Sodann bemerken wir, dass in den Gleichungen

$$(80.)\quad \begin{cases} \varkappa = (U^{\alpha}V^{\alpha'} - V^{\alpha}U^{\alpha'})\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'-1), \\ \varkappa_1 = (X^{\alpha}Y^{\alpha'} - Y^{\alpha}X^{\alpha'})\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha+1)\Pi(n+\alpha'-2), \\ \lambda = (U^{\alpha}X^{\alpha'} - U^{\alpha'}X^{\alpha})\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'-1), \\ \mu = (U^{\alpha}Y^{\alpha'} - Y^{\alpha}U^{\alpha'})\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'-2), \\ \nu = (V^{\alpha}X^{\alpha'} - V^{\alpha'}X^{\alpha})\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'-1), \\ \varrho = (V^{\alpha}Y^{\alpha'} - Y^{\alpha}V^{\alpha'})\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'-2), \end{cases}$$

nach den Principien des vorigen Artikels $\varkappa$, $\varkappa_1$, λ, ν, ϱ constante Grössen sind, μ aber eine lineare Function von n ist. Man kann diese Grössen durch Einsetzen specieller Werthe von n in mehr oder weniger complicirter Weise berechnen. Man bestimmt sie jedoch, oder wenigstens ihre Ver-

hältnisse, die wir allein brauchen, vielleicht einfacher in andrer Weise, indem man sofort zwei Relationen zwischen contiguen Functionen hinschreibt. Setzen wir in die Identitäten

$$\begin{vmatrix} U, & V, & X \\ U^\alpha, & V^\alpha, & X^\alpha \\ U^{\alpha'}, & V^{\alpha'}, & X^{\alpha'} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} V, & X, & Y \\ V^\alpha, & X^\alpha, & Y^\alpha \\ V^{\alpha'}, & X^{\alpha'}, & Y^{\alpha'} \end{vmatrix} = 0,$$

die aus den Gleichungen (80.) für die Unterdeterminanten sich ergebenden Werthe ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\nu U - \lambda V + \varkappa X = 0,$$

$$V\varkappa_1(n+\alpha+1) - \varrho X + Y\nu(n+\alpha'-1) = 0.$$

Behandeln wir zunächst die erste. Wir setzen den zu α gehörenden positiven Zweig in dieselbe ein, nehmen $n = -\alpha'+1$ und erhalten so

$$u^\alpha\nu\left(1 - \frac{\gamma}{1-\alpha-\beta}\,\frac{\gamma'}{1-\alpha'-\beta'}\right) - v^\alpha\lambda + x^\alpha\varkappa = 0.$$

Setzen wir sodann den zu γ gehörenden positiven Zweig ein, so finden wir

$$u^\gamma\nu + x^\gamma\varkappa = 0,$$

oder bei unserer Annahme über die Constanten

$$u^\gamma : x^\gamma = u^\alpha.(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\gamma}) : x^\alpha.(\overset{+}{\alpha+1}, \overset{+}{\gamma}) = u^\alpha : x^\alpha\,\frac{1-\alpha'-\beta}{1-\alpha'-\beta-\gamma}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{1-\alpha'-\beta'-\gamma}.$$

$$u^\alpha\nu + x^\alpha\varkappa\,\frac{1-\alpha'-\beta}{1-\alpha'-\beta-\gamma}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{1-\alpha'-\beta'-\gamma} = 0, \quad v^\alpha\lambda = -\frac{x^\alpha\varkappa\gamma(\alpha'-\alpha-1)}{(1-\alpha'-\beta-\gamma)(1-\alpha'-\beta'-\gamma)}.$$

Hieraus fliesst die Proportion

$$u^\alpha\nu : v^\alpha\lambda : x^\alpha\varkappa = -\frac{1-\alpha'-\beta}{\alpha+\beta+\gamma'}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha+\beta'+\gamma'} : \frac{\gamma}{\alpha+\beta'+\gamma'}\,\frac{\alpha'-\alpha-1}{\alpha+\beta+\gamma'} : 1,$$

und somit endlich die Gleichung

$$(81.)\quad \frac{X}{x^\alpha} = \frac{U}{u^\alpha}\,\frac{1-\alpha'-\beta}{\alpha+\beta'+\gamma'}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha+\beta+\gamma'} + \frac{V}{v^\alpha}\,\frac{\gamma}{\alpha+\beta'+\gamma'}\,\frac{\alpha'-\alpha-1}{\alpha+\beta+\gamma'},$$

in der x^α, u^α, v^α noch willkürlich sind, und in welche jeder positive und negative Zweig der Functionen U, V, X eingesetzt werden kann.

Noch leichter bestimmen sich die Constanten in der zweiten der oben aufgestellten Gleichungen, indem man einmal den positiven Zweig α und darin für n den Werth $-\alpha'+1$ einsetzt, ein andermal den positiven Zweig γ' substituirt, und $n = \infty$ annimmt. Auf diese Weise ergiebt sich die Gleichung

$$(82.)\quad \frac{V}{v^\alpha}\,\frac{n+\alpha+1}{\alpha-\alpha'+2} - \frac{X}{x^\alpha} - \frac{Y}{y^\alpha}\,\frac{n+\alpha'-1}{\alpha-\alpha'+2}\,\frac{2-\alpha'-\beta-\gamma'}{2-\alpha'-\beta}\,\frac{2-\alpha'-\beta'-\gamma'}{2-\alpha'-\beta'} = 0.$$

Aus (81.) und (82.) erhält man durch Elimination noch die beiden folgenden Gleichungen

$$(83.)\quad \begin{cases} \dfrac{V}{v^{\alpha}}\left(\dfrac{n+\alpha+1}{\alpha-\alpha'+2}-\dfrac{\gamma(\alpha'-\alpha-1)}{(\alpha+\beta'+\gamma')(\alpha+\beta+\gamma')}\right)-\dfrac{U}{u^{\alpha}}\dfrac{1-\alpha'-\beta}{\alpha+\beta'+\gamma'}\dfrac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha+\beta+\gamma'} \\ \qquad -\dfrac{Y}{y^{\alpha}}\dfrac{n+\alpha'-1}{\alpha-\alpha'+2}\dfrac{2-\alpha'-\beta-\gamma'}{2-\alpha'-\beta}\dfrac{2-\alpha'-\beta'-\gamma'}{2-\alpha'-\beta'}=0, \end{cases}$$

$$(84.)\quad \begin{cases} \dfrac{U}{u^{\alpha}}\dfrac{n+\alpha+1}{\alpha-\alpha'+2}\dfrac{1-\alpha'-\beta}{\alpha+\beta'+\gamma'}\dfrac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha+\beta+\gamma'}-\dfrac{X}{x^{\alpha}}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma'}\dfrac{\alpha'-\alpha-1}{\alpha+\beta'+\gamma'}+\dfrac{n+\alpha+1}{\alpha-\alpha'+2}\right) \\ \qquad -\dfrac{Y}{y^{\alpha}}\dfrac{n+\alpha'-1}{\alpha-\alpha'+2}\dfrac{\gamma}{2-\alpha'-\beta}\dfrac{\alpha'-\alpha-1}{2-\alpha'-\beta'}\dfrac{2-\alpha'-\beta-\gamma'}{1-\alpha'-\beta-\gamma}\dfrac{2-\alpha'-\beta'-\gamma'}{1-\alpha'-\beta'-\gamma}=0. \end{cases}$$

Stellen wir noch die Gleichungen (81.) und (82.) mittels der Formeln (30.) in F-Reihen auf, so erhalten wir

$$F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta-1, & \alpha'+\beta'-1 \\ \gamma, & \gamma', & -\alpha'-n+1\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta, & \alpha'+\beta' \\ \gamma, & \gamma', & -\alpha'-n\end{pmatrix}\frac{1-\alpha'-\beta}{1-\alpha'-\beta-\gamma}\frac{1-\alpha'-\beta'}{1-\alpha'-\beta'-\gamma}$$
$$+F\begin{pmatrix}0, & \alpha'+\beta-1, & \alpha'+\beta'-1 \\ \gamma+1, & \gamma', & -\alpha'-n+1\end{pmatrix}\frac{\gamma}{1-\alpha'-\beta-\gamma}\frac{\alpha'-\alpha-1}{1-\alpha'-\beta'-\gamma}=0,$$

oder

$$(81^a.)\quad \begin{cases} F\begin{pmatrix}0, & a'-1, & a''-1 \\ b, & b', & b''+1\end{pmatrix}-F\begin{pmatrix}0, & a', & a'' \\ b, & b', & b''\end{pmatrix}\dfrac{1-a'}{1-a'-b}\dfrac{1-a''}{1-a''-b} \\ +F\begin{pmatrix}0, & a'-1, & a''-1 \\ b+1, & b', & b''+1\end{pmatrix}\dfrac{b(a'+a''+b+b'-2)}{(1-a'-b)(1-a''-b)}=0, \end{cases}$$

und

$$(82^a.)\quad \begin{cases} F\begin{pmatrix}0, & a'-1, & a''-1 \\ b+1, & b', & b''+1\end{pmatrix}\dfrac{a'+a''+b+b'+b''-2}{a'+a''+b+b'-1}-F\begin{pmatrix}0, & a', & a'' \\ b, & b', & b''\end{pmatrix} \\ +F\begin{pmatrix}0, & a'-2, & a''-2 \\ b+1, & b', & b''+2\end{pmatrix}\dfrac{(b''+1)(2-a'-b')(2-a''-b')}{(1-a'-a''-b-b')(2-a')(2-a'')}=0. \end{cases}$$

Man kann aus den Gleichungen (81.) bis (84.) noch eine grössere Anzahl von Formeln zwischen contiguen F-Reihen ableiten, die ein verschiedenes Aussehen haben, indem man erstens für die F-Reihen ihre verschiedenen Formen einsetzt, die unter einander gleich sind, und indem man zweitens die verschiedenen Zweige der Functionen U, V, X, Y einsetzt. Ihre Aufstellung kann unterbleiben, weil sie eben alle in den angezogenen Formeln enthalten sind.

Wir behandeln nun noch in gleicher Weise die Functionen

$$U, R=\mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma+1, & \\ \alpha', & \beta'-1, & \gamma', & n\end{pmatrix},\quad S=\mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta+1, & \gamma, & \\ \alpha', & \beta'-1, & \gamma', & n\end{pmatrix},\quad T=\mathfrak{W}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta+1, & \gamma+1, & \\ \alpha', & \beta'-2, & \gamma', & n\end{pmatrix},$$

dann finden wir wieder, dass in den Ausdrücken

$$\begin{aligned}
\varrho &= (U^\alpha R^{\alpha'} - U^{\alpha'} R^\alpha)\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta'+1) : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'),\\
\varrho_1 &= (S^\alpha T^{\alpha'} - S^{\alpha'} T^\alpha)\Pi(n-\beta-1)\Pi(n-\beta'+2) : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'),\\
\lambda &= (R^\alpha S^{\alpha'} - R^{\alpha'} S^\alpha)\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta'+1) : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'),\\
\mu &= (U^\alpha S^{\alpha'} - U^{\alpha'} S^\alpha)\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta'+1) : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha'),\\
\nu &= (R^\alpha T^{\alpha'} - R^{\alpha'} T^\alpha)\Pi(n-\beta)\Pi(n-\beta'+2) : \Pi(n+\alpha)\Pi(n+\alpha')
\end{aligned}$$

$\varrho, \varrho_1, \lambda, \mu, \nu$ Constante sind, und dass wir daher die Gleichungen ansetzen können

$$\begin{aligned}
U\lambda - R\mu + S\varrho &= 0,\\
R\varrho_1(n-\beta) - S\nu + T\lambda(n-\beta'+2) &= 0.
\end{aligned}$$

Der Zweig α liefert für $n=-\alpha'$ sogleich die Beziehungen

$$u^\alpha\lambda - r^\alpha\mu + s^\alpha\varrho = 0, \quad r^\alpha\varrho_1(\beta+\alpha') + s^\alpha\nu + t^\alpha\lambda(2-\alpha'-\beta') = 0.$$

Setzt man die positiven Zweige, die zu γ, γ' gehören, ein und lässt n über alle Grenzen wachsen, so erhält man weiter

$$u^\alpha\lambda + s^\alpha\varrho\frac{1-\alpha'-\beta}{\alpha'+\beta}\,\frac{\alpha'+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma'} = 0, \quad r^\alpha\varrho_1 + t^\alpha\lambda\frac{2-\alpha'-\beta'}{\alpha'+\beta}\,\frac{\alpha'+\beta+\gamma'}{2-\alpha'-\beta'-\gamma'} = 0,$$

und hieraus erhalten wir die Gleichungen

$$(85.)\quad \frac{S}{s^\alpha} = \frac{U}{u^\alpha}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{1-\alpha'-\beta'-\gamma}\,\frac{\alpha'+\beta+\gamma}{\alpha'+\beta} + \frac{R}{r^\alpha}\,\frac{\gamma}{\alpha'+\beta}\,\frac{\beta'-\beta-1}{\alpha+\beta+\gamma'},$$

$$(86.)\quad \frac{T}{t^\alpha}\,\frac{n-\beta'+2}{2-\alpha'-\beta'} = \frac{R}{r^\alpha}\,\frac{n-\beta}{\alpha'+\beta}\,\frac{\alpha'+\beta+\gamma'}{2-\alpha'-\beta'-\gamma'} + \frac{S}{s^\alpha}\,\frac{2+\beta-\beta'}{2-\alpha'-\beta'-\gamma'}.$$

Durch Einsetzen des zu α gehörenden Zweiges fliesst daraus

$$(85^a.)\quad \left\{\begin{aligned}
&F\begin{pmatrix}0, & a', & a''\\ b, & b', & b''\end{pmatrix}(1-a'')(a'+b)\\
&+F\begin{pmatrix}0, & a', & a''-1\\ b+1, & b', & b''\end{pmatrix}b(a''-a'-1) + F\begin{pmatrix}0, & a'+1, & a''-1\\ b, & b', & b''\end{pmatrix}a'(a''+b-1) = 0,
\end{aligned}\right.$$

und

$$(86^a.)\quad \left\{\begin{aligned}
&F\begin{pmatrix}0, & a'+1, & a''-2\\ b+1, & b', & b''\end{pmatrix}\frac{2-a''-b''}{2-a''}\\
&= F\begin{pmatrix}0, & a', & a''-1\\ b+1, & b', & b''\end{pmatrix}\frac{a'+b''}{a'}\,\frac{a'+b'}{a''+b'-2} + F\begin{pmatrix}0, & a'+1, & a''-1\\ b, & b', & b''\end{pmatrix}\frac{a'-a''+2}{2-a''-b'}.
\end{aligned}\right.$$

Es mag bemerkt werden, dass die Gleichung ($85^a.$) auch dann noch bestehen bleibt, wenn man dem 0ten, 1ten, 2ten, ... m^{ten}, ... Terme bez. die Factoren $x^0, x, x^2, \ldots x^m, \ldots$ hinzufügt. Will man die $u^\beta, u^{\beta'}, r^\beta, r^{\beta'}, \ldots s^\beta, \ldots$ als willkürliche Constanten statt der $u^\alpha, u^{\alpha'}, \ldots s^\alpha, \ldots$ ansehen, so geht

die Gleichnng (85.) in die folgende über

$$(85^b.)\quad \frac{S}{s^\beta} = \frac{U}{u^\beta}\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma')(\alpha'+\beta+\gamma')}+\frac{R}{r^\beta}\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma'}\,\frac{\beta-\beta'+1}{\alpha'+\beta+\gamma'}.$$

In meiner Abhandlung über höhere hypergeometrische Reihen in den Leipziger Annalen Bd. II Seite 427 u. s. f. habe ich einige Relationen zwischen drei contiguen Functionen jener Reihen aufgestellt, die natürlich auch für $x = 1$ gelten. Man kann die aus ihnen entspringenden Gleichungen nach den hier aufgestellten Sätzen leicht herleiten, wir begnügen uns jedoch einige hier einfach hinzuschreiben. Nämlich

$$(87.)\quad F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}(a'-a'')+F_a\begin{pmatrix} a, & a'+1, & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}(a-a')+F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a''+1 \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}(a''-a)=0,$$

$$(88.)\quad F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}(b''-b')+F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b'+1, & b'' \end{pmatrix}(a+b')+F_a\begin{pmatrix} a; & a', & a'' \\ b, & b', & b''+1 \end{pmatrix}(a+b'')=0,$$

$$(89.)\quad \begin{cases} F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b+1, & b', & b'' \end{pmatrix}(a+b)(b'-b'')+F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b'+1, & b'' \end{pmatrix}(a+b')(b''-b) \\ \qquad +F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b''+1 \end{pmatrix}(a+b'')(b-b') = 0. \end{cases}$$

$$(90.)\quad F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}-F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b''-1 \end{pmatrix} = \frac{a+b}{a-a'+1}\,\frac{a+b'}{a-a''+1}F_a\begin{pmatrix} a, & a'-1, & a''-1 \\ b+1, & b'+1, & b'' \end{pmatrix},$$

oder wenn man

$$a,\quad a',\quad a'',\quad b,\quad b',\quad b''$$

bez. durch

$$0,\ \alpha'+\beta,\ \alpha'+\beta',\ \gamma,\ \gamma',\ -\alpha'-n$$

ersetzt,

$$(87^a.)\quad W^\alpha_+.(\beta'-\beta) = W^\alpha\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta+1, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}(\alpha'+\beta)-W^\alpha_+\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta'+1, & \gamma', & \end{pmatrix}(\alpha'+\beta'),$$

$$(88^a.)\quad W^\alpha_+.(\gamma'+\alpha'+n)-W^\alpha_+\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma'+1, & \end{pmatrix}-W^\alpha_+\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & n-1 \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}(n+\alpha') = 0,$$

oder wenn man b mit b'' vertauscht,

$$(88^b.)\quad W^\alpha_+.(\gamma'-\gamma)-W^\alpha_+\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma'+1, & \end{pmatrix}\gamma'+W^\alpha_+\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta, & \gamma+1, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}\gamma = 0,$$

$$(89^a.)\quad \begin{cases} W^\alpha\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta, & \gamma+1, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}\gamma(\alpha'+\gamma'+n)-W^\alpha\begin{pmatrix} \alpha-1, & \beta, & \gamma, & n \\ \alpha', & \beta', & \gamma'+1, & \end{pmatrix}\gamma'(\alpha'+\gamma+n) \\ \qquad -W^\alpha\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & n-1 \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}(\alpha'+n)(\gamma-\gamma') = 0, \end{cases}$$

$$(90^a.)\quad W^\alpha-W^\alpha\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & n+1 \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{1-\alpha'-\beta}\,\frac{\gamma'}{1-\alpha'-\beta'}\,W\begin{pmatrix} \alpha, & \beta-1, & \gamma+1, & n \\ \alpha', & \beta'-1, & \gamma'+1, & \end{pmatrix}.$$

In diese Formeln kann man auch die Fortsetzungen des Zweiges W^α einsetzen, also z. B. $(\overset{+}{\alpha}, \overset{+}{\beta}) W_+^\beta$ oder $(\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\beta}) W_-^\beta$ etc. Auch kann man noch durch Elimination einige neue aus ihnen herleiten. Es mögen jedoch die hier gegebenen genügen. Ein ausgiebiges einfaches Mittel, Gleichungen zwischen contiguen Functionen herzustellen, werden wir noch im Artikel 13. kennen lernen.

Artikel 12. Kettenbrüche.

Wir haben im Artikel 10. gefunden, dass sich alle contiguen Functionen durch zwei unter ihnen ausdrücken lassen mit in n rationalen Coefficienten. Die Auffindung dieser rationalen Coefficienten, wenn die Differenzen der Parameter *unbestimmte* ganze Zahlen sind, ist nicht einfach, und man wird sich meist begnügen müssen, ihr Bildungsgesetz aufzusuchen. Wir wollen in einem speciellen Falle zeigen, wie sie sich als Näherungszähler und Näherungsnenner eines Kettenbruches darstellen lassen, womit in der That ihr Bildungsgesetz bestimmt ist. Wir wollen nämlich die Functionen

$$U_{(m)} = \mathfrak{W}\begin{pmatrix} \alpha+m, \beta, \gamma, & \\ \alpha'-m, \beta', \gamma', & n \end{pmatrix}, \qquad V_{(m)} = \mathfrak{W}\begin{pmatrix} \alpha+m, & \beta, \gamma+1, & \\ \alpha'-m-1, & \beta', \gamma', & n \end{pmatrix},$$

durch $U_{(0)}$, $V_{(0)}$ ausdrücken. Hierzu bedürfen wir der Gleichungen (81.) und (82.) des vorigen Artikels in etwas allgemeinerer Gestalt, nämlich der Gleichungen

$$(91.)\quad \begin{cases} -\dfrac{V_{(m)}}{v_m^\alpha} \dfrac{n+\alpha'-m}{\alpha-\alpha'+2m} \dfrac{\alpha+\beta'+\gamma+m}{1-\alpha'-\beta+m} \dfrac{\alpha+\beta+\gamma+m}{1-\alpha'-\beta'+m} \\ \qquad + \dfrac{U_{(m)}}{u_m^\alpha} - \dfrac{V_{(m-1)}}{v_{m-1}^\alpha} \dfrac{n+\alpha+m}{\alpha-\alpha'+2m} = 0. \end{cases}$$

$$(92.)\quad \begin{cases} \dfrac{U_{(m+1)}}{u_{m+1}^\alpha} \dfrac{\alpha+\beta'+\gamma'+m}{1-\alpha'-\beta+m} \dfrac{\alpha+\beta+\gamma'+m}{1-\alpha'-\beta'+m} \\ + \dfrac{V_{(m)}}{v_m^\alpha} \dfrac{\gamma(\alpha-\alpha'+2m+1)}{(1-\alpha'-\beta+m)(1-\alpha'-\beta'+m)} - \dfrac{U_{(m)}}{u_m^\alpha} = 0. \end{cases}$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} Z_{2m} &= (U_{(0)}^\alpha U_{(m+1)}^{\alpha'} - U_{(m+1)}^\alpha U_{(0)}^{\alpha'}) \,\Pi(n-\beta)\,\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\,\Pi(n+\alpha'-m-1), \\ N_{2m} &= (V_{(0)}^\alpha U_{(m+1)}^{\alpha'} - V_{(0)}^{\alpha'} U_{(m+1)}^\alpha) \,\Pi(n-\beta)\,\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\,\Pi(n+\alpha'-m-1), \\ Z_{2m-1} &= (U_{(0)}^\alpha V_{(m)}^{\alpha'} - V_{(m)}^\alpha U_{(0)}^{\alpha'}) \,\Pi(n-\beta)\,\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\,\Pi(n+\alpha'-m-1), \\ N_{2m-1} &= (V_{(0)}^\alpha V_{(m)}^{\alpha'} - V_{(m)}^\alpha V_{(0)}^{\alpha'}) \,\Pi(n-\beta)\,\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\,\Pi(n+\alpha'-m-1) \end{aligned}$$

und bemerken beiläufig, dass nach den Principien des Artikels 10. Z_{2m}, N_{2m},

Z_{2m-1} vom m^{ten} Grade, N_{2m-1} vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade in n sind. Ferner sind

$$(U^{\alpha}_{(0)}V^{\alpha'}_{(0)} - U^{\alpha'}_{(0)}V^{\alpha}_{(0)})\,\Pi(n-\beta)\,\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha)\,\Pi(n+\alpha') = \varkappa,$$

$$(U^{\alpha}_{(m)}V^{\alpha'}_{(m)} - U^{\alpha'}_{(m)}V^{\alpha}_{(m)})\,\Pi(n-\beta)\,\Pi(n-\beta') : \Pi(n+\alpha+m)\,\Pi(n+\alpha'-m-1) = \varkappa_m,$$

Constante. Setzen wir diese Ausdrücke in die Identitäten

$$\begin{vmatrix} U_{(m+1)}, & U_{(0)}, & V_{(0)} \\ U^{\alpha}_{(m+1)}, & U^{\alpha}_{(0)}, & V^{\alpha}_{(0)} \\ U^{\alpha'}_{(m+1)}, & U^{\alpha'}_{(0)}, & V^{\alpha'}_{(0)} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} V_{(m)}, & U_{(0)}, & V_{(0)} \\ V^{\alpha}_{(m)}, & U^{\alpha}_{(0)}, & V^{\alpha}_{(0)} \\ V^{\alpha'}_{(m)}, & U^{\alpha'}_{(0)}, & V^{\alpha'}_{(0)} \end{vmatrix} = 0$$

ein, so erhalten wir daraus die Beziehungen

$$(93.)\quad \varkappa U_{(m+1)} = -N_{2m}\frac{\Pi(n+\alpha'-m-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}U_{(0)} + Z_{2m}\frac{\Pi(n+\alpha'-m-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}V_{(0)},$$

$$(94.)\quad \varkappa V_{(m)} = -N_{2m-1}\frac{\Pi(n+\alpha'-m-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}U_{(0)} + Z_{2m-1}\frac{\Pi(n+\alpha'-m-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}V_{(0)}.$$

Als specielle Fälle fliessen hieraus die Gleichungen

$$\varkappa U_{(1)} = -N_0 U_{(0)} + Z_0 V_{(0)},$$

$$\varkappa V_{(1)} = -\frac{N_1 U_{(0)}}{n+\alpha'-1} + \frac{Z_1 V_{(0)}}{n+\alpha'-1},$$

aus welchen folgt

$$(95.)\quad \varkappa u^{\alpha}_1 : N_0 u^{\alpha}_0 : Z_0 v^{\alpha}_0 = 1 : -\frac{1-\alpha'-\beta}{\alpha+\beta'+\gamma'}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha+\beta+\gamma'} : \frac{\gamma(\alpha'-\alpha-1)}{(\alpha+\beta'+\gamma')(\alpha+\beta+\gamma')};$$

$$(96.)\quad \left\{\begin{aligned} &\varkappa v^{\alpha}_1 : N_1 u^{\alpha}_0 : Z_1 v^{\alpha}_0 \\ &= \frac{(2-\alpha'-\beta-\gamma')(2-\alpha'-\beta'-\gamma')}{(\alpha-\alpha'+2)(2-\alpha'-\beta)(2-\alpha'-\beta')} : \frac{1-\alpha'-\beta}{\alpha+\beta'+\gamma'}\,\frac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha+\beta'+\gamma} \\ &\quad : \frac{n+\alpha+1}{\alpha-\alpha'+2} + \frac{\gamma(\alpha'-\alpha+1)}{(\alpha+\beta'+\gamma')(\alpha+\beta-\gamma')}. \end{aligned}\right.$$

Die Grössen Z_{2m}, N_{2m}, Z_{2m-1}, N_{2m-1} können auch in einfacher Weise dazu dienen, umgekehrt $U_{(0)}$, $V_{(0)}$ durch $U_{(m+1)}$, $V_{(m)}$ auszudrücken, welche Gleichungen wir aber unterdrücken. Aus den Gleichungen (93.) und (94.) stellen wir jedoch mit Hilfe der Gleichungen (91.) und (92.) Beziehungen her, die linear und homogen in $U_{(0)}$, $V_{(0)}$ sind, und folglich identisch verschwinden müssen. Wird zur augenblicklichen Abkürzung

$$\frac{1-\alpha'-\beta-\gamma'+m}{1-\alpha'-\beta+m}\,\frac{1-\alpha'-\beta'-\gamma'+m}{1-\alpha'-\beta'+m} = \frac{\alpha+\beta'+\gamma+m}{1-\alpha'-\beta+m}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma+m}{1-\alpha'-\beta'+m} = f_m,$$

$$\frac{\alpha+\beta'+\gamma'+m}{1-\alpha'-\beta+m}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma'+m}{1-\alpha'-\beta'+m} = g_m, \quad \frac{\gamma(\alpha-\alpha'+2m+1)}{(1-\alpha'-\beta+m)(1-\alpha'-\beta'+m)} = h_m$$

gesetzt, so sind diese Beziehungen

$$\frac{V_{(m)}}{v_m^\alpha}\frac{n+\alpha'-m}{\alpha-\alpha'+2m}f_m+\frac{U_{(m)}}{u_m^\alpha}-\frac{V_{(m-1)}}{v_{m-1}^\alpha}\frac{n+\alpha+m}{\alpha-\alpha'+2m}$$

$$=\frac{V_{(0)}\Pi(n+\alpha'-m)}{\Pi(n+\alpha'-1)}\left(\frac{Z_{2m-1}f_m}{v_m^\alpha(\alpha-\alpha'+2m)}+\frac{Z_{2m-2}}{u_m^\alpha}-\frac{Z_{2m-3}(n+\alpha+m)}{v_{m-1}^\alpha(\alpha-\alpha'+2m)}\right)$$

$$-\frac{U_{(0)}\Pi(n+\alpha'-m)}{\Pi(n+\alpha'-1)}\left(\frac{N_{2m-1}f_m}{v_m^\alpha(\alpha-\alpha'+2m)}+\frac{N_{2m-2}}{u_m^\alpha}-\frac{N_{2m-3}(n+\alpha+m)}{v_{m-1}^\alpha(\alpha-\alpha'+2m)}\right)=0,$$

$$\frac{U_{(m+1)}}{u_{m+1}^\alpha}g_m+\frac{V_{(m)}}{v_m^\alpha}h_m-\frac{U_{(m)}}{u_m^\alpha}$$

$$=\frac{V_{(0)}\Pi(n+\alpha'-m-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}\left(\frac{Z_{2m}g_m}{u_{m+1}^\alpha}+\frac{Z_{2m-1}h_m}{v_m^\alpha}-\frac{(n+\alpha'-m)Z_{2m-2}}{u_m^\alpha}\right)$$

$$-\frac{U_{(0)}\Pi(n+\alpha'-m-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}\left(\frac{N_{2m}g_m}{u_{m+1}^\alpha}+\frac{N_{2m-1}h_m}{v_m^\alpha}-\frac{n+\alpha'-m}{u_m^\alpha}N_{2m-2}\right)=0.$$

Die Coefficienten von $U_{(0)}$, $V_{(0)}$ in diesen Gleichungen müssen Null sein. Die daraus entspringenden Relationen wollen wir noch dadurch vereinfachen, dass wir die willkürlichen Constanten u_m^α, v_m^α so bestimmen, dass

$$(97.)\qquad \frac{v_m^\alpha(\alpha-\alpha'+2m)}{u_m^\alpha f_m}=-1,\qquad \frac{u_{m+1}^\alpha h_m}{v_m^\alpha g_m}=-1,$$

also

$$(98.)\qquad \frac{u_{m+1}^\alpha}{u_m^\alpha g_m}=\frac{f_m:h_m}{\alpha-\alpha'+2m},\qquad \frac{v_m^\alpha}{v_{m-1}^\alpha f_m}=\frac{g_{m-1}:h_{m-1}}{\alpha-\alpha'+2m}$$

ist. Dann erhalten wir die Gleichungen

$$(99.)\qquad \begin{cases} Z_{2m-1}=Z_{2m-2}+Z_{2m-3}\dfrac{n+\alpha+m}{\alpha-\alpha'+2m}\dfrac{g_{m-1}}{h_{m-1}},\\ N_{2m-1}=N_{2m-2}+N_{2m-3}\dfrac{n+\alpha+m}{\alpha-\alpha'+2m}\dfrac{g_{m-1}}{h_{m-1}},\\ Z_{2m}=Z_{2m-1}+Z_{2m-2}\dfrac{n+\alpha'-m}{\alpha-\alpha'+2m}\dfrac{f_m}{h_m},\\ N_{2m}=N_{2m-1}+N_{2m-2}\dfrac{n+\alpha'-m}{\alpha-\alpha'+2m}\dfrac{f_m}{h_m}. \end{cases}$$

Setzt man endlich noch

$$(100.)\qquad u_0^\alpha:v_0^\alpha=(1-\alpha'-\beta)(1-\alpha'-\beta'):\gamma(\alpha-\alpha'+1),$$

so folgt aus den Gleichungen (95.) und (96.)

$$\frac{Z_0}{N_0}=1,\quad \frac{Z_1}{N_1}=\left(1+\frac{n+\alpha+1}{\gamma}\cdot\frac{\alpha+\beta'+\gamma'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma'}{\alpha-\alpha'+2}\right):1,$$

und somit weiter, dass unsere Grössen Z_0, N_0; Z_1, N_1; ... Z_m, N_m; ... die successiven Näherungszähler und Nenner des Kettenbruches sind:

$$(101).\quad K(n) = 1+\cfrac{\frac{n+\alpha+1}{\gamma}\frac{\alpha+\beta'+\gamma'}{\alpha-\alpha'+2}\frac{\alpha+\beta+\gamma'}{\alpha-\alpha'+2}}{1+\cfrac{\frac{n+\alpha'-1}{\gamma}\frac{\alpha+\beta'+\gamma+1}{\alpha-\alpha'+2}\frac{\alpha+\beta+\gamma+1}{\alpha-\alpha'+3}}{1+\cfrac{\frac{n+\alpha+2}{\gamma}\frac{\alpha+\beta'+\gamma'+1}{\alpha-\alpha'+3}\frac{\alpha+\beta+\gamma'+1}{\alpha-\alpha'+4}}{1+\cfrac{\frac{n+\alpha'-2}{\gamma}\frac{\alpha+\beta'+\gamma+2}{\alpha-\alpha'+4}\frac{\alpha+\beta+\gamma+2}{\alpha-\alpha'+5}}{1+\cfrac{\frac{n+\alpha+3}{\gamma}\frac{\alpha+\beta'+\gamma'+2}{\alpha-\alpha'+5}\frac{\alpha+\beta+\gamma'+2}{\alpha-\alpha'+6}}{1+\text{etc.}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind in den Formen enthalten

$$\frac{Z_{2m-1}}{N_{2m-1}} = \frac{U^{\alpha}_{(0)}V^{\alpha'}_{(m)}-U^{\alpha'}_{(0)}V^{\alpha}_{(m)}}{V^{\alpha}_{(0)}V^{\alpha'}_{(m)}-V^{\alpha'}_{(0)}V^{\alpha}_{(m)}},\quad \frac{Z_{2m}}{N_{2m}} = \frac{U^{\alpha}_{(0)}U^{\alpha'}_{(m+1)}-U^{\alpha'}_{(0)}U^{\alpha}_{(m+1)}}{V^{\alpha}_{(0)}U^{\alpha'}_{(m+1)}-V^{\alpha'}_{(0)}U^{\alpha}_{(m+1)}}.$$

Nun untersuchen wir die Verhältnisse $U^{\alpha}_{(m)}:U^{\alpha'}_{(m)}$ und $V^{\alpha}_{(m)}:V^{\alpha'}_{(m)}$, wenn m über alle Grenzen wächst. Aus der fünften oder sechsten der unter (30.) verzeichneten Formen erkennt man sogleich, dass

$$\lim\frac{U^{\alpha}_{(m)}}{u^{\alpha}_{m}} = \lim\frac{\Pi(m-\alpha'-\beta')\,\Pi(m+n+\alpha)}{\Pi(m-\alpha'-\beta'-\gamma)\,\Pi(m+n+\alpha+\gamma)} = 1$$

ist. Ferner ist mit Rücksicht auf den unter (78^a.) für $\lim u^{\alpha}_{m}:u^{\alpha'}_{m}$ gegebenen Werth

$$\lim\frac{U^{\alpha'}_{(m)}}{u^{\alpha}_{m}} = \lim\frac{U^{\alpha'}_{(m)}}{u^{\alpha'}_{m}}\cdot\frac{u^{\alpha'}_{m}}{u^{\alpha}_{m}} = \frac{e^{\alpha' i\pi}\sin(\alpha+\beta)\pi\sin(\alpha+\beta')\pi}{e^{\alpha i\pi}\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi}\lim\frac{U^{\alpha'}_{(m)}}{u^{\alpha'}_{m}}$$

$$= \frac{e^{\alpha' i\pi}\sin(\alpha+\beta')\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi\sin(\alpha'+\gamma'+n)\pi}{e^{\alpha i\pi}\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\sin(n+\alpha')\pi}\lim F\begin{pmatrix}0, & \alpha+\beta'+m, & m-\alpha'-\gamma'-n\\ \alpha'+\beta+\gamma'-m, & \gamma', & n-\beta'+1\end{pmatrix}.$$

Ist nun weiter $R(2n+1-\alpha-\alpha'-2\beta-2\beta')>0$, so folgt hieraus mittels der Gleichung (73^b.) der Grenzwerth

$$\lim\frac{U^{\alpha'}_{(m)}}{u^{\alpha}_{m}}$$

$$=(-1)^m\frac{\sin(\alpha'-\alpha)\pi\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi\,\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)\,e^{\alpha' i\pi}}{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\sin(n+\alpha')\pi\,\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma'-1)\,e^{\alpha i\pi}}\cdot m^{2n+\gamma+\gamma'-\beta-\beta'},$$

und also

$$(102.)\quad \begin{cases}\lim U^{\alpha}_{m}:U^{\alpha'}_{m}\\ = \dfrac{e^{\alpha i\pi}\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi\sin(n+\alpha')\pi\,\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma'-1)(-1)^m m^{\beta+\beta'-\gamma-\gamma'-2n}}{e^{\alpha' i\pi}\sin(\alpha'-\alpha)\pi\sin(n-\beta)\pi\sin(n-\beta')\pi\,\Pi(\beta-n-1)\Pi(\beta'-n-1)},\end{cases}$$

und es besteht demnach die Gleichung

$$K(n) = U^\alpha : V^\alpha,$$

so lange als $R(\beta+\beta'-\gamma-\gamma'-2n) < 0$ ist, ausgenommen etwa für solche specielle Combinationen der Parameter, für welche

$$V^\alpha \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma)\pi \sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi \sin(n+\alpha')\pi\, \Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma'-1)}{\sin(\alpha'-\alpha)\pi \sin(n-\beta)\pi \sin(n-\beta')\pi\, \Pi(\beta-n-1)\, \Pi(\beta'-n-1)}$$

unendlich gross wird. In Folge der unter (100.) über $u^\alpha : v^\alpha$ gemachten Annahme können wir noch schreiben

$$(103.)\quad \begin{cases} K(n) = \dfrac{1-\alpha'-\beta}{\gamma} \dfrac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha-\alpha'+1} \dfrac{U^\alpha_{(0)}}{u^\alpha} \cdot \dfrac{v^\alpha}{V^\alpha_{(0)}} \\ = F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha, & \alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta'+\gamma', & \alpha+\beta+\gamma', & n+\alpha+1 \end{pmatrix} : F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'-\alpha-1, & -\alpha-\gamma'-n \\ \alpha+\beta'+\gamma', & \alpha+\beta+\gamma', & n+\alpha+1 \end{pmatrix} \\ = \dfrac{1-\alpha'-\beta}{\gamma} F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta, & \alpha'-\alpha \\ \alpha+\beta'+\gamma, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n \end{pmatrix} : F\begin{pmatrix} 0, & \alpha'+\beta-1, & \alpha'-\alpha-1 \\ \alpha+\beta'+\gamma+1, & \alpha+\beta'+\gamma', & -\alpha'-n+1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Setzen wir in dem letzten Ausdrucke $x\omega$ für n; $\gamma-\omega$, $\gamma'-\omega$ für γ, γ'; $\beta+\omega$, $\beta'+\omega$ für β, β', und lassen ω über alle Grenzen wachsen, so fliesst daraus in *Gauss'* Bezeichnung das bekannte Resultat

$$\frac{F(\alpha+\beta'+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma', \alpha-\alpha'+1, x)}{F(\alpha+\beta'+\gamma+1, \alpha+\beta'+\gamma', \alpha-\alpha'+2, x)}$$

$$= 1-x\cfrac{\cfrac{\alpha+\beta'+\gamma'}{\alpha-\alpha'+1}\,\cfrac{\alpha+\beta+\gamma'}{\alpha-\alpha'+2}}{1-x\cfrac{\cfrac{\alpha+\beta'+\gamma+1}{\alpha-\alpha'+2}\,\cfrac{\alpha+\beta+\gamma+1}{\alpha-\alpha'+3}}{1-x\cfrac{\cfrac{\alpha+\beta'+\gamma'+1}{\alpha-\alpha'+3}\,\cfrac{\alpha+\beta+\gamma'+1}{\alpha-\alpha'+4}}{1-\text{etc.}}}}.$$

Artikel 13. Bestimmte Integrale.

Die Resultate, die hier erzielt sind, wurden mit Hilfe von Sätzen gewonnen, welche der Theorie der endlichen Summen und Differenzenrechnung angehören. Die Darstellung der Zweige der Function W durch bestimmte Integrale wurde vermieden, damit man erkenne, dass der Calcul mit endlichen Differenzen Mittel genug biete, die Eigenschaften einer durch ihn definirten Function zu eruiren. Allerdings aber würden sich manche derselben mit grosser Leichtigkeit ergeben haben, wenn man die Darstellung durch bestimmte Integrale zu Hilfe genommen hätte.

Man hat nämlich mit Anwendung der *Gauss*schen Bezeichnung die Gleichungen

$$(104.)\quad \begin{cases} F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} \\ = \dfrac{\Pi(a-a')\Pi(a-a'')}{\Pi(a+b'-1)\Pi(a+b''-1)\Pi(-a'-b')\Pi(-a''-b'')} \displaystyle\int_0^1 ds \int_0^1 d\sigma \frac{s^{a+b'-1}\sigma^{a+b''-1}}{(1-s)^{a'+b'}(1-\sigma)^{a''+b''}(1-s\sigma)^{a+b}}, \end{cases}$$

$$(105.)\quad F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} = \frac{\Pi(a-a'')}{\Pi(a+b''-1)\Pi(-a''-b'')} \int_0^1 \frac{F(a+b, a+b', a-a'+1, s)\,ds}{s^{1-a-b''}(1-s)^{a''+b''}},$$

worin die Parameter a' und a'' und ebenso b, b', b'' mit einander vertauscht werden können. Setzt man in (105.) für $F(a+b, a+b', a-a'+1, s)$ den ihm gleichen Ausdruck

$$(1-s)^{1-a-a'-b-b'} F(1-a'-b, 1-a'-b', a-a'+1, s),$$

so ergiebt sich sofort die unter (12.) in anderer Weise gefundene Gleichung

$$F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\Pi(a-a'')\Pi(1-a-a'-a''-b-b'-b'')}{\Pi(-a''-b'')\Pi(1-a'-a''-b-b')} F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a+a'+a''+b+b'-1 \\ b'', & 1-a'-b-a, & 1-a'-b'-a \end{pmatrix}.$$

Was die Convergenz dieser Integrale betrifft, so ist sie allerdings, wenn die Integrationswege wie gewöhnlich genommen werden, an bestimmte Grössenverhältnisse der Parameter $a, b, \dots b''$ geknüpft. Man kann jedoch die Integrationswege so wählen, wie ich schon früher gezeigt habe, dass die Integrale bis auf singuläre Ausnahmen immer einen Sinn haben.

Diese Darstellung der W-Function kann besonders vortheilhaft dazu verwendet werden, Relationen zwischen contiguen Functionen herzustellen, namentlich dann, wenn die Relationen zwischen contiguen *Gauss*schen Reihen bekannt sind. So z. B. liefert die evidente Gleichung

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{ds\,d\sigma\, s^{a+b'-1}\sigma^{a+b''-1}(1-s\sigma)}{(1-s)^{a'+b'}(1-\sigma)^{a''+b''}(1-s\sigma)^{a+b+1}}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{s^{a+b'-1}\sigma^{a+b''-1}\,ds\,d\sigma}{(1-s)^{a'+b'}(1-\sigma)^{a''+b''}(1-s\sigma)^{a+b+1}} - \int_0^1\int_0^1 \frac{s^{a+b'}\sigma^{a+b''}\,ds\,d\sigma}{(1-s)^{a'+b'}(1-\sigma)^{a''+b''}(1-s\sigma)^{a+b+1}}$$

durch Umsetzung in F-Reihen die schon unter (89.) verzeichnete Gleichung.

Wenden wir die zweite der von *Gauss* (*Gauss*' Werke Bd. III S. 130) in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe gegebenen Gleichungen zwischen contiguen Functionen an, so haben wir:

$$0 = \int_0^1 ds \left\{ \begin{array}{l} (b'-b)F(\;a+b,\quad a+b',\quad a-a'+1,\, s) \\ +(a+b)F(a+b+1,\quad a+b',\quad a-a'+1,\, s) \\ -(a+b')F(\;a+b,\quad a+b'+1,\, a-a'+1,\, s) \end{array} \right\}.$$

Diese Gleichung liefert durch Umsetzung in F-Reihen die Gleichung (87.). Nehmen wir die siebente der *Gauss*schen Gleichungen, so erhalten wir

$$\int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} (b'-b)(1-s)F(a+b,\, a+b',\, a-a'+1,\, s) \\ +(a'+b-1)F(a+b-1,\, a+b',\, a-a'+1,\, s) \\ +(a'+b'-1)F(a+b,\, a+b'-1,\, a-a'+1,\, s) \end{array} \right\} ds = 0,$$

woraus sich durch Umsetzung in F-Reihen ergiebt

$$(b-b')(a''+b'')F_a\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix} + (a-a'')(a'+b-1)F_a\begin{pmatrix} a, & a', & a''+1 \\ b-1, & b', & b'' \end{pmatrix}$$
$$-F\begin{pmatrix} a, & a', & a''+1 \\ b, & b'-1, & b'' \end{pmatrix}(a'+b'-1) = 0.$$

Man sieht, dass man so aus jeder der *Gauss*schen Gleichungen eine Beziehung zwischen contiguen F-Reihen oder W-Functionen herleiten kann.

Freiburg i. B., April 1878.

On the double ϑ-functions.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

I have sought to obtain, in forms which may be useful in regard to the theory of the double ϑ-functions, the integral of the elliptic differential equation

$$\frac{dx}{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x}}+\frac{dy}{\sqrt{a-y.b-y.c-y.d-y}}=0:$$

the present paper has immediate reference only to this differential equation; but, on account of the design of the investigation, I have entitled it as above.

We may for the general integral of the above equation take a particular integral of the equation

$$\frac{dx}{\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x}}+\frac{dy}{\sqrt{a-y.b-y.c-y.d-y}}\pm\frac{dz}{\sqrt{a-z.b-z.c-z.d-z}}=0;$$

viz. this particular integral, regarding therein z as an arbitrary constant, will be the general integral of the first mentioned equation. And we may further assume that z is the value of y corresponding to the value a of x.

I write for shortness

$$a-x,\ b-x,\ c-x,\ d-x=\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c},\ \mathrm{d},$$
$$a-y,\ b-y,\ c-y,\ d-y=\mathrm{a}_1,\ \mathrm{b}_1,\ \mathrm{c}_1,\ \mathrm{d}_1;$$

and I write also (xy, bc, ad), or more shortly (bc, ad) to denote the determinant

$$\begin{vmatrix} 1, & x+y, & xy \\ 1, & b+c, & bc \\ 1, & a+d, & ad \end{vmatrix};$$

we have of course $(ad, bc)=-(bc, ad)$, and there are thus the three distinct determinants (ad, bc), (bd, ac) and (cd, ab).

We have then for each of the functions

$$\sqrt{\frac{a-z}{d-z}},\quad \sqrt{\frac{b-z}{d-z}},\quad \sqrt{\frac{c-z}{d-z}}$$

a set of four equivalent expressions, the whole system being

$$\sqrt{\frac{a-z}{d-z}} = \frac{\sqrt{a-b.a-c}\{\sqrt{adb_1c_1}+\sqrt{a_1d_1bc}\}}{(bc,ad)} = \frac{\sqrt{a-b.a-c}(x-y)}{\sqrt{adb_1c_1}-\sqrt{a_1d_1bc}}$$

$$= \frac{\sqrt{a-b.a-c}\{\sqrt{abc_1d_1}+\sqrt{a_1b_1cd}\}}{(a-c)\sqrt{bdb_1d_1}-(b-d)\sqrt{aca_1c_1}} = \frac{\sqrt{a-b.a-c}\{\sqrt{acb_1d_1}+\sqrt{a_1c_1bd}\}}{(a-b)\sqrt{cdc_1d_1}-(c-d)\sqrt{aba_1b_1}};$$

$$\sqrt{\frac{b-z}{d-z}} = \frac{\sqrt{\frac{a-b}{a-d}}\{(a-c)\sqrt{bdb_1d_1}+(b-d)\sqrt{aca_1c_1}\}}{(bc,ad)} = \frac{\sqrt{\frac{a-b}{a-d}}\{\sqrt{abc_1d_1}-\sqrt{a_1b_1cd}\}}{\sqrt{adb_1c_1}-\sqrt{a_1d_1bc}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{a-b}{a-d}}(cd,ab)}{(a-c)\sqrt{bdb_1d_1}-(b-d)\sqrt{aca_1c_1}} = \frac{\sqrt{\frac{a-b}{a-d}}\{(a-d)\sqrt{bcb_1c_1}+(b-c)\sqrt{ada_1d_1}\}}{(a-b)\sqrt{cdc_1d_1}-(c-d)\sqrt{aba_1b_1}};$$

$$\sqrt{\frac{c-z}{d-z}} = \frac{\sqrt{\frac{a-c}{a-d}}\{(a-b)\sqrt{cdc_1d_1}+(c-d)\sqrt{aba_1b_1}\}}{(bc,ad)} = \frac{\sqrt{\frac{a-c}{a-d}}\{\sqrt{acb_1d_1}-\sqrt{a_1c_1bd}\}}{\sqrt{adb_1c_1}-\sqrt{a_1d_1bc}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{a-c}{a-d}}\{(a-d)\sqrt{bcb_1c_1}-(b-c)\sqrt{ada_1d_1}\}}{(a-c)\sqrt{bdb_1d_1}-(b-d)\sqrt{aca_1c_1}} = \frac{\sqrt{\frac{a-c}{a-d}}(bd,ac)}{(a-b)\sqrt{cdc_1d_1}-(c-d)\sqrt{aba_1b_1}}.$$

The expressions in the like fourfold form for the functions $\mathrm{sn}(u+v)$, $\mathrm{cn}(u+v)$, $\mathrm{dn}(u+v)$ are given p. 63 of my Treatise on Elliptic Functions.

It is easy to verify first that the four expressions for the same function of z are identical, and next that the expressions for the three several functions

$$\sqrt{\frac{a-z}{d-z}},\ \sqrt{\frac{b-z}{d-z}},\ \sqrt{\frac{c-z}{d-z}}$$

are consistent with each other. For instance comparing the first and second expressions of $\sqrt{\frac{a-z}{d-z}}$, the equation to be verified is

$$adb_1c_1 - a_1d_1bc = (x-y)(bc,ad)$$

which is at once shown to be true. Again comparing the first and second expressions for $\sqrt{\frac{b-z}{d-z}}$, we ought to have

$$\{(a-c)\sqrt{bdb_1d_1}+(b-d)\sqrt{aca_1c_1}\}\{\sqrt{adb_1c_1}-\sqrt{a_1d_1bc}\}$$
$$= (bc,ad)\{\sqrt{abc_1d_1}-\sqrt{a_1b_1cd}\}.$$

Here the product on the lefthand side is

$$= (a-c)\{b_1d\sqrt{abc_1d_1}-bd_1\sqrt{a_1b_1cd}\}+(b-d)\{-a_1c\sqrt{abc_1d_1}+ac_1\sqrt{a_1b_1cd}\},$$

viz. this is

$$= \sqrt{\mathrm{a b c_1 d_1}}\{(a-c)\mathrm{b_1 d}-(b-d)\mathrm{a_1 c}\}-\sqrt{\mathrm{a_1 b_1 c d}}\{(a-c)\mathrm{b d_1}-(b-d)\mathrm{a c_1}\},$$

and in this last expression the two terms in $\{\}$ are at once shown to be each $=(bc, ad)$; whence the identity in question.

Comparing in like manner the first expressions for $\sqrt{\frac{a-z}{d-z}}$ and $\sqrt{\frac{b-z}{d-z}}$ respectively, we have

$$(b-d)(bc, ad)^2\frac{a-z}{d-z} = (a-b)(a-c)(b-d)\{\mathrm{adb_1c_1}+\mathrm{a_1d_1bc}+2\sqrt{\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1}}\},$$

$$(d-a)(bc, ad)^2\frac{b-z}{d-z} =$$

$$-(a-b)\{(a-c)^2\mathrm{bdb_1d_1}+(b-d)^2\mathrm{aca_1c_1}+2(a-c)(b-d)\sqrt{\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1}}\},$$

whence, adding, the radical on the right hand side disappears; the whole equation divides by $-(a-b)$, and omitting this factor, the relation to be verified is

$$(bc, ad)^2 = (a-c)^2\mathrm{bdb_1d_1}+(b-d)^2\mathrm{aca_1c_1}-(a-c)(b-d)(\mathrm{adb_1c_1}+\mathrm{a_1d_1bc});$$

the right hand side is here

$$= \{(a-c)\mathrm{b_1d}-(b-d)\mathrm{a_1c}\}\{(a-c)\mathrm{bd_1}-(b-d)\mathrm{ac_1}\},$$

and each of the two factors being $=(bc, ad)$, the identity is verified. It thus appears that the twelve equations are in fact equivalent to a single equation in x, y, z.

Writing in the several formulae $x=a, b, c, d$ successively, they become

	$x=a$,	$x=b$,	$x=c$,	$x=d$,
$\frac{a-z}{d-z}=$	$\frac{\mathrm{a_1}}{\mathrm{d_1}}$,	$-\frac{c-a}{d-b}\cdot\frac{\mathrm{b_1}}{\mathrm{c_1}}$,	$-\frac{b-a}{d-c}\cdot\frac{\mathrm{c_1}}{\mathrm{d_1}}$,	$\frac{a-b.a-c}{d-b.d-c}\cdot\frac{\mathrm{d_1}}{\mathrm{a_1}}$,
$\frac{b-z}{d-z}=$	$\frac{\mathrm{b_1}}{\mathrm{d_1}}$,	$-\frac{c-b}{d-a}\cdot\frac{\mathrm{a_1}}{\mathrm{c_1}}$,	$\frac{b-a.b-c}{d-a.d-c}\cdot\frac{\mathrm{d_1}}{\mathrm{b_1}}$,	$-\frac{a-b}{d-c}\cdot\frac{\mathrm{c_1}}{\mathrm{a_1}}$,
$\frac{c-z}{d-z}=$	$\frac{\mathrm{c_1}}{\mathrm{d_1}}$,	$\frac{c-a.c-b}{d-a.d-b}\cdot\frac{\mathrm{d_1}}{\mathrm{c_1}}$,	$-\frac{b-c}{d-a}\cdot\frac{\mathrm{a_1}}{\mathrm{b_1}}$,	$-\frac{a-c}{d-b}\cdot\frac{\mathrm{b_1}}{\mathrm{a_1}}$,

viz. for $x=a$, the relation is $z=y$, but in the other three cases respectively the relation is a linear one, $z=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$.

Rationalising the first equation for $\sqrt{\frac{a-z}{d-z}}$, we have

$$(bc, ad)^2(a-z) = (a-b)(a-c)(d-z)\{\mathrm{adb_1c_1}+\mathrm{a_1d_1bc}+2\sqrt{\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1}}\},$$

and thence

$$\{(bc,\ ad)^2(a-z)-(a-b)(a-c)(d-z)(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})\}^2$$
$$=(a-b)^2(a-c)^2(d-z)^2.\,4\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1}.$$

Expanding, and observing that

$$(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})^2=(\mathrm{adb_1c_1-a_1d_1bc})^2+4\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1}$$
$$=(bc,\ ad)^2(x-y)^2+4\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1},$$

the whole equation becomes divisible by $(bc,\ ad)^2$, and omitting this factor, the equation is

$$(bc,\ ad)^2(a-z)^2-2(a-b)(a-c)(a-z)(d-z)(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})$$
$$+(a-b)^2(a-c)^2(d-z)^2(x-y)^2=0,$$

or as this may also be written

$$z^2\{(bc,\ ad)^2-2(a-b)(a-c)(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})\qquad+(a-b)^2(a-c)^2(x-y)^2\}$$
$$-2z\{(bc,\ ad)a-\ (a-b)(a-c)(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})(a+d)+(a-b)^2(a-c)^2(x-y)^2d\}$$
$$+\ \ \{(bc,ad)a^2-2(a-b)(a-c)(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})\,ad\ \ +(a-b)^2(a-c)^2(x-y)^2d^2\}=0.$$

This is really a symmetrical equation in x, y, z of the form

$$\begin{aligned}
&A\\
&+2B(x+y+z)\\
&+\ C(x^2+y^2+z^2)\\
&+2D(yz+zx+xy)\\
&+2E(y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+x^2y+xy^2)\\
&+4Fxyz\\
&+2G(x^2yz+xy^2z+xyz^2)\\
&+\ H(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\\
&+2I(xy^2z^2+x^2yz^2+x^2y^2z)\\
&+\ Jx^2y^2z^2=0;
\end{aligned}$$

the several coefficients being symmetrical as regards b, c, d, but the a entering unsymmetrically: the actual values are

$$A=a^4(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2-2bcd(b+c+d))+2a^3bcd(bc+bd+cd)-3a^2b^2c^2d^2,$$
$$B=2a^4bcd-a^3(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)+ab^2c^2d^2,$$
$$C=-4a^3bcd+a^2(bc+bd+cd)^2-2abcd(bc+bd+cd)+b^2c^2d^2,$$
$$D=-a^4(bc+bd+cd)+a^3(b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2-2bcd)$$
$$+a^2(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2-bcd(b+c+d))-b^2c^2d^2,$$

$$E = \quad a^3(bc+bd+cd)-a^2(b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2)+abcd(b+c+d),$$
$$F = \quad a^4(b+c+d)-a^3(b^2+c^2+d^2+bc+bd+cd)+6a^2bcd$$
$$-a(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2+bcd(b+c+d))+bcd(bc+bd+cd),$$
$$G = -a^4+a^2(b^2+c^2+d^2-bc-bd-cd)+a(b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2-2bcd)$$
$$-bcd(b+c+d),$$
$$H = \quad a^4-2a^3(b+c+d)+a^2(b+c+d)^2-4abcd,$$
$$I = \quad a^3-a(b^2+c^2+d^2)+2bcd,$$
$$J = -3a^2+2a(b+c+d)+b^2+c^2+d^2-2(bc+bd+cd).$$

It may be remarked by way of verification that the equation remains unaltered on substituting for x, y, z, a, b, c, d their reciprocals and multiplying the whole by $a^4b^2c^2d^2x^2y^2z^2$.

I further remark that writing $a=0$, we have

$$A=0,\ B=0,\ C=b^2c^2d^2,\ D=-b^2c^2d^2,\ E=0,\ F=bcd(bc+bd+cd),$$
$$G=-bcd(b+c+d),\ H=0,\ I=2bcd,\ J=b^2+c^2+d^2-2(bc+bd+cd);$$

and writing also $\varepsilon=1$, $-\delta=(b+c+d)$, $\gamma=bc+bd+cd$, $-\beta=bcd$, (whence $a-x.b-x.c-x.d-x=\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4$), we have the formula

$$\begin{aligned}&\beta^2(x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy)\\&-4\beta\gamma\, xyz\\&-2\beta\delta\, xyz(x+y+z)\\&-4\beta\varepsilon\, xyz(yz+zx+xy)\\&+(\delta^2-4\gamma\varepsilon)x^2y^2z^2 \;=\; 0,\end{aligned}$$

given p. 348 of my Elliptic Functions as a particular integral of the differential equation when the radical is $\sqrt{\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}$.

Let the equation in (x,y,z) be called $u=0$; u has been given in the form $u=\mathfrak{C}z^2-2\mathfrak{B}z+\mathfrak{A}$, and we thence have $\frac{1}{2}\frac{du}{dz}=\mathfrak{C}z-\mathfrak{B}$, which in virtue of the equation $u=0$ itself, becomes $\frac{1}{2}\frac{du}{dz}=\sqrt{\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$; we find easily

$$\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C} \;=\; (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\{(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})^2-(bc,\,ad)^2(x-y)^2\}$$

or attending to the relation

$$\begin{aligned}(\mathrm{adb_1c_1+a_1d_1bc})^2 &= (\mathrm{adb_1c_1-a_1d_1bc})^2+4\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1}\\&= (bc,\,ad)^2(x-y)^2+4\mathrm{abcda_1b_1c_1d_1},\end{aligned}$$

this is

$$\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 4(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\text{abcda}_1\text{b}_1\text{c}_1\text{d}_1,$$

or we have

$$\tfrac{1}{4}\frac{du}{dz} = (a-b)(a-c)(a-d)\sqrt{\text{abcd}}\sqrt{\text{a}_1\text{b}_1\text{c}_1\text{d}_1}.$$

Writing $a-z, b-z, c-z, d-z = \text{a}_2, \text{b}_2, \text{c}_2, \text{d}_2$, we have of course the like formula

$$\tfrac{1}{4}\frac{du}{dx} = (a-b)(a-c)(a-d)\sqrt{\text{a}_1\text{b}_1\text{c}_1\text{d}_1}\sqrt{\text{a}_2\text{b}_2\text{c}_2\text{d}_2},$$

$$\tfrac{1}{4}\frac{du}{dy} = (a-b)(a-c)(a-d)\sqrt{\text{abcd}}\sqrt{\text{a}_2\text{b}_2\text{c}_2\text{d}_2}$$

and the equation $du = 0$, then gives

$$\frac{dx}{\sqrt{\text{abcd}}}+\frac{dy}{\sqrt{\text{a}_1\text{b}_1\text{c}_1\text{d}_1}}+\frac{dz}{\sqrt{\text{a}_2\text{b}_2\text{c}_2\text{d}_2}} = 0,$$

as it should do. The differential equation might also have been verified directly from any one of the expressions for $\sqrt{\frac{a-z}{d-z}}$, $\sqrt{\frac{b-z}{d-z}}$ or $\sqrt{\frac{c-z}{d-z}}$.

Writing for shortness $X = a-x\cdot b-x\cdot c-x\cdot d-x$, etc., then for the differential equation

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0$$

the general integral by *Abel's* theorem is

$$\begin{vmatrix} x^2, & x, & 1, & \sqrt{X} \\ y^2, & y, & 1, & \sqrt{Y} \\ z^2, & z, & 1, & \sqrt{Z} \\ w^2, & w, & 1, & \sqrt{W} \end{vmatrix} = 0,$$

where w is the constant of integration: and it is to be shown that the value of w which corresponds to the integral given in the present paper is $w = a$. Observe that writing in the determinant $w = a$, the determinant on putting therein $x = a$, would vanish whether z were or were not $= y$, but this is on account of an extraneous factor $a-w$, so that we do not thus prove the required theorem that (w being $= a$) we have $y = z$ when $x = a$.

An equivalent form of *Abel's* integral is that there exist values A, B, C such that

$$\begin{aligned} Ax^2+Bx+C &= \sqrt{X}, \\ Ay^2+By+C &= \sqrt{Y}, \\ Az^2+Bz+C &= \sqrt{Z}, \\ Aw^2+Bw+C &= \sqrt{W}, \end{aligned}$$

or, what is the same thing, that we have identically

$$(A\theta^2+B\theta+C)^2-\Theta = (A^2-1).\theta-x.\theta-y.\theta-z.\theta-w.$$

We have therefore

$$C^2-abcd = (A^2-1)xyzw,$$

or say

$$xyzw = \frac{C^2-abcd}{A^2-1};$$

which equation, regarding therein A, B, C as determined by the three equations

$$\begin{aligned} Ax^2+Bx+C &= \sqrt{X}, \\ Ay^2+By+C &= \sqrt{Y}, \\ Aw^2+Bw+C &= \sqrt{W}, \end{aligned}$$

is a form of *Abel's* integral, giving z rationally in terms of x, y, w.

Supposing that when $x = a$, $z = y$, then the last-mentioned integral gives

$$ay^2w = \frac{C^2-abcd}{A^2-1},$$

where A, C are now determined by the equations

$$\begin{aligned} Aa^2+Ba+C &= 0, \\ Ay^2+By+C &= \sqrt{Y}, \\ Aw^2+Bw+C &= \sqrt{W}, \end{aligned}$$

and, imagining these values actually substituted, it is to be shown that the equation

$$ay^2w = \frac{C^2-abcd}{A^2-1}$$

is satisfied by the value $w = a$.

We have

$$\begin{aligned} A.a-y.a-w.w-y &= (a-w)\sqrt{Y}-(a-y)\sqrt{W}, \\ B.a-y.a-w.w-y &= (a-w)(a+w)\sqrt{Y}-(a-y)(a+y)\sqrt{W}, \\ C.a-y.a-w.w-y &= (a-w)aw\sqrt{Y}-(a-y)ay\sqrt{W}, \end{aligned}$$

or writing as before $a-y,\ b-y,\ c-y,\ d-y = \mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1, \mathrm{d}_1$ and also $a-w,\ b-w,\ c-w,\ d-w = \mathrm{a}_3, \mathrm{b}_3, \mathrm{c}_3, \mathrm{d}_3$, then $Y = \mathrm{a}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1$, $W = \mathrm{a}_3\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3$, and the formulae become

$$A = \frac{1}{(w-y)\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_3}}\{\sqrt{\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1} - \sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}\},$$

$$B = \frac{1}{(w-y)\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_3}}\{-(a+w)\sqrt{\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1} + (a+y)\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}\},$$

$$C = \frac{1}{(w-y)\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_3}}\{aw\sqrt{\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1} - ay\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}\}.$$

If in these formulae w is indefinitely nearly $= a$, then a_3 is indefinitely small, so that $\sqrt{\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1}$ may be neglected in comparison with $\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}$, also $w-y$ may be put $= \mathrm{a}_1$; the formulae thus become

$$A = -\frac{\sqrt{\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}}{\mathrm{a}_1\sqrt{\mathrm{a}_3}},\quad B = (a+y)\frac{\sqrt{\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}}{\mathrm{a}_1\sqrt{\mathrm{a}_3}},\quad C = -ay\frac{\sqrt{\mathrm{b}_3\mathrm{c}_3\mathrm{d}_3}}{\mathrm{a}_1\sqrt{\mathrm{a}_3}},$$

where the values of A, B, C are each of them indefinitely large on account of the factor $\sqrt{\mathrm{a}_3}$ in the denominator: the value of C is $C = ayA$, and substituting this value in the equation

$$ay^2w = \frac{C^2 - abcd}{A^2-1},$$

and then considering A as indefinitely large it becomes $ay^2w = a^2y^2$, that is $w = a$; so that $w = a$ is a value of w satisfying this equation.

Cambridge, 3 July 1878.

On a theorem relating to covariants.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

The theorem given by Prof. *Sylvester*, vol. 85 p. 109, may be stated as follows: If for a binary quantic of the order i in the variables, we consider the whole system of covariants of the degree j in the coefficients, then

$$\Sigma\theta(k+1) = \frac{\Pi(i+j)}{\Pi(i)\Pi(j)},$$

where θ denotes the number of asyzygetic covariants of the order θ in the variables, the values of θ being ij, $ij-2$, $ij-4$, ... 1 or 0, according as ij is odd or even.

In the case of the binary quintic $(a, \ldots \between x, y)^5$, $(i=5)$ we have a series of verifications in the Table 88 of my „Ninth Memoir on Quantics" Phil. Trans. vol. 161 (1871): viz. writing the small letters $a, b, c, \ldots u, v, w$ (instead of the capitals A, B, etc.) to denote the covariants of the quintic, a, the quintic itself, degree 1, order 5, or as I express it, deg-order 1.5, b the covariant deg-order 2.2 etc., the whole series of deg-orders being

a,	b,	c,	d,	e,	f,	g,	h,	i,	j,	k,	l,
1.5,	2.2,	2.6,	3.3,	3.5,	3.9,	4.0,	4.4,	4.6,	5.1,	5.3,	5.7,

m,	n,	o,	p,	q,	r,	s,	t,	u,	v,	w,
6.2,	6.4,	7.1,	7.5,	8.0,	8.2,	9.3,	11.1,	12.0,	13.1,	18.0,

then the table shows for each deg-order, the several covariants of that deg-order, and the number of them which are asyzygetic; for instance $i=5$ as above, $j=6$, an extract from the table is

j	k	θ		$(k+1)\theta$
6	30	1	a^6	31
	28	0		0
	26	1	a^4c	27
	24	1	a^3f	25
	22	2	$a^4b,\ a^2c^2$	46
	20	2	$a^3e,\ acf$	42
	18	3	$a^3d,\ a^2bc,\ c^3,\ f^2$	57
	16	2	$a^2i,\ abf,\ ace$	34
	14	4	$a^2b^2,\ a^2h,\ acd,\ bc^2,\ ef$	60
	12	3	$abe,\ al,\ ce,\ df$	39
	10	4	$a^2g,\ abd,\ b^2c,\ ch,\ e^2$	44
	8	2	$ak,\ bi,\ de$	18
	6	4	$aj,\ b^3,\ bh,\ cg,\ d^2$	28
	4	1	n	5
	2	2	$bg,\ m$	6
	0	0		0

$$462 = \frac{\Pi(11)}{\Pi(5)\Pi(6)},$$

where for instance deg-order 6.14, the covariants are a^2b^2, a^2h, acd, b^2c, ef, but the number against these in the third column being (not 5 but) 4, the meaning is that there exists between these five terms one syzygy, making the number of asyzygetic covariants of the deg-order 6.14 to be 4. The second column thus in fact contains the several values of k, and the third column the corresponding values of θ; whence forming the several products $(k+1)$ as shown, the sum of these is as it should be $= 462$.

Cambridge, 13 July 1878.

Zurückführung des Problems der Kreistheilung auf lineare Gleichungen (für Primzahlen von der Form 2^m+1).

(Von Herrn *Hermes* in Königsberg i. Pr.)

Bezeichnung.

Die Primzahl $p = m+1$ sei von der Form 2^m+1, worin nun, damit p Primzahl sein kann, der Exponent m auch wieder von der Form 2^μ sein muss, also $p = 2^{2^\mu}+1$.

Der Werth $\frac{m}{2.\mathfrak{m}}$ werde ϑ genannt, so ist beiläufig ϑ die Zahl der aus der Figur abzulesenden Gleichungen bei geometrischer Behandlung der Aufgabe.

Der Fall $\mu = 0$ entspricht dem regulären Dreieck, $\mu = 1$ dem Fünfeck, $\mu = 2$ dem Siebenzehneck, $\mu = 3$ dem 257-Eck, $\mu = 4$ dem 65537-Eck, $\mu = 5$ ergiebt keine Primzahl etc.

Eine beliebige primitive Wurzel von p sei g, also $g^m \equiv +1$ (mod. p), wenn keine kleinere Zahl als $m = p-1$ der Congruenz genügt.

Diejenige primitive Wurzel aber, deren 2te, 4te, 8te, ... Potenzreste sämmtlich positive Zahlen $\lesseqgtr \frac{m}{2}$ und deren ϑ^{te}, $2\vartheta^{\text{te}}$, $4\vartheta^{\text{te}}$, ... Potenzen folglich der Reihe nach $\equiv +2$, $+4$, $+16$ etc. (mod. p) werden, sei mit ε bezeichnet, für $p = 17$ ist $\varepsilon = 6$, für $p = 257$ wird $\varepsilon = 115$ und für $p = 65537$ wird $\varepsilon = 11490$.

Die erste primitive Wurzel der Gleichung $x^{\mathfrak{v}}-1 = 0$, wobei $\mathfrak{v} = 2^\nu$ ist, werde $\overset{\nu}{\omega}$ genannt, also $\overset{\nu}{\omega} = \cos\frac{2\pi}{\mathfrak{v}} + i\sin\frac{2\pi}{\mathfrak{v}}$; ν nimmt nacheinander die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... an. Wo Irrthum nicht zu befürchten, sind der Kürze halber die oberen Indices ν weggelassen.

Die Anzahlen der Reste $\mathfrak{r}$ von ind β + ind $(\beta+1)$ (mod. $\mathfrak{v}$), auf deren Ermittlung bekanntlich das Problem der Kreistheilung zuletzt hinausläuft, seien $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0 \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_1 \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_2 \ldots$ und die Differenzen je zweier um $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ dem unteren Index nach verschiedenen seien durch $\overset{\nu}{e}_0 \overset{\nu}{e}_1 \overset{\nu}{e}_2 \ldots$ bezeichnet.

Die $\frac{m}{\mathfrak{v}}$te Potenz der primitiven Wurzel ε sei $\equiv \overset{\nu}{m}$ (mod. p), daher kann das Zeichen $\overset{\nu}{m}$ verschiedene um Vielfache von p unter einander abweichende Werthe besitzen, $\overset{\nu}{\underline{m}}$ möge den bedeuten, der (numerisch) $\overline{\gtrless}\frac{m}{2}$ ist, so ist für:

$$\nu = 0,\quad \varepsilon^m \equiv +1 \quad \text{oder} \quad \equiv m^2, \text{ daher } \overset{0}{\underline{m}} = +1; \quad \overset{0}{m} = m^2,$$

$$\nu = 1,\quad \varepsilon^{\frac{m}{2}} \equiv -1 \quad \text{oder} \quad \equiv m, \text{ daher } \overset{1}{\underline{m}} = -1; \quad \overset{1}{m} = m,$$

$$\nu = 2,\quad \varepsilon^{\frac{m}{4}} \equiv \quad +\sqrt[2^1]{m}, \quad \overset{2}{\underline{m}} = +\sqrt{m}, = \overset{2}{m} = +\sqrt{m},$$

$$\nu = 3,\quad \varepsilon^{\frac{m}{8}} \equiv \quad +\sqrt[2^2]{m}, \quad \overset{3}{\underline{m}} = \overset{3}{m} = \sqrt[4]{m},$$

etc.

$\nu = \mu+1$, $\varepsilon^{\mathfrak{v}} \equiv \sqrt[\mathfrak{m}]{m} = 2$, da $\varepsilon^{\mathfrak{v}} \equiv 2$ sein sollte, also $\overset{(\mu+1)}{\underline{m}} = 2 = \overset{(\mu+1)}{m}$, aber bei $\nu = \mu+2$ wird $\overset{(\mu+2)}{m} = \sqrt{2}$ zu setzen sein, falls diese Irrationalgrösse in den Formeln einen Sinn behält (und dies ist in der That der Fall), während $\overset{(\mu+2)}{\underline{m}} = +x$ ist, wobei x der Congruenz $x^2 \equiv 2$ (mod. p) genügt, also eine ganze Zahl ist.

Ist endlich $\nu = \mathfrak{m}$, so erhält man $\sqrt[2^{\mathfrak{m}-1}]{m} \equiv \varepsilon$, denn $\varepsilon^{\frac{m}{2}} \equiv m$ (mod. p), also $\overset{\mathfrak{m}}{\underline{m}}$ ist die primitive Wurzel ε selbst. Ferner werde $\frac{m}{\mathfrak{v}}$ mit $\overset{\nu}{N}$ und $(\overset{\nu}{m})^r + (-1)^r (\overset{\nu}{m})^{-r}$ mit $\overset{\nu}{\partial}_r$ bezeichnet; doch soll ∂_0 nicht 2 sondern 1 bedeuten und ∂_1 schlechthin durch ∂ abgekürzt werden. ∂_r wird dann bekanntlich gleich $\partial^r + \delta_1 \partial^{r-2} + \delta_2 \partial^{r-4} + \cdots + \delta_\varrho \partial^{r-2\varrho} + \cdots$, worin die Coefficienten der Ergänzung δ_ϱ das Gesetz $\frac{r.(r-(\varrho+1))(r-(\varrho+2))\dots(r-(2\varrho-1))}{1.2.3\dots\varrho} = \delta_\varrho$ befolgen.

Die Perioden sind wie gewöhnlich durch den Buchstaben η angedeutet. $\overset{\nu}{\eta}$ hat $\overset{\nu}{N}$ Glieder; endlich sei $\frac{\mathfrak{v}}{8} = v$ und $(\overset{\nu}{m})^v = \sqrt[4]{m} = \mathfrak{n}$ genannt.

Vorbemerkung.

Die nachstehenden Resultate gestatten in gewissem Falle, nämlich wenn $\nu \geqq \mu + 2$ wird, keine Verificirung durch die bei den kleineren Ecken bekannten und leicht aufzustellenden Formeln und Zahlen, sondern müssen da zuvor modificirt werden.

Dies ist wahrscheinlich der Grund gewesen, wesshalb die Formeln bisher unbekannt geblieben, denn aus der Analogie der kleineren Ecke $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = 2$ konnte somit nichts für die grösseren geschlossen werden.

Die Modification der Formeln macht eine besondere vor der Hand zurücktretende Untersuchung nöthig und soll daher im Folgenden nur im leichtesten Falle berührt werden.

Resultate.

Bildet man für eins der construirbaren regulären Primzahlecke eine Tabelle (I) $\overset{m}{\underset{1\cdots}{h\cdots}}\ \varepsilon^h \equiv \beta_h \pmod{p}$, wo also $h = \operatorname{ind}\beta$ und $0 < \beta < p$ ist, und dann, dieselbe in üblicher Weise umkehrend, eine zweite, nach β geordnete

β	ind β
1	0
2	ϑ
$\vdots$	$\vdots$
m	$\frac{m}{2}$

und dann eine dritte $\overset{m-1}{\underset{1\cdots}{\beta\cdots}}\ \operatorname{ind}\beta + \operatorname{ind}(\beta+1)$, und werden nun sämmtliche Zahlen dieser dritten Tabelle $\equiv \mathfrak{r} \pmod{\mathfrak{v}}$ genommen $0 < \mathfrak{r} < \mathfrak{v}$, so wird

$\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0$ mal der Rest Null erhalten,

$\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_1$ mal der Rest Eins etc.

„Es ist nun möglich, diese für die Kreistheilung wichtigen Anzahlen direct*) zu erhalten, ohne Aufstellen einer Indextabelle.“

Die *Summe* je zweier um $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ dem untern Index nach verschiedener $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}$ ist nämlich gleich den $\overset{\nu-1}{\mathfrak{e}}$, also als bekannt anzusehen, die *Differenz* derselben beiden $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}$, bezeichnet durch $\overset{\nu}{e}$, erhält man, nachdem das System von $\mathfrak{v}^2$ linearen Gleichungen:

$$\overset{\mathfrak{v}}{\underset{1\cdots}{h\cdots}}\ \overset{\mathfrak{v}-1}{\underset{0\cdots}{r\cdots}}\ \sum_{1}^{2r-1}{}_k \sum_{0}^{r-1}{}_l (k,l).\mathfrak{z}\left[\frac{R}{2r}\right] + \{0, 2r\} = 0$$

*) Nachdem diese Anzahlen gewonnen, war es möglich, die Perioden η selbst exact zu erhalten, ebenfalls die $\psi(\alpha)$, Φ und F.

für die Unbekannten (k, l) aufgelöst, ***allgemein*** (jedoch $3 < \nu < \mu + 2$) durch folgende Formeln:

$$\frac{\overset{\nu}{e}_0}{\mathfrak{n}} = \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_{\varrho} (0, 2\varrho) \overset{\nu}{\partial}_{2\varrho} + (0, \mathfrak{v}) \overset{\nu}{\partial}_{\mathfrak{v}}$$

$$\frac{\overset{\nu}{e}_\varkappa}{\mathfrak{n}} = \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_{\varrho} (\varkappa, 2\varrho) \partial_{2\varrho} \ (\varkappa \text{ gerade}); \quad \frac{\overset{\nu}{e}_\lambda}{\mathfrak{n}} = \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_{\varrho} (\lambda, 2\varrho+1) \partial_{2\varrho+1} \ (\lambda \text{ ungerade});$$

Hiezu kommt, dass die dem Index nach ungeraden $\overset{\nu}{e}$, deren Indices zusammen $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ betragen, einander gleich sind. Die dem Index nach geraden $\overset{\nu}{e}$, bei denen dies stattfindet, sind einander entgegengesetzt. Das $\overset{\nu}{e}$ in der Mitte ist $= 0$, das am Anfange stehende $\overset{\nu}{e}_0$ ist $\equiv -1 \pmod{4}$.

In den Gleichungen bedeutet $R = k(2h-1) \pm l + \alpha . \frac{\mathfrak{v}}{2}$ eine Zahl, die abgesehen vom Vorzeichen $< 2\mathfrak{v}$ gemacht werden muss, was durch Bestimmung der positiven oder negativen ganzen Zahl α zu erreichen ist, und zwar nimmt man nach Bedürfniss entweder $+l$ oder $-l$, nie beides.

Für $+l$ ist $\mathfrak{z} = (-1)^\alpha$ und für $-l$ ist $\mathfrak{z} = (-1)^{\alpha+l}$. Die Parenthese $\left[\frac{R}{2r}\right]$ bedeutet immer die *positive* Einheit, ausser wenn in ihr der Zähler (abgesehen vom Zeichen) nicht gleich dem Nenner ist, dann bedeutet sie Null. Dies ist unter andern immer der Fall, wenn $k + l$ ungerade.

$$\{0, 2r\} \text{ ist } \left\{ \begin{array}{ll} = \frac{1}{2}(0, 0) \text{ für } & r = 0 \\ = (0, 2r) \text{ für } & r < \frac{\mathfrak{v}}{2} \\ = -1 \text{ für } & r = \frac{\mathfrak{v}}{2} \\ = \text{Null für } & r > \frac{\mathfrak{v}}{2} \end{array} \right\} \text{ zu setzen.}$$

Die Coefficienten der Unbekannten (k, l) in diesen $\mathfrak{v}^2$ Gleichungen sind also meistens Null, zuweilen $+1$, zuweilen -1 und befolgen bei eingehender Betrachtung kein so schwieriges Gesetz, als es *hienach* erscheinen möchte.

Gehen wir die einzelnen Fälle dieses allgemeinen Resultates durch.

Die Fälle $\nu = 0$ und $\nu = 1$ kommen nicht in Betracht. Für $\nu = 2$ und $\nu = 3$ sind die e, wie vorhin erwähnt, *bekannt* *) und *nicht* in vorstehenden Formeln enthalten, da $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ für diese ν ein Bruch wird.

---

*) *Jacobi*, dieses Journal Bd. 30 p. 167; vgl. *Bachmann*, Lehre d. Kreistheilung p. 137 ff.

$$\nu = 2. \quad (\overset{2}{m} = \sqrt{m})$$

$\overset{2}{e}_0 = -1$, $\overset{2}{e}_1 = \overset{2}{m}$, sonst durch a und b bezeichnet.

Beispiele.

$$\mu = 2, \quad e_0 = -1, \quad e_1 = 4, \quad (-1)^2 + (4)^2 = 17,$$
$$\mu = 3, \quad e_0 = -1, \quad e_1 = 16, \quad (-1)^2 + (16)^2 = 257,$$
$$\mu = 4, \quad e_0 = -1, \quad e_1 = 256, \quad (-1)^2 + (256)^2 = 65537.$$

$$\nu = 3. \quad (\mathfrak{v} = 1, \ \overset{3}{m} = \sqrt[4]{m}, \ \mathfrak{n} = \sqrt[4]{m}),$$

$$\frac{\overset{3}{e}_0}{\mathfrak{n}} = (0, 1)\overset{3}{\partial} \quad \text{und} \quad \frac{\overset{3}{e}_1}{\mathfrak{n}} = (1, 0), \quad \overset{3}{\partial} = (\overset{3}{m})^1 - (\overset{3}{m})^{-1};$$

eine Gleichung $(0, 1) + (1, 0) = 0$, $(0, 1) = +1$, also $(1, 0) = -1$.

Mithin

$$\frac{e_0}{\mathfrak{n}} = \partial, \quad \text{also} \quad e_0 = \mathfrak{n}\partial = \sqrt{m} - 1,$$
$$\frac{e_1}{\mathfrak{n}} = -1, \quad e_1 = -\mathfrak{n} = -\sqrt[4]{m};$$

e_2 ist $= 0$ und e_3 ist $= e_1$, also $= -\sqrt[4]{m}$. Dies sind die Grössen c und d, *Jacobi* a. a. O.

Beispiele.

$$\mu = 3.$$
$$e_0 = 15, \quad e_1 = -4, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -4, \quad (15)^2 + 2(-4)^2 = 257.$$

$$\mu = 4.$$
$$e_0 = 255, \quad e_1 = -16, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = -16, \quad (255)^2 + 2(-16)^2 = 65537.$$

Die Formeln sind *für* $\mu = 2$ zu modificiren in

$$\frac{e_0}{\mathfrak{n}} = -\partial, \quad \text{also} \quad e_0 = -3, \quad e_2 = 0,$$
$$\frac{e_1}{\mathfrak{n}} = +1 \qquad e_1 = +2 = e_3. \qquad (-3)^2 + 2(2)^2 = 17.$$

$$\nu = 4. \quad (\mathfrak{v} = 2, \ \overset{4}{m} = \sqrt[8]{m}, \ \mathfrak{n} = \sqrt[4]{m}.)$$

$\mathfrak{v}^2 = 4$ Gleichungen.

Um die erste aufzustellen, haben wir also

$$h = 1, \quad r = 0, \quad \frac{\mathfrak{v}}{2} = 8$$

zu setzen. Dann bilden wir für $k=1$, $l=1$, $R=k(2h-1)\pm l+\alpha.8$, also $1.1\pm1+\alpha.8$ und $2r=2.0=0$,

$$\left[\frac{R}{2r}\right]=\left[\frac{1.1\pm1+\alpha.8}{0}\right]$$

ergiebt für das Minuszeichen und $\alpha=0$ den Werth $\left[\frac{0}{0}\right]$, also Zähler und Nenner gleich, mithin $\left[\frac{R}{2r}\right]=+1$. Das dazugehörige $\mathfrak{z}$ wird $(-1)^{0+1}$ also -1; mithin ist der Coefficient von $(1,1)$ die negative Einheit -1.

Ferner $k=3$, $l=1$.

$$\left[\frac{R}{2r}\right]=\left[\frac{3.1\pm1+\alpha.8}{0}\right]=[\infty],$$

also gleich Null zu setzen, denn kein ganzzahliges α macht den Zähler gleich dem Nenner; der Coefficient von $(1,3)$ ist also Null.

Ferner $k=2$, $l=0$, .

$$\left[\frac{R}{2r}\right]=\left[\frac{2.1\pm0+\alpha.8}{0}\right]=0,$$

Coefficient von $(2,0)$ also auch Null; endlich $\{0,0\}=\frac{1}{2}(0,0)$ und folglich die erste

Gleichung $(h=1,\ r=0)$, $-1.(1,1)+0.(3,1)+0.(2,0)+\frac{1}{2}(0,0)=0$,
ebenso für $(h=1,\ r=1)$, $+1.(1,1)-1.(3,1)+1.(2,0)\quad -1=0$,
ferner $(h=2,\ r=0)$, $0.(1,1)+1.(3,1)+0.(2,0)+\frac{1}{2}(0,0)=0$,
endlich $(h=2,\ r=1)$, $-1.(1,1)-1.(3,1)-1.(2,0)\quad -1=0$,

denn $(0,2)=-1$. Das *Coefficientenschema* dieser Gleichungen ist also:

		(1, 1)	(3, 1)	½(0, 0)	(2, 0)	fr. Gl.
$h=1$	$r=0$	−		+		
	$r=1$	+	−		+	−1
$h=2$	$r=0$		+	+		
	$r=1$	−	−		−	−1
	Werthe:	(+1)	(−1)	(+1)	(−1)	

Lösen wir diese 4 linearen Gleichungen auf, so ergeben sich folgende Werthe

$$(0,2)=-1,\quad (0,0)=2,\quad (1,1)=+1,$$
$$(2,0)=-1,\quad (3,1)=-1,$$

mithin $\quad (\overset{4}{\partial} = (\overset{4}{m})^1 - (\overset{4}{m})^{-1}$ und $\partial_2 = (\overset{4}{m})^2 + (\overset{4}{m})^{-2}, \quad \partial_0 = 1),$

$$\frac{e_0}{\mathfrak{n}} = (0,2)\partial_2 + (0,0)\partial_0, \quad \frac{e_1}{\mathfrak{n}} = (1,1)\partial,$$

$$\frac{e_2}{\mathfrak{n}} = \qquad (2,0)\partial_0, \quad \frac{e_3}{\mathfrak{n}} = (3,1)\partial,$$

mit Benutzung der gefundenen Coefficienten

$$\frac{e_0}{\mathfrak{n}} = -\partial_2 + 2 = -\partial^2; \quad e_0 = -\mathfrak{n}\partial^2 = -(\sqrt[4]{m}-1)^2,$$

$$\frac{e_2}{\mathfrak{n}} = -1, \qquad e_2 = -\mathfrak{n} \quad = -\sqrt[4]{m},$$

$$\frac{e_1}{\mathfrak{n}} = \partial, \qquad e_1 = \mathfrak{n}\partial \quad = \sqrt[8]{m}(\sqrt[4]{m}-1),$$

$$\frac{e_3}{\mathfrak{n}} = -\partial, \qquad e_3 = -\mathfrak{n}\partial = -\sqrt[8]{m}(\sqrt[4]{m}-1),$$

$$e_4 = 0, \quad e_5 = e_3, \quad e_6 = -e_2, \quad e_7 = e_1.$$

Beispiele.

$\mu = 3.$

$$e_0 = -9, \quad e_2 = -4, \quad e_4 = 0, \quad e_6 = +4,$$
$$e_1 = 6, \quad e_3 = -6, \quad e_5 = -6, \quad e_7 = +6,$$
$$(-9)^2 + 2(4^2 + 6^2 + (-6)^2) = 257.$$

Diese Zahlen sind von *Richelot* dieses Journal Bd. IX, Seite 215 durch Abzählen ermittelt.

$\mu = 4.$

$$e_0 = -225, \quad e_2 = -16, \quad e_4 = 0, \quad e_6 = +16,$$
$$e_1 = 60, \quad e_3 = -60, \quad e_5 = -60, \quad e_7 = +60,$$
$$(-225)^2 + 2((16)^2 + (60)^2 + (-60)^2) = 65537.$$

Die vorstehenden Formeln sind für $\mu = 2$ zu modificiren in $e_0 = 0$, e_0 und e_4 vertauschen hier ihre Rollen,

$\frac{e_4}{\mathfrak{n}} = -\partial^2, \quad \frac{e_1}{\mathfrak{n}} = \sqrt{2}\,\partial,$ (die Einführung der Irrationalität ist nothwendig, denn nur so wird $\Sigma e^2 = p$),

$$\frac{e_2}{\mathfrak{n}} = +1, \quad \frac{e_3}{\mathfrak{n}} = 0,$$
$$e_6 = +e_2, \quad e_5 = -e_3,$$
$$e_7 = -e_1.$$

Hier ist $\mathfrak{n} = 2$ und $\overset{4}{m} = \sqrt{2}$ und die Zahlenwerthe selbst werden folgende:

$$e_0 = 0, \quad e_2 = 2, \quad e_4 = -1, \quad e_6 = 2, \quad e_1 = 2, \quad e_7 = -2, \quad e_3 = e_5 = 0,$$
$$(-1)^2 + 4(2)^2 = 17.$$

Bevor wir zu dem folgenden Falle $\nu = 5$ übergehen, mögen hier noch die Formeln für die $\overset{4}{e}$ Platz finden. $\vartheta = \frac{m}{\mathfrak{v}} = \frac{m}{16}$ (Durchschnittswerth); $\overset{4}{m} = \sqrt[8]{m} = w$,

$\overset{4}{e}_h$	allgemein	Beispiel $\mu = 3$	$\mu = 4$	modificirt für $\mu = 2$	
e_0	$\vartheta-\frac{w^4}{4}+w^2-1$	15 mal	4047 mal	$\vartheta-\frac{w^4}{4}$	0 mal wird der Rest Null erhalten.
e_4	$\vartheta-\frac{w^4}{4}$	12 -	4032 -	$\vartheta-\frac{w^4}{4}+w^2-1$	1 mal der Rest 4.
e_8	$\vartheta+\frac{3}{4}w^4-w^2$	24 -	4272 -	$\vartheta-\frac{w^4}{4}$	0 mal Rest 8.
e_{12}	$\vartheta-\frac{w^4}{4}$	12 -	4032 -	$\vartheta+\frac{3}{4}w^4-w^2$	2 mal der Rest 12.
e_2	$\vartheta \quad -\frac{1}{2}w^2$	14 -	4088 -	$\vartheta \quad +\frac{w^2}{2}$	2 mal der Rest 2.
e_6	$\vartheta \quad +\frac{1}{2}w^2$	18 -	4104 -	$\vartheta \quad +\frac{w^2}{2}$	2 mal der Rest 6.
e_{10}	$\vartheta \quad +\frac{1}{2}w^2$	18 -	4104 -	$\vartheta \quad -\frac{w^2}{2}$	0 mal der Rest 10.
e_{14}	$\vartheta \quad -\frac{1}{2}w^2$	14 -	4088 -	$\vartheta \quad -\frac{w^2}{2}$	0 mal der Rest 14.
e_1	$\vartheta-\frac{w^4}{8}-\frac{w^2}{4}+\frac{w^3}{2}-\frac{w}{2}$	16 -	4090 -	$\vartheta-\frac{w^4}{8}+\frac{w^2}{4}+\frac{\sqrt{2}w^3}{2}-\frac{\sqrt{2}w}{2}$	2 mal der Rest 1.
e_3	$\vartheta+ \quad - \quad - \quad +$	14 -	4094 -	$\vartheta+\frac{w^4}{8}+\frac{w^2}{4}$	2 mal der Rest 3.
e_5	$\vartheta- \quad + \quad - \quad +$	12 -	4038 -	$\vartheta-\frac{w^4}{8}-\frac{w^2}{4}$	0 mal der Rest 5.
e_7	$\vartheta+ \quad + \quad + \quad -$	22 -	4162 -	$\vartheta+\frac{w^4}{8}-\frac{w^2}{4}-\frac{\sqrt{2}w^3}{2}+\frac{\sqrt{2}w}{2}$	0 mal der Rest 7.
e_9	$\vartheta- \quad - \quad - \quad +$	10 -	4030 -	$\vartheta-\frac{w^4}{8}+\frac{w^2}{4}-\frac{\sqrt{2}w^3}{2}+\frac{\sqrt{2}w}{2}$	0 mal der Rest 9.
e_{11}	$\vartheta+ \quad - \quad + \quad -$	20 -	4154 -	$\vartheta+\frac{w^4}{8}+\frac{w^2}{4}$	2 mal der Rest 11.
e_{13}	$\vartheta- \quad + \quad + \quad -$	18 -	4098 -	$\vartheta-\frac{w^4}{8}-\frac{w^2}{4}$	0 mal der Rest 13.
e_{15}	$\vartheta+ \quad + \quad - \quad +$	16 -	4102 -	$\vartheta+\frac{w^4}{8}-\frac{w^2}{4}+\frac{\sqrt{2}w^3}{2}-\frac{\sqrt{2}w}{2}$	2 mal der Rest 15, wenn $\operatorname{ind}\beta+\operatorname{ind}(\beta+1)\equiv \mathfrak{r} \bmod 16$ gebildet wird.
Summe	$m-1$	255 ($\varepsilon=115$)	65535 ($\varepsilon=11490$)		15 ($\varepsilon=6$).

Stellen wir für $\mu = 2$ (als ε die Zahl 6 nehmend) die vorerwähnten drei Tabellen auf:

I. ε^h	$\equiv \beta_h$(mod. 17).	II. β.	ind β.	III. ind β + ind$(\beta+1) \equiv$	r(mod. 16)	r	e wie oft?
$6^1 \equiv$	6	1	0	2	2	0	keinmal.
$6^2 \equiv$	2	2	2	17	1	1	2 mal.
$6^3 \equiv$	12	3	15	19	3	2	2 mal.
$6^4 \equiv$	4	4	4	15	15	3	2 mal.
$6^5 \equiv$	7	5	11	12	12	4	1 mal.
$6^6 \equiv$	8	6	1	6	6	5	0 mal.
$6^7 \equiv$	14	7	5	11	11	6	2 mal.
$6^8 \equiv$	16	8	6	20	4	7	0 mal.
$6^9 \equiv$	11	9	14	27	11	8	0 mal.
$6^{10} \equiv$	15	10	13	22	6	9	0 mal.
$6^{11} \equiv$	5	11	9	12	12	10	0 mal.
$6^{12} \equiv$	13	12	3	15	15	11	2 mal.
$6^{13} \equiv$	10	13	12	19	3	12	2 mal.
$6^{14} \equiv$	9	14	7	17	1	13	0 mal.
$6^{15} \equiv$	3	15	10	18	2	14	0 mal.
$6^{16} \equiv 6^0 \equiv$	1	16	8			15	2 mal,

so erhellt die Uebereinstimmung mit den vorhin für $\mu = 2$ aus den Formeln berechneten e. Hätten wir eine andere primitive Wurzel als 6 genommen, so wären nur die Indices der e zu vertauschen gewesen, das Resultat an und für sich, wie es also in die Formeln für x aus $x^{17}-1=0$ übergeht, nämlich die betreffende Zerlegung von 17 in Quadrate, bleibt dasselbe.

$$\nu = 5, \quad (\mathfrak{v} = 4, \quad \overset{5}{m} = \sqrt[16]{m}, \quad \mathfrak{n} = \sqrt[4]{m}),$$

(μ = 2 kommt nicht mehr in Betracht).

$\mathfrak{v}^2$ = 16 lineare Gleichungen für die Unbekannten

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,3) & \tfrac{1}{2}(0,0) & (0,2) \\ (3,1) & (3,3) & (2\;0) & (2,2) \\ (5,1) & (5,3) & (4,,0) & (4,2) \\ (7,1) & (7,3) & (6,0) & (6,2) \end{matrix} \quad (0,4) = -1.$$

Um in der ersten Gleichung den Coefficienten von (1, 1) zu ermitteln, setzen wir $h = 1$, $r = 0$, $\frac{\mathfrak{v}}{2} = 16$, dann für $k = 1$, $l = 1$,

$$\left[\frac{R}{2r}\right] = \left[\frac{k(2h-1) \pm l + \alpha . 16}{0}\right] = \left[\frac{1.1 \pm 1 + \alpha . 16}{0}\right] = +1,$$

da für das Minuszeichen und $\alpha = 0$ Zähler und Nenner gleich wird.

$$\mathfrak{z} = (-1)^{0+1} = -1,$$

also ist der Coefficient -1. Werden die übrigen bestimmt, so ergiebt sich folgendes *Coefficientenschema*, das man bei eingehenderer Betrachtung der $\left[\frac{R}{2r}\right]$ auch sofort ohne Ableitung für jedes ν hinschreiben kann.

		(1, 1)	(1, 3)	(3, 1)	(3, 3)	(5, 1)	(5, 3)	(7, 1)	(7, 3)	$\left(\frac{(0,0)}{2}\right)$	(0, 2)	(2, 0)	(2, 2)	(4, 0)	(4, 2)	(6, 0)	(6, 2)	fr. Glied
$h=1$	$r=0$	−			−					+			+					
	$r=1$	+	−	−			−				+	+			+			
	$r=2$		+	+		−			−				+	+			+	−1
	$r=3$				+	+		−	−						+	+		
$h=2$	$r=0$		−			−				+							−	
	$r=1$	−				+	−		+		+				−	−		
	$r=2$	+			−		+	+					+	−			−	−1
	$r=3$		+	−	−			−				+			−			
$h=3$	$r=0$			−					−	+							+	
	$r=1$		−	+	−			−			+				−	+		
	$r=2$	−			+		+	+					−	−			+	−1
	$r=3$	+				+	+		+			−			−			
$h=4$	$r=0$						−	+		+			−					
	$r=1$				+	−		−	+		+	−			+			
	$r=2$		−	+		+			−				−	+			−	−1
	$r=3$	−	−	−			+								+	−		
Werthe		(−3)	(+1)	(−5)	(+1)	(−1)	(+1)	(+5)	(−1)	(−3)	(4)	(−2)	(1)	(5)	(−2)	(6)	(−3)	

Bei anderer Anordnung der Gleichungen und Unbekannten und wenn (0, 0) statt $\frac{(0,0)}{2}$ eingesetzt wird, nehmen die Gleichungen eine für die Auflösung geschicktere Gestalt an, nämlich

		0, 0	4, 0	2, 2	6, 2	2, 0	6, 0	0, 2	4, 2	1, 1	7, 1	5, 1	3, 1	3, 3	5, 3	1, 3	7, 3	fr. Glied
$r=0$	$h=1$	+		+2						−2				−2				
	$h=4$	+		−2							+2				−2			
	$h=2$	+			−2							−2				−2		
	$h=3$	+			+2								−2				−2	
$r=2$	$h=1$		+	+	+							−	+			+	−	−1
	$h=4$		+	−	−							+	+			−	−	−1
	$h=2$		−	+	−					+	+			−	+			−1
	$h=3$		−	−	+					−	+			+	+			−1
$r=1$	$h=1$					+		+	+	+			−		−	−		
	$h=4$					−		+	+		−	−		+			+	
	$h=2$						−	+	−	−		+			−		+	
	$h=3$						+	+	−		−		+	−		−		
$r=3$	$h=1$						+		+		−	+		+			−	
	$h=4$						−		+	−			−		+	−		
	$h=2$					+			−		−		−	−		+		
	$h=3$					−			−	+		+			+		+	
Werthe		(−6)	(5)	(1)	(−3)	(−2)	(6)	(4)	(−2)	(−3)	(5)	(−1)	(−5)	(1)	(1)	(1)	(−1)	

Alsdann wird mit Benutzung der gefundenen Coefficienten

$$\frac{e_0}{\mathfrak{n}} = (0,4)\partial_4+(0,2)\partial_2+(0,0)\partial_0 = -\partial_4+4\partial_2-6 = -\overset{5}{\partial^4} \qquad e_0 = -\mathfrak{n}\,\partial^4$$

$$\frac{e_2}{\mathfrak{n}} = (2,2)\partial_2+(2,0)\partial_0 = +1\partial_2-2 = +\partial^2 \qquad e_2 = +\mathfrak{n}\,\partial^2$$

$$\frac{e_4}{\mathfrak{n}} = (4,2)\partial_2+(4,0)\partial_0 = -2\partial_2+5 = -2\partial^2+1 \qquad e_4 = \mathfrak{n}(-2\partial^2+1)$$

$$\frac{e_6}{\mathfrak{n}} = (6,2)\partial_2+(6,0)\partial_0 = -3\partial_2+6 = -3\partial^2 \qquad e_6 = -\mathfrak{n}.3\partial^2$$

$$\frac{e_1}{\mathfrak{n}} = (1,3)\partial_3+(1,1)\partial = 1\partial_3-3\partial = \partial^3 \qquad e_1 = +\mathfrak{n}\,\partial^3$$

$$\frac{e_3}{\mathfrak{n}} = (3,3)\partial_3+(3,1)\partial = 1\partial_3-5\partial = \partial^3-2\partial \qquad e_3 = \mathfrak{n}(\partial^3-2\partial)$$

$$\frac{e_5}{\mathfrak{n}} = (5,3)\partial_3+(5,1)\partial = 1\partial_3-\partial = \partial^3+2\partial \qquad e_5 = \mathfrak{n}(\partial^3+2\partial)$$

$$\frac{e_7}{\mathfrak{n}} = (7,3)\partial_3+(7,1)\partial = -\partial_3+5\partial = -\partial^3+2\partial \qquad e_7 = \mathfrak{n}(-\partial^3+2\partial)$$

worin

$$e_8 = 0, \quad e_{14} = -e_2, \quad e_{12} = -e_4, \quad e_{10} = -e_6, \quad \partial = \overset{5}{m}-\frac{1}{\overset{5}{m}},$$

$$e_{15} = e_1, \quad e_{13} = e_3, \quad e_{11} = e_5, \quad e_9 = e_7, \quad \mathfrak{n} = \sqrt[4]{m}; \quad \overset{5}{m} = \sqrt[16]{m}.$$

Beispiel für $\mu = 4$, also beim 65537-Eck

$$e_0 = -81, \quad e_2 = 36, \quad e_4 = -56, \quad e_6 = -108,$$

$$e_1 = 54, \quad e_3 = 6, \quad e_5 = 102, \quad e_7 = -6, \quad e_8 = 0 \text{ etc.}$$

$$(-81)^2+2\{(36)^2+(-56)^2+(-108)^2+(54)^2+(6)^2+(-6)^2+(102)^2\} = 65537.$$

Für $\mu = 3$ müssen die Formeln bereits modificirt werden in

$$e_0 = -\mathfrak{n}\,\partial^4 = -1, \quad e_1 = 0 = 0,$$

$$e_2 = +\mathfrak{n}\,\partial^2 = 2, \quad e_3 = \sqrt{2}(\partial^3+\partial)\mathfrak{n} = 6,$$

$$e_4 = \mathfrak{n}(2\partial^2+1) = 8, \quad e_5 = -\sqrt{2}\partial.\mathfrak{n} = -4,$$

$$e_6 = +\mathfrak{n}\,\partial^2 = 2, \quad e_7 = \sqrt{2}\,\partial^3.\mathfrak{n} = 2,$$

worin $\mathfrak{n} = 4$, $\partial = \overset{5}{m}-\frac{1}{\overset{5}{m}}$; $\overset{5}{m} = \sqrt{2}$,

$$(-1)^2+2\{3.(2)^2+8^2+6^2+(-4)^2\} = 257,$$

vgl. dieses Journal Bd. IX, pag. 215.

$$\nu = 6 \ (v = 8, \ \overset{6}{m} = \sqrt[32]{m}, \ \mathfrak{n} = \sqrt[4]{m}).$$

$v^2 = 64$ Gleichungen für die Unbekannten (k, l).

Die ausgerechneten Werthe derselben sind $(0, 8) = -1$,

),0) = −54	(0,2) = 44	(0,4) = −24	(0,6) = +8	(1,1) = −35	(1,3) = +21	(1,5) = −7	(1,7) = +1
,0) = +44	(2,2) = −37	(2,4) = +18	(2,6) = −3	(3,1) = +43	(3,3) = −31	(3,5) = +11	(3,7) = −1
,0) = −30	(4,2) = +26	(4,4) = −13	(4,6) = +2	(5,1) = −45	(5,3) = +31	(5,5) = −11	(5,7) = +1
,0) = +32	(6,2) = −25	(6,4) = +10	(6,6) = −1	(7,1) = +31	(7,3) = −21	(7,5) = +7	(7,7) = −1
,0) = −35	(8,2) = +32	(8,4) = −18	(8,6) = +4	(9,1) = −17	(9,3) = +11	(9,5) = −1	(9,7) = −1
),0) = +32	(10,2) = −27	(10,4) = +14	(10,6) = −3	(11,1) = +17	(11,3) = −11	(11,5) = +5	(11,7) = −1
,0) = −14	(12,2) = +10	(12,4) = −5	(12,6) = +2	(13,1) = −21	(13,3) = +13	(13,5) = −5	(13,7) = +1
,0) = 0	(14,2) = +1	(14,4) = −2	(14,6) = +1	(15,1) = +9	(15,3) = −9	(15,5) = +5	(15,7) = −1

Mit Benutzung dieser Werthe wird

$$\frac{e_0}{n} = (0,0)\partial_0 + (0,2)\partial_2 + (0,4)\partial_4 + (0,6)\partial_6 + (0,8)\partial_8$$

$$= -54\partial_0 + 44\partial_2 \quad -24\partial_4 \quad +8\partial_6 \quad -\partial_8$$

$$\begin{aligned} = & -54\partial^0 \\ & +2.44\partial^0 + 44\partial^2 \\ & -2.24\partial^0 - 4.24\partial^2 - 24\partial^4 \\ & +2.8\partial^0 \quad +9.8\partial^2 \quad +6.8\partial^4 + 8\partial^6 \\ & -2.\partial^0 \quad -16\partial^2 \quad -20\partial^4 \quad -8\partial^6 - \partial^8 \end{aligned}$$

$$\frac{e_0}{n} = \qquad +4\partial^2 \quad +4\partial^4 \qquad -\partial^8,$$

wo $\partial = \sqrt[6]{m} - \frac{1}{\sqrt[6]{m}}$.

Stellt man in derselben Weise die übrigen e auf, so bemerkt man eine grosse Einfachheit in den Coefficienten von den Potenzen der Grösse ∂.

Es verschwinden z. B. sämmtliche Coefficienten von ∂^0 bis auf einen, der $= +1$ ist. Die Coefficienten von ∂^7 sind ± 1 und das Zeichen lässt sich auch im Voraus bestimmen. (!)

Die Werthe der e sind folgende

$$\begin{array}{l|l}
e_0 = n(-\partial^8 + 4\partial^4 + 4\partial^2) & e_1 = n(\partial^7) \\
e_2 = n(-3\partial^6 + 8\partial^2) & e_3 = n(-\partial^7 + 4\partial^5 + 10\partial^3 - 2\partial^1) \\
e_4 = n(-2\partial^6 - \partial^4 - 8\partial^2) & e_5 = n(+\partial^7 - 4\partial^5 - 10\partial^3) \\
e_6 = n(-\partial^6 + 4\partial^4 + 6\partial^2) & e_7 = n(-\partial^7 - 4\partial^1) \\
e_8 = n(+4\partial^6 + 6\partial^4 - 4\partial^2 + 1) & e_9 = n(-\partial^7 - 8\partial^5 - 8\partial^3 + 4\partial^1) \\
e_{10} = n(-3\partial^6 - 4\partial^4 + 2\partial^2) & e_{11} = n(-\partial^7 - 2\partial^5 + 2\partial^1) \\
e_{12} = n(+2\partial^6 + 7\partial^4 + 8\partial^2) & e_{13} = n(+\partial^7 + 2\partial^5 + 2\partial^3) \\
e_{14} = n(+\partial^6 + 4\partial^4 + 2\partial^2) & e_{15} = n(-\partial^7 - 2\partial^5 + 2\partial^3),
\end{array}$$

$$e_{16} = 0,$$
$$e_\varkappa = -e_{\varkappa_1}, \quad \varkappa + \varkappa_1 = 32, \quad \varkappa \text{ gerade},$$
$$e_\lambda = +e_{\lambda_1}, \quad \lambda + \lambda_1 = 32, \quad \lambda \text{ ungerade},$$
$$\mathfrak{n} = \sqrt[4]{m}, \quad \partial = \sqrt[32]{m} - \frac{1}{\sqrt[32]{m}}, \quad \Sigma e^2 = p = m + 1.$$

Die vorstehenden Formeln gelten nicht mehr für $\mu = 3$ und $\mu = 4$, sondern müssten zuvor modificirt werden, sie gelten also erst für ein reguläres Eck, dessen Seitenzahl $>$ als die sogenannte Schachbrettzahl $2^{64}-1$ ist. $2^{64}+1$, also der Fall $\mu = 6$, liefert nach einer (allerdings nur einmal revidirten) Rechnung keine Primzahl. —

Beweis der angegebenen Resultate.

Gang des Beweises im Allgemeinen.

Die *Jacobi*schen Congruenzen $\psi(k,l,\varepsilon) \equiv 0$, wenn $k+l < m$ und

$$\psi(k,l,\varepsilon) \equiv -\frac{\Pi(2m-(k+l))}{\Pi(m-k)\Pi(m-l)} \pmod{p},$$

wenn $k+l > m$, $\Pi h = 1.2 \ldots h$ ist, $k+l \equiv m \pmod{m}$ ausgeschlossen ist und

$$\psi = (-1)^l \sum_{1}^{m-1}{}_\beta\, \varepsilon^{l \operatorname{ind} \beta + k \operatorname{ind}(\beta+1)}$$

bedeutet, liefern, falls $k = l = (2h-1)\check{N}$ gesetzt wird, $\check{N} = \frac{m}{\mathfrak{v}}$, ein System von $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ Congruenzen

$$_{1 \ldots h \ldots \frac{\mathfrak{v}}{4}} \quad \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k\, \check{e}_k (\check{m})^{k(2h-1)(\text{mod.}\mathfrak{v})} \equiv 0 \pmod{p}$$

erste Hälfte $k+l < m$ und

$$_{\frac{\mathfrak{v}}{4}+1 \ldots h \ldots \frac{\mathfrak{v}}{2}} \quad \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k\, \check{e}_k (\check{m})^{k(2h-1)\,\text{mod.}\mathfrak{v}} \equiv \check{\Phi}_{(2h-1)} \equiv -\frac{\Pi((\mathfrak{v}-(2h-1))2.\check{N})}{[\Pi((\mathfrak{v}-(2h-1))\check{N})]^2} \pmod{p}$$

zweite Hälfte $k+l > m$.

Es wird nun im ersten Theile, nach kurzer Angabe der aus der Theorie der Kreistheilung zum Verständniss des folgenden nothwendigen Formeln gezeigt werden, dass je zwei Φ einander congruent (also auch gleich) sind,

$$\Phi_{(2h-1)} - \Phi_{(2t-1)} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{falls} \quad t + h = \frac{3\mathfrak{v}}{4} + 1.$$

Theil II. Drückt man nun die e durch die Φ aus und benutzt diese Gleichheit, so sieht man, dass nur die Hälfte der e zu bestimmen bleibt, indem das e in der Mitte gleich Null wird und je zwei der andern gleich oder entgegengesetzt sind (e_0 ausgenommen). Die zweite Hälfte der Congruenzen ergiebt zur Bestimmung der e alsdann nichts anderes, als die erste und dient nur später, wenn die e gefunden, zur Ermittelung der Productreste Φ. Es bleibt also nur die erste Hälfte. Aber selbst in dieser sind je zwei Congruenzen unter sich identisch; es bleibt daher zur Bestimmung der e, die ausserdem freilich noch anderen Bedingungs*gleichungen* zu genügen haben, nur ein Viertel aller Congruenzen übrig.

Theil III. In diesem Viertel führt man nun statt e zunächst $\frac{e}{\mathfrak{n}}$ ein, wo $\mathfrak{n} = (\overset{\nu}{m})^{\mathfrak{r}} = \sqrt[4]{m}$, und dann für $\frac{e}{\mathfrak{n}}$ Ausdrücke in Potenzen von $(\overset{\nu}{m})^{\pm 1}$ mit unbestimmten Coefficienten behaftet, dann wird jede Congruenz nach Potenzen geordnet und die Factoren derselben einzeln gleich Null gesetzt, dies sind dann gerade v^2 Gleichungen mit v^2+1 Unbekannten; davon kann aber eine (sogar mehrere) aus den Bedingungsgleichungen im Voraus geschlossen werden, und so lässt sich die Auflösung bewerkstelligen.

Ausführung.

(Zunächst die aus der Theorie bekannten Formeln.)

Bei Primzahlen von der Form $2^{\mathfrak{m}}+1$ sind bekanntlich die Periodengleichungen quadratisch (wodurch eben die Construction der betreffenden Ecke mit Cirkel und Lineal ermöglicht wird).

Solcher Periodengleichungen sind mehrere Gruppen. In der ersten Gruppe ist *eine* Gleichung ($=2^0$).

In der zweiten Gruppe sind 2^1 Gleichungen, ..., in der ν^{ten} Gruppe sind $2^{\nu-1} = \frac{\mathfrak{v}}{2}$ Gleichungen. Die Gleichungen in dieser ν^{ten} Gruppe werden repräsentirt durch

$$x^2 - \overset{\nu-1}{\eta_n} . x + \sum_{1}^{\frac{1}{2}\overset{\nu}{N}} {}_k \overset{\nu-1}{\eta}_{n[(\varepsilon^{\frac{\mathfrak{v}}{2}})^{2k-1}+1]} = 0, \quad \overset{\nu}{N} = \frac{m}{\mathfrak{v}}.$$

Die $2\frac{\mathfrak{v}}{2} = \mathfrak{v}$ Wurzeln dieser Gleichungen ${}_{0 \ldots h \ldots \mathfrak{v}-1}\overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)}$ verbindet man behufs der Resolventenbildung mit den Wurzeln der Gleichung $x^{\mathfrak{v}}-1=0$,

die erste derselben $(\overset{\nu}{\omega})^1 = \cos\frac{2\pi}{\mathfrak{v}} + i\sin\frac{2\pi}{\mathfrak{v}}$ ist auch primitiv. Hierin ist $\sin\frac{2\pi}{\mathfrak{v}}$ gleich der halben Seite des $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ Ecks, also $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$, worin $\nu-2$ Zweien unter dem Wurzelzeichen vorkommen, kurz mit $\sqrt{-}$ bezeichnet und

$$\cos\frac{2\pi}{\mathfrak{v}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

mit $\sqrt{+}$. Die Verbindung geschieht in folgender Weise

$$_{0\cdots}k^{\cdots \mathfrak{v}-1} \sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_h (\overset{\nu}{\omega})^{kh}.\overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)} = \overset{\nu}{\mathfrak{F}}_k,$$

oder da $(\overset{\nu}{\omega})^{\mathfrak{v}} = (\overset{\nu}{\omega})^0$ ist, kann man das System der $\mathfrak{v}$ Gleichungen für die $\mathfrak{F}$ auch

$$_{1\cdots}k^{\cdots \mathfrak{v}} \sum_{1}^{\mathfrak{v}}{}_h (\overset{\nu}{\omega})^{kh} \overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)} = \overset{\nu}{\mathfrak{F}}_k$$

schreiben. Werden diese $\mathfrak{v}$ Gleichungen der Reihe nach multiplicirt mit $_{1\cdots}k^{\cdots \mathfrak{v}}\ \omega^{-hk}$ und addirt, so ergeben sich die $\overset{\nu}{\eta}$, indem

$$\overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)} = \frac{1}{\mathfrak{v}} \sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k\, \omega^{-hk} \overset{\nu}{\mathfrak{F}}_k$$

wird, da ja links bei der Multiplication und Addition

$$\sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k\, \varepsilon^{kh-kh}.\overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)} + \sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k\, \omega^{kl-kh} \overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^l)} + \text{etc.}$$

erhalten wird, das ist

$$\mathfrak{v}.\overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)} + \sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k (\omega^{l-h})^k \overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^l)} + \text{etc.} = \mathfrak{v}.\overset{\nu}{\eta}_{(\varepsilon^h)} + 0 + \cdots,$$

indem

$$\sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k (\omega^x)^k = \sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k (\omega^1)^k = 0$$

ist. Die bekannte Formel der Kreistheilung

$$\overset{m}{\mathfrak{F}}_k \overset{m}{\mathfrak{F}}_l : \overset{m}{\mathfrak{F}}_{k+l} = (-1)^l \sum_{1}^{m-1}{}_\beta (\overset{m}{\omega})^{l\,\mathrm{ind}\beta + k\,\mathrm{ind}(\beta+1)} \begin{matrix} +0, \text{ falls } k+l \text{ nicht } \equiv 0 \\ +(-1)^l m, \text{ falls } k+l \equiv 0 \end{matrix} \Bigg\} (\text{mod. } m)$$

ergiebt für $k = l = \overset{\nu}{N} = \frac{m}{\mathfrak{v}}$:

$$(\overset{\nu}{\mathfrak{F}}_1)^2 = \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_1 . \sum_{1}^{m-1}{}_\beta (\sqrt{+} + i\sqrt{-})^{\mathrm{ind}\beta + \mathrm{ind}(\beta+1)\,(\text{mod.}\mathfrak{v})}$$

$$= \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_1 . \sum_{0}^{\mathfrak{v}-1}{}_k \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_k (\overset{\nu}{\omega})^k = \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_1 . \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k \overset{\nu}{e}_k (\overset{\nu}{\omega})^k = \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_1 (\overset{\nu}{A}_1 + i\overset{\nu}{B}_1).$$

Alle $\mathfrak{e}$ zusammen betragen $m-1$, denn so viel Exponenten sind im Ganzen; hiebei ist

$$\sum_{0\ldots k\ldots \frac{\mathfrak{v}}{2}-1} \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_k + \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{k+\frac{\mathfrak{v}}{2}} = \overset{\nu-1}{\mathfrak{e}}_k,$$

also aus den Fällen $\nu = 1$ bis $\nu = \nu - 1$ bekannt, und es bleibt daher nur neu zu bestimmen:

$$\sum_{0\ldots k\ldots \frac{\mathfrak{v}}{2}-1} \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_k - \overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{k+\frac{\mathfrak{v}}{2}} = \overset{\nu}{e}_k.$$

Dieselbe Formel ergiebt für $k = l = (\mathfrak{v}-1)\overset{\nu}{N}$:

$$(\overset{\nu}{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{v}-1})^2 = \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1} \cdot \sum_1^{m-1}{}_\beta (\sqrt{+} - i\sqrt{-})^{\mathrm{ind}\beta + \mathrm{ind}(\beta+1)(\mathrm{mod.}\,\mathfrak{v})}$$

$$= \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1} \cdot \sum_1^{m-1}{}_\beta [(\sqrt{+} + i\sqrt{-})^{\mathrm{ind}\beta + \mathrm{ind}(\beta+1)}]^{\mathfrak{v}-1}.$$

Daher erhellt, dass nur $-i$ statt i gesetzt werden darf, und mithin folgt

$$(\overset{\nu}{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{v}-1})^2 = \overset{\nu-1}{\mathfrak{F}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1} \{A_1 - iB_1\}.$$

Da nun

$$\overset{m}{\mathfrak{F}}_k \overset{m}{\mathfrak{F}}_{-k} = (-1)^k p$$

ist, falls k nicht $\equiv m$, also

$$\frac{\overset{m}{\mathfrak{F}}_k \cdot \overset{m}{\mathfrak{F}}_l}{\overset{m}{\mathfrak{F}}_{k+l}} \cdot \frac{\overset{m}{\mathfrak{F}}_{(-k)} \overset{m}{\mathfrak{F}}_{(-l)}}{\overset{m}{\mathfrak{F}}_{-k-l}} = \psi(k, l, \overset{m}{\omega}) \cdot \psi(-k, -l, \overset{m}{\omega})$$

wird, so ist

$$A_1^2 + B_1^2 = p.$$

Da nun

$$A_1 + iB_1 = \sum_0^{\mathfrak{v}-1}{}_k \overset{\nu}{e}_k \left(\cos\frac{2\pi k}{\mathfrak{v}} + i\sin\frac{2\pi k}{\mathfrak{v}}\right),$$

$$A_1 - iB_1 = \sum_0^{\mathfrak{v}-1}{}_k \overset{\nu}{e}_k \left(\cos\left(-\frac{2\pi k}{\mathfrak{v}}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi k}{\mathfrak{v}}\right)\right)$$

ist, also

$$A_1^2 + B_1^2 = \sum_0^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k (e_k)^2 + 2e_k e_{k+1}\cos\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{v}}\cdot 1\right) + 2e_k e_{k+2}\cos\left(\frac{2\pi}{\mathfrak{v}}\cdot 2\right) + \text{etc.},$$

so ergeben sich daraus *) bekanntlich die Bedingungsgleichungen:

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. IX, pag. 222.

$$\sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k (\overset{\nu}{e}_k)^2 = p \quad \text{und} \quad {}_{1\ldots h \ldots \frac{\mathfrak{v}}{4}-1} \sum_{0}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k \overset{\nu}{e}_k \overset{\nu}{e}_{k+h} = 0,$$

wobei, falls $k+h \,\overline{\overline{>}}\, \frac{\mathfrak{v}}{2}$ ist, $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ vom Index abzuziehen und der Werth des e negativ zu nehmen ist.

Macht man dasselbe für $(\overset{\nu}{\mathfrak{F}}_3)^2$ und $(\overset{\nu}{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{v}-3})^2$ etc., so ergeben sich dieselben Bedingungsgleichungen.

Fundamental-Eigenschaften der e.

1. Die in der Mitte stehende Potenz obiger Summe $\sum_1^{m-1}{}_\beta$ hat den Exponenten

$$\text{ind}\,\frac{m}{2} + \text{ind}\,\frac{p+1}{2} = \vartheta(\mathfrak{m}-1) + \vartheta(\mathfrak{m}-1) + \frac{m}{2},$$

wobei $\vartheta = \frac{m}{2\mathfrak{m}}$, denn

$$\varepsilon^{\vartheta} \equiv 2, \quad (\varepsilon^{\vartheta})^{\mathfrak{m}-1} \equiv 2^{\mathfrak{m}-1} \equiv \frac{m}{2}, \quad \text{also} \quad \text{ind}\,\frac{m}{2} = \vartheta(\mathfrak{m}-1)$$

und

$$\varepsilon^{\vartheta(\mathfrak{m}-1)+\frac{m}{2}} = \varepsilon^{\vartheta(\mathfrak{m}-1)} . \varepsilon^{\frac{m}{2}} \equiv -\frac{m}{2}\,(\text{mod.}\,p), \quad \text{also} \quad \equiv p - \frac{m}{2} = \frac{p+1}{2}.$$

Der Exponent $2\vartheta(\mathfrak{m}-1)+\frac{m}{2}$ ist also $\equiv 0\,\text{mod.}\,2\vartheta$, d. i. mod. $\frac{m}{\mathfrak{m}}$, d. i. mod. $2^{2^\mu-\mu}$, also auch mod. 2^ν, *so lange ν nicht $2^\mu-\mu$ übersteigt,* also z. B. beim 257-Eck noch für $\nu = 5$ gültig.

Da nun $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0$ angiebt, wie oft der Exponent $\equiv 0(\text{mod.}\,\mathfrak{v})$ wird, so ist ersichtlich, dass $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0$ *ungerade,* während alle übrigen $\mathfrak{e}$ *gerade* sind, namentlich auch $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}}$ gerade, also

$$\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}} = e_0$$

ungerade.

2. Es muss ferner

$$\begin{array}{rl} & \text{ind}\,1 + \text{ind}\,2 \\ + & \text{ind}\,2 + \text{ind}\,3 \\ & \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ & +\,\text{ind}\,(m-1) + \text{ind}\,(m), \end{array}$$

wenn noch ind$\,m$ + ind 1, d. i. ind$\,m$ hinzugefügt wird, als Summe:

$$2(1+2+\cdots+m-1) = m(m-1)$$

ergeben, also die Summe allein ohne die Hinzufügung

$$m(m-1)-\frac{m}{2}\equiv 0\left(\text{mod. }\frac{m}{2}\right),\quad \text{also auch}\quad \equiv 0\,(\text{mod.}\,\mathfrak{v}).$$

Da nun

$$\text{ind}\,\beta+\text{ind}\,(\beta+1)\equiv \mathfrak{r}\,(\text{mod.}\,\mathfrak{v}),$$

so ist

$$\Sigma\{\text{ind}\,\beta+\text{ind}(\beta+1)\}\,(\equiv 0\,(\text{mod.}\,\mathfrak{v}))\equiv\Sigma(\mathfrak{r}),$$

das ist also

$$0.\mathfrak{e}_0+1.\mathfrak{e}_1+2.\mathfrak{e}_2+3.\mathfrak{e}_3+\cdots+(\mathfrak{v}-1)\mathfrak{e}_{\mathfrak{v}-1}.$$

Wir haben mithin folgenden Satz

$$\sum_{1}^{\frac{\mathfrak{v}}{2}-1}{}_k\, k(\mathfrak{e}_k-\mathfrak{e}_{\mathfrak{v}-k})\equiv 0\,(\text{mod.}\,\mathfrak{v}),\quad \mathfrak{v}\gtrless\frac{m}{2}.$$

3. Da ferner $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0+\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}}-(\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{\frac{\mathfrak{v}}{4}}+\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{\frac{3\mathfrak{v}}{4}})=\overset{\nu-1}{\mathfrak{e}}_0-\overset{\nu-1}{\mathfrak{e}}_{\frac{\mathfrak{v}}{4}}=\overset{\nu-1}{e}_0\equiv -1(\text{mod.}4)$ bereits bewiesen (Schluss von n auf $n+1$), so folgt auch $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0+\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}}\equiv -1(\text{mod.}4)$, denn $\mathfrak{e}_{\frac{\mathfrak{v}}{4}}+\mathfrak{e}_{\frac{3\mathfrak{v}}{4}}\equiv 0\,(\text{mod.}\,4)$ und also auch $\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_0-\overset{\nu}{\mathfrak{e}}_{\frac{\mathfrak{v}}{2}}\equiv \overset{\nu}{e}_0\equiv -1\,(\text{mod.}\,4)$.

4. Was die übrigen $\overset{\nu}{e}$ anbetrifft, so ist, da $\mathfrak{e}_k+\mathfrak{e}_{k+\frac{\mathfrak{v}}{2}}\equiv 0\,(\text{mod.}4)$ und die Summanden gerade sind, auch $\overset{\nu}{e}_k$ gerade und sogar durch 4 theilbar, nur machen die kleineren μ Ausnahmen. Für $\mu=4$ gilt dies z. B. nicht mehr für die $\overset{4}{e}_k$ (k ungerade); diese sind nur durch 2^1, nicht mehr durch 4 theilbar etc.

Theil I.

Nachweis, dass $\overset{\nu}{\Phi}_{(2h-1)}-\overset{\nu}{\Phi}_{(2t-1)}\equiv 0\,(\text{mod.}\,p)$ falls $t+h=\frac{3\mathfrak{v}}{4}+1$, d. h. $2h-1+2t-1=\mathfrak{v}+\frac{\mathfrak{v}}{2}$.

u möge eine ungerade Zahl $<\frac{\mathfrak{v}}{4}$ bedeuten, so ist also zu beweisen, dass

$$\frac{1.2\ldots(u\overset{\nu}{N}.2)}{(1.2\ldots u\overset{\nu}{N})^2}-\frac{1.2\ldots\left(\frac{\mathfrak{v}}{2}-u\right)\overset{\nu}{N}.2}{\left(1.2\ldots\left(\frac{\mathfrak{v}}{2}-u\right)\overset{\nu}{N}\right)^2}$$

durch p theilbar ist, oder

$$\frac{\left(\left(\frac{\mathfrak{v}}{2}-u\right)N+1\right)\ldots\left(\frac{\mathfrak{v}}{2}-u\right)2N}{1\ldots\left(\frac{\mathfrak{v}}{2}-u\right)N}-\frac{(uN+1)\ldots uN.2}{1\ldots uN}\equiv 0\,(\text{mod.}\,p).$$

Wird der Nenner gemeinschaftlich gemacht und werden überdies gemeinschaftliche Factoren $< p$ weggelassen, so wird die linke Seite

$$\left(\left(\frac{\mathfrak{p}}{2}-u\right)N+1\right)\dots\left(\frac{\mathfrak{p}}{2}-u\right)N.2-\left[(uN+1)\dots uN.2\right]^2\left((uN2+1)\dots\left(\frac{\mathfrak{p}}{2}-u\right)N\right)^{\alpha=\pm 1}.$$

Im ersten Gliede dieses Ausdruckes kommt nun unter den Factoren auch $\frac{\mathfrak{p}}{2}N$ vor und der folgende Factor $\frac{\mathfrak{p}}{2}N+1$ ist offenbar $\equiv -\frac{\mathfrak{p}}{2}N(\text{mod.}\,p)$, kann also durch diesen ersetzt werden, ebenso die folgenden durch je einen der vorhergehenden, und was dann noch bleibt, (resp. im Nenner) ist mit $\left((uN2+1)\dots\left(\frac{\mathfrak{p}}{2}-u\right)N\right)^{\alpha}$ übereinstimmend, also wegzulassen und bleibt, wenn noch die Differenz der Quadrate in Summe mal Differenz aufgelöst wird,

$$\left(\left(\frac{\mathfrak{p}}{2}-u\right)N+1\right)\dots\frac{\mathfrak{p}}{2}N \equiv \pm(uN+1)\dots uN2 \;\; (\text{mod.}\,p)$$

noch nachzuweisen übrig.

Hier multipliciren wir nun die Factoren der linken Seite mit 2, also im Ganzen mit 2^{uN} und erhalten, da von $(-1)^{uN}=+1$ (ausser bei $\nu=m$, wo $(-1)^{uN}=-1$) abgesehen werden kann, das Product der den vorigen congruenten ungeraden Zahlen $(uN2-1)\dots 3.1$. Hievon heben wir aber nur die erste Hälfte gegen die ihnen gleichen Factoren der rechten Seite weg. Die andere Hälfte multipliciren wir wiederum mit 2, wodurch wir Zahlen erhalten, die eine arithmetische Reihe ersten Grades mit der Differenz 4 bilden und heben wiederum die erste Hälfte gegen entsprechende Factoren der rechten Seite weg. Der zutretende Factor ist $2^{\frac{Nu}{2}}$; wir wiederholen diesen Process so lange, bis zuletzt bei den u Zahlen noch der Factor 2^u zutritt und auch dann noch, bald die grössere, bald die kleinere Hälfte benutzend, bis nochmals $2^{x+y+z+\cdots}$ hinzutritt, $x+y+z+\cdots=u$, also im Ganzen ist als Factor

$$2^{u(N+\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\dots+2+1+1)}=(2^{2N})^u$$

zugetreten. Ist nun $(2^{2N})^u\equiv\pm 1$, so erhalten wir $\pm 1\pm 1$, also in einem Falle immer Null, womit die Behauptung bewiesen.

Da nun $2N=2^{2^\mu-\nu+1}$, so muss, *damit der Satz bestehen kann,* $2^\mu-\nu+1 \geqq \mu$ sein, also $2^u-\mu-1 \gtreqless \nu-2$, also: „das um 2 verminderte ν darf nicht den Exponenten τ der Anzahl der geometrischen Grundgleichungen $\vartheta=2^\tau$ überschreiten.“ Aber selbst wenn $\nu-2$ um 1 grösser, als der Exponent

τ, wie dies z. B. beim 17-Eck $\mu=2$, $\nu=4$, $\vartheta=2^1$ der Fall ist, $4-2>1$ um 1, bleibt noch ein Analogon des Satzes bestehen, nämlich es ist dann die Summe der betreffenden $\Phi\equiv 0 \pmod{p}$, also je zwei Φ sind entgegengesetzt gleich.

Theil II.

Lösen wir die oben angegebenen Congruenzen auf, indem wir mit $(\overset{\nu}{m})^{\mathfrak{v}-k(2h-1)}$, d. i. $(\overset{\nu}{m})^{-k(2h-1)}$ multipliciren und addiren, so erhalten wir

$$\overset{\nu}{e}_k \equiv \frac{1}{\frac{\mathfrak{v}}{2}} \sum_1^{\frac{\mathfrak{v}}{2}}{}_h\, \Phi_{(2h-1)} (\overset{\nu}{m})^{-k(2h-1)} \pmod{p}.$$

Da nun aber im Allgemeinen je zwei Φ gleich sind, so kann dieser Ausdruck vereinfacht werden, indem nur $\frac{\mathfrak{v}}{8}=v$ der Φ darin bleiben, die von $h=3v+1$ bis $h=4v$ gehen, also die Indices $\mathfrak{v}-1$, ungerade, ... $\frac{3\mathfrak{v}}{4}+1$ haben, z. B.

$$e_0 \equiv \frac{1}{\frac{\mathfrak{v}}{4}}\left(\Phi_{\mathfrak{v}-1}+\cdots+\Phi_{\frac{3\mathfrak{v}}{4}-1}\right) \equiv \frac{1}{\frac{\mathfrak{v}}{4}} \sum_1^{v}{}_h\, \Phi_{-(2h-1)};$$

dagegen $e_{\frac{\mathfrak{v}}{4}}\equiv 0$ und folglich, da es $<p$, auch $=0$. In dem erwähnten Ausnahmefall müssen also e_0 und $e_{\frac{\mathfrak{v}}{4}}$ ihre Rollen mit einander tauschen, wie es auch in der That der Fall $\left(\text{siehe oben Modification } \begin{matrix}\mu=2\\ \nu=4\end{matrix}\right)$; ferner

$$\overset{\nu}{e}_1 \equiv \frac{1}{4v} \sum_1^{2v-1}{}_u \left((\overset{\nu}{m})^{u}-(\overset{\nu}{m})^{-u}\right)\Phi_{-u}$$

(u *ungerade Zahl*) und allgemein, wenn λ ungerade,

$$1\ldots\lambda\ldots 2v-1 \qquad \overset{\nu}{e}_\lambda \equiv \frac{1}{4v} \sum_1^{2v-1}{}_u \left((\overset{\nu}{m})^{u\lambda}-(\overset{\nu}{m})^{-u\lambda}\right)\Phi_{-u}.$$

Hieraus sieht man, da $(\overset{\nu}{m})^{\frac{\mathfrak{v}}{2}}\equiv -1$ ist, dass ungerade bezifferte e, deren Indices zusammen $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ betragen, einander gleich sein müssen.

Ferner, wenn $\varkappa$ gerade

$$2.1\ldots\varkappa\ldots 2(v-1) \qquad \overset{\nu}{e}_\varkappa \equiv \frac{1}{4v} \sum_1^{v-1}{}_u \left((\overset{\nu-1}{m})^{u\varkappa}+(\overset{\nu-1}{m})^{-u\varkappa}\right)\left(\Phi_{-u}-\Phi_{-(2v-u)}\right);$$

also gerade bezifferte e, deren Indices zusammen $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ betragen, sind einander entgegengesetzt.

Man kann auf den Gedanken kommen, nun aus diesen zuletzt aufgestellten Congruenzen die Φ zu eliminiren (die Nenner-Determinante wird eine Potenz von 2). Thut man dies, so ergiebt sich gerade die erste Hälfte der Congruenzen

$$_{1\cdots}h^{\cdots\frac{\mathfrak{v}}{4}} \sum_{1}^{\frac{\nu}{2}-1}{}_k\, e_k (\overset{\nu}{m})^{k(2h-1)} \equiv 0 \ (\text{mod.}p);$$

dies ist aber mit Benutzung der Relationen für die e

$$_{1\cdots}h^{\cdots\frac{\mathfrak{v}}{4}}\ e_0 + \sum_{1}^{\frac{\nu}{4}-1}{}_k\, e_k \left((\overset{\nu}{m})^{k(2h-1)} + (-1)^k (\overset{\nu}{m})^{-k(2h-1)}\right) \equiv 0$$

zu schreiben, und es wird ihre erste Hälfte nun wieder mit der zweiten identisch

$$_{1\cdots}h^{\cdots\mathfrak{v}}\ e_0 + \sum_{1}^{2\mathfrak{v}-1}{}_r\, e_r \left\{(\overset{\nu}{m})^{r(2h-1)} + (-1)^r (\overset{\nu}{m})^{-r(2h-1)(\text{mod.}\nu)}\right\} \equiv 0 \ (\text{mod.}p).$$

Setzt man auch in die erwähnten Bedingungs*gleichungen*

$$\sum_{0}^{\frac{\nu}{2}-1}{}_k (e_k)^2 = p \quad \text{und} \quad _{1\cdots}h^{\cdots\frac{\mathfrak{v}}{4}-1} \sum_{0}^{\frac{\nu}{2}-1}{}_k\, e_k e_{(k+h)} = 0$$

$\left(k+h \gtreqless \frac{\mathfrak{v}}{2}\right.$, wo $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ vom Index abzuziehen und das betreffende e negativ zu $\left.\text{nehmen}\right)$

$$e_{\frac{\nu}{4}} = 0,$$

$$e_\varkappa = -e_{\left(\frac{\nu}{2}-\varkappa\right)}, \quad \varkappa \text{ gerade}$$

$$e_\lambda = +e_{\left(\frac{\nu}{2}-\lambda\right)}, \quad \lambda \text{ ungerade}$$

ein, so werden dieselben, die erste

$$e_0^2 + 2\sum_{1}^{\frac{\nu}{4}-1}{}_\varrho (e_\varrho)^2 = p$$

und die eine Hälfte der übrigen $2(\mathfrak{v}-1)$ Bedingungsgleichungen

$$0 = {}_{1\cdots}h^{\cdots\mathfrak{v}-1} \sum_{1}^{h-1}{}_\varrho (-1)^\varrho e_\varrho e_{2h-\varrho} + \sum_{0}^{2\mathfrak{v}-(2h+1)}{}_\varrho\, e_\varrho e_{2h+\varrho} - \sum_{1}^{h-1}{}_\varrho (-1)^\varrho e_{2\mathfrak{v}-\varrho} e_{2\mathfrak{v}-2h+\varrho},$$

die anderen $\mathfrak{v}-1$ Bedingungsgleichungen werden bei dem Einsetzen zu Identitäten.

Theil III.

Im Folgenden kann nun eine *doppelte* Behandlung eintreten, entweder in ∂_k oder in Potenzen von ∂, deren Vergleichung zu Sätzen über Summen von Producten aus Binomialcoefficienten und den Ergänzungscoefficienten δ führt.

A.) Behandlung in ∂_k.

Die Bedingungscongruenzen:

$$_{1\ldots h\ldots v} e_0 + \sum_1^{2v-1} {}_r \overset{v}{e}_r \{ (\overset{v}{m})^{r(2h-1)} + (-1)^r (\overset{v}{m})^{-r(2h-1)(\text{mod.}v)} \} \equiv 0 \ (\text{mod.}\,p)$$

werden mit Anwendung der Bezeichnung

$$\overset{v}{\partial}_r = (\overset{v}{m})^r + (-1)^r (\overset{v}{m})^{-r},$$

$$_{1\ldots h\ldots v} e_0 + \sum_1^{2v-1} {}_r e_r \overset{v}{\partial}_{r(2h-1)} = {}_{1\ldots h\ldots v} e_0 + \sum_2^{2(v-1)} {}_\varkappa e_\varkappa \partial_{\varkappa(2h-1)} + \sum_1^{2v-1} {}_\lambda e_\lambda \partial_{\lambda(2h-1)} \equiv 0.$$

$\varkappa$ gerade, λ ungerade.

Da nun

$$p = e_0^2 + 2 \sum_1^{2v-1} {}_r (e_r)^2$$

ist, so können die $e_\varkappa$, die in den vorhin in Φ ausgedrückten Formeln gerade Potenzen von $\overset{v}{m}$ enthalten, höchstens bis $(\overset{v}{m})^{2v}$ gehen, denn das Quadrat davon enthielte dann $(\overset{v}{m})^{4r}$ und $\mathfrak{n}^4 = m = p-1$. Wir werden also

$$\frac{e_\varkappa}{\mathfrak{n}}, \ \text{d. i.} \ \frac{e_\varkappa}{(\overset{v}{m})^r} = \sum_0^{\frac{r}{2}} {}_\varrho (\varkappa, 2\varrho)\, \overset{v}{\partial}_{2\varrho}$$

einzuführen haben, wobei (k, l) gewisse noch zu bestimmende ganze Zahlen bedeuten. Die e_λ, λ ungerade, die nur ungerade Potenzen von $\overset{v}{m}$ enthalten, können höchstens bis $(\overset{v}{m})^{2v-1}$ gehen, also ist

$$\frac{e_\lambda}{\mathfrak{n}} = \sum_0^{\frac{r}{2}-1} {}_\varrho (\lambda, 2\varrho+1)\, \overset{v}{\partial}_{2\varrho+1}$$

einzuführen. Wird dies zunächst in die erste Bedingungsgleichung

$$p = e_0^2 + 2 \sum_1^{2v-1} {}_r (e_r)^2$$

eingesetzt, so haben wir:

$$\frac{p}{(\overset{v}{m})^{2r}} = \overset{v}{\partial}_{2r} = \{(0, v)^2 + 2[(2, v)^2 + \cdots]\} \overset{v}{\partial}_{2v} + \cdots,$$

also

$$1 = (0, v)^2 + 2[(2, v)^2 + \cdots]$$

mithin $(0, v)^2 = +1$, die übrigen Quadrate $(2, v)^2$, $(4, v)^2$ etc. $= 0$, also $(0, v) = \sqrt{1} = -1$, denn e_0 sollte ja $\equiv -1 \pmod{4}$ sein, was nur so erreicht wird.

Demzufolge wird in die Congruenzen

$$_{1\cdots}^{\;\;h\cdots v}\, e_0 + \sum_{0}^{2v-1}{}_r\, e_r\, \partial_{r(2h-1)},$$

nachdem dieselben durch n dividirt,

$$\frac{e_0}{n} = \sum_{0}^{\frac{v}{2}-1}{}_\varrho (0, 2\varrho)\, \partial_{2\varrho} + (-1)\, \partial_v,$$

$$\frac{e_\varkappa}{n} = \sum_{0}^{\frac{v}{2}-1}{}_\varrho (\varkappa, 2\varrho)\, \partial_{2\varrho}$$

und

$$\frac{e_\lambda}{n} = \sum_{0}^{\frac{v}{2}-1}{}_\varrho (\lambda, 2\varrho+1)\, \partial_{2\varrho+1}$$

einzuführen sein.

Bedenkt man nun, dass

$$\partial_\varkappa \partial_{\varkappa_1} = \big((\overset{\nu}{m})^{\varkappa} + (\overset{\nu}{m})^{-\varkappa}\big)\big((\overset{\nu}{m})^{\varkappa_1} + (\overset{\nu}{m})^{-\varkappa_1}\big) = \partial_{\varkappa+\varkappa_1} + \partial_{\varkappa-\varkappa_1}$$

wird und $\partial_{2v} \equiv 0 \pmod{p}$ zu setzen ist, weil $(\overset{\nu}{m})^{2v} \partial_{2v} = p$ ist und ∂_0 zwar $= 1$ ist, wenn $\varkappa = \varkappa_1 = 0$, sonst aber, da es bei der Multiplication ja aus zwei Gliedern besteht, $= 2$ zu nehmen ist, ferner, dass

$$\partial_\lambda \partial_{\lambda_1} \doteq \big((\overset{\nu}{m})^{\lambda} - (\overset{\nu}{m})^{-\lambda}\big)\big((\overset{\nu}{m})^{\lambda_1} - (\overset{\nu}{m})^{-\lambda_1}\big) = \partial_{\lambda+\lambda_1} - \partial_{\lambda-\lambda_1},$$

so erhalten wir die Congruenzen in folgender Gestalt

$$\begin{aligned} 0 \equiv {}_{1\cdots}^{\;\;h\cdots v} - \partial_v &+ \sum_{0}^{\frac{v}{2}-1}{}_\varrho (0, 2\varrho)\, \partial_{2\varrho} + \sum_{1}^{v-1}{}_r (2r, 0)\, \partial_{2r(2h-1)} \\ &+ \sum_{1}^{v-1}{}_r \sum_{1}^{\frac{v}{2}-1}{}_\varrho (2r, 2\varrho) \{\partial_{2(r(2h-1)+\varrho)} + \partial_{2(r(2h-1)-\varrho)}\} \\ &+ \sum_{0}^{v-1}{}_r \sum_{0}^{\frac{v}{2}-1}{}_\varrho (2r+1, 2\varrho+1) \{\partial_{2(r(2h-1)+\varrho+h)} - \partial_{2(r(2h-1)-\varrho+h-1)}\} \end{aligned}$$

oder geordnet

$$_{1\cdots}^{\;\;h\cdots v}\, 0 \equiv \sum_{0}^{v-1}{}_r\, C_{h,2r}\, \partial_{2r},$$

worin die C Ausdrücke in den (k, l) sind, es sind der Zahl nach v^2. Um

die Congruenzen, bei denen das grösste $\partial_x = \partial_{2v-2}$ ist, also die höchste Potenz von $\overset{\nu}{m}$, wenn mit dem Nenner multiplicirt wird:

$$.(\overset{\nu}{m})^{4v-4} = \frac{m}{(\overset{\nu}{m})^4},$$

also $< p$ ist, *identisch* zu erfüllen, setzen wir die ganzzahligen Coefficienten C einzeln $\equiv 0 (\text{mod.}\, p)$, ja $= 0$, da sie $< p$ sind, und haben dann die in den Resultaten erwähnten v^2 Gleichungen, welche sämmtlich linear sind.

$C_{h,2r}$ wird, wie sich leicht ergiebt:

$$\sum_1^{2v-1}{}_k \sum_0^{v-1}{}_l (k,l)\mathfrak{z}.\left[\frac{R}{2r}\right] + \{0, 2r\}, \quad \text{wo} \quad R = k(2h-1) \pm l + \alpha\frac{\mathfrak{v}}{2}$$

und $\left[\frac{R}{2r}\right]$ gleich der positiven Einheit ist, wenn der Zähler $R = \pm 2r$ ist, sonst aber gleich Null. $\mathfrak{z} = (-1)^\alpha$ für $+l$, und für $-l$ wird $\mathfrak{z} = (-1)^{\alpha+l}$. $\{0, 2r\} = \frac{1}{2}(0, 0)$ für $r = 0$, indem wir die betreffenden Gleichungen durch zwei dividiren und $\frac{1}{2}(0, 0)$ statt $(0, 0)$ als Unbekannte einführen.

Ist $r > \frac{v}{2}$, so wird $\{0, 2r\} = 0$, da diese Unbekannte überhaupt nicht vorkommt.

B.) Behandlung in Potenzen von ∂.

In die Congruenzen

$$1 \ldots h \ldots v \quad e_0 + \sum_1^{2v-1}{}_r e_r \partial_{r(2h-1)} \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

führen wir, nachdem auch durch $\mathfrak{n}$ dividirt, $\partial^k +$ Ergänzung für ∂_k ein. Die Ergänzung ist

$$\delta_1 \partial^{k-2} + \delta_2 \partial^{k-4} + \cdots + \delta_\varrho \partial^{k-2\varrho} + \cdots,$$

wobei die Ergänzungscoefficienten

$$\delta_\varrho = \frac{k.(k-(\varrho+1))\ldots(k-(2\varrho-1))}{1.2\ldots\varrho}$$

sind. Der letzte Coefficient ist für gerades k immer 2, für ungerades k ist er k selbst, und es wird nun dem Obigen analog

$$\frac{e_0}{\mathfrak{n}} = -\partial^v + [0, v-2]\partial^{v-2} + [0, v-4]\partial^{v-4} + \cdots,$$

$$\frac{e_x}{\mathfrak{n}} = \quad +[x, v-2]\partial^{v-2} + [x, v-4]\partial^{v-4} + \cdots \quad x \text{ gerade},$$

$$\frac{e_\lambda}{\mathfrak{n}} = \quad [\lambda, v-1]\partial^{v-1} + [\lambda, v-3]\partial^{v-3} + \cdots \quad \lambda \text{ ungerade}$$

gesetzt, wo die $[k, l]$ andere, aber mit den (k, l) in einfacher Weise zusammenhängende ganze Zahlen sind. (vgl. oben $\nu = 6$.)

Viele von ihnen, nämlich $3v$ können sogar von vorne herein, indem man die andern $1+v-1$ Bedingungsgleichungen zuzieht, geschlossen werden.

Macht man diesen Einsatz und ordnet nach Potenzen von ∂, so ist deren höchste $v-1+2v-1=3v-2$. Wir können nun hier die einzelnen Coefficienten der verschiedenen Potenzen von ∂, die ganzzahlige Ausdrücke in den $[k, l]$ werden, nicht $\equiv 0$ (mod. p) setzen, schon deshalb nicht, weil sonst die $[k, l]$ durch zu viele Gleichungen überbestimmt sein würden, sondern müssen *entweder* auf Potenzen von $\overset{\nu}{(m)}^{\pm 1}$ zurückgehn, deren höchste $3v-2$ oder nach der Aufmultiplication $6v-4$ zum Exponenten haben wird. Die Coefficienten von Potenzen, deren Exponentensumme $=6v-4$ ist, sind gleich und wir haben also nur die Hälfte derselben zu behandeln. Von diesen sind nun einige einzeln $=0$ zu setzen, andere zu je zweien einander gleich und einer ganz beliebig. Dieser gehört zum Exponenten $5v-2$, denn es ist

$$K_{5v-2}\left(\overset{\nu}{(m)}^{5v-2}+\overset{\nu}{(m)}^{v-2}\right) \equiv 0 \ \left(\text{mod. } p=\overset{\nu}{(m)}^{4v}+1\right),$$

folglich K_{5v-2} unbestimmt. Gleich sind je zwei von diesem ihrer Stelle nach gleich weit entfernte Coefficienten, also $K_{5v-2+2k}$ und $K_{5v-2-2k}$, dies ergiebt $\frac{v}{2}-1$ Gleichungen, und einzeln verschwinden $\frac{v}{2}+1$ Coefficienten nämlich K_{3v-2} bis K_{4v-2}. Es werden also ebenfalls $v\left(\frac{v}{2}-1+\frac{v}{2}+1\right)=v^2$ Gleichungen im Ganzen erhalten werden. Da nun dies so erhaltene System durch eine lineare Substitution $[k, l]=F((k, l))$ in das unter A erhaltene übergehen muss, so finden eine Menge Relationen zwischen Binomialcoefficienten und Ergänzungscoefficienten statt; —

oder wir müssen die linke Seite jener Congruenzen

$$_{1\cdots h\cdots v}\sum_{0}^{\frac{3}{2}v-1}{}_r K_{h,2r}\partial^{2r} = \text{Factor}\cdot\frac{p}{\mathfrak{n}^2}$$

setzen. Da

$$\frac{p}{\mathfrak{n}^2} = \partial_{2v} = \partial^{2v}+2v\,\partial^{2v-2}+\frac{2v(2v-3)}{1.2}\,\partial^{2v-4}+\cdots$$

ist, so muss der Factor von der $(v-2)^{\text{ten}}$ Potenz sein, also

$$=\sum_{0}^{\frac{1}{2}v-1}{}_s(-\alpha_{h,2s})\,\partial^{2s}.$$

Es werden also die v Congruenzen

$$_{1\cdots h\cdots v}\sum_{0}^{\frac{3}{2}v-1}{}_r K_{h,2r}\,\partial^{2r}+\left[\sum_{0}^{\frac{1}{2}v-1}{}_s\,\alpha_{h,2s}\,\partial^{2s}\right].\left[\sum_{0}^{v}{}_\varrho\,\delta_\varrho\,\partial^{2v-2\varrho}\right]\equiv 0$$

geordnet

$$1 \ldots h \ldots v \sum_{0}^{\frac{3}{2}v-1}{}_{r} L_{h,2r} \partial^{2r} \equiv 0$$

durch Auflösung von $\frac{3v^2}{2}$ linearen Gleichungen $L = 0$ für $v^2 + \frac{v^2}{2}$ Unbekannte zu befriedigen sein. Die Ausführung dieser Andeutungen würde jedoch die dieser Arbeit gesteckten Grenzen überschreiten.

Schluss.

Es bleibt noch übrig, die Modificationen, deren vollständige Untersuchung sehr umfangreich ist, hier in dem leichtesten Falle $\nu = \mu + 2$ abzuleiten, um die obigen Angaben zu rechtfertigen.

Die *positive* Wurzel x der anfangs erwähnten Congruenz $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ oder, was dasselbe sagen will, da $\overset{\nu-1}{m} = 2$ ist, $x^2 \equiv \overset{(\nu-1)}{m} \pmod{p}$ hat den Werth $-\partial_r$, denn $(\partial_r)^2 = \partial_{2r} + 2 \equiv 2$. Wir haben also einerseits $\overset{\nu}{m} = -\partial_r$, andererseits setzen wir $\overset{\nu}{m} = \sqrt{2}$.

Da nun die $e_\varkappa$ ($\varkappa$ gerade) nur gerade Potenzen von $\overset{\nu}{m}$ enthalten, so ist es gleichgültig, ob wir

$$e_\varkappa \equiv \sum_{1}^{\frac{1}{2}v-1}{}_{\varrho} (\varkappa, 2\varrho)\, \partial_{2\varrho} \pmod{p} \quad 0 < e_\varkappa < \frac{m}{2}$$

und hierin

$$\partial_{2\varrho} = (\overset{\nu}{m})^{2\varrho} + (\overset{\nu}{m})^{-2\varrho}, \quad (\overset{\nu}{m}) = -\partial_r$$

oder

$$e_\varkappa = \sum_{1}^{\frac{1}{2}r-1}{}_{\varrho} (\varkappa, 2\varrho)\, \partial_{2\varrho}$$

schreiben und hierin

$$\partial_{2\varrho} = (\overset{\nu}{m})^{2\varrho} + (\overset{\nu}{m})^{-2\varrho}, \quad \overset{\nu}{m} = \sqrt{2},$$

denn

$$(\sqrt{2})^2 = 2 \text{ und } (-\partial_r)^2 \equiv 2.$$

Anders aber bei den e_λ, λ ungerade. Möchten wir, wie vorhin

$$e_\lambda = \sum_{1}^{\frac{r}{2}-1}{}_{\varrho} (\lambda, 2\varrho+1)\, \partial_{(2\varrho+1)}$$

annehmen, so würde e_λ eine im Verhältniss zu den Werthen, die es thatsächlich haben kann, viel zu grosse Zahl werden, oder irrational. Setzten

wir es aber

$$\equiv \sum_{1}^{\frac{v}{2}-1}{}_{\varrho} (\lambda, 2\varrho+1)\,\partial_{2\varrho+1},$$

so wären wieder die Coefficienten $(\lambda, 2\varrho+1)$ zu grosse Zahlen und die vorhin gegebene Auflösung durch lineare Gleichungen nicht anwendbar. Beide Uebelstände werden aber dadurch gehoben, dass wir, da $\sqrt{2}\overset{v}{m} = 2$ ist, für e_λ die Form $\sqrt{2}E_\lambda$ annehmen, wo nun

$$E_\lambda = \sum_{1}^{\frac{v}{2}-1}{}_{\varrho} (\lambda, 2\varrho+1)\,\partial_{2\varrho+1}.$$

Für die Congruenzen

$$_{1\ldots}{}^{h\ldots v}\; e_0 + \sum_{2}^{2(v-1)}{}_{x}\, e_x\, \partial_{x(2h-1)} + \sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, e_\lambda\, \partial_{\lambda(2h-1)} \equiv 0 \pmod{p}$$

wird aber nicht sowohl $e_\lambda = \sqrt{2}E_\lambda$, sondern $\equiv (-\partial_v)E_\lambda$ einzuführen sein. Dann werden dieselben

$$_{1\ldots}{}^{h\ldots v}\; e_0 + \sum_{2}^{2(v-1)}{}_{x}\, e_x\, \partial_{x(2h-1)} - \sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, E_\lambda (\partial_v \partial_{\lambda(2h-1)}) = 0;$$

$\partial_v \partial_\lambda$ ist aber $\partial_{v+\lambda} - \partial_{v-\lambda}$, und man beachte, dass $\partial_{(-\lambda)} = -\partial_\lambda$ und $\partial_{2v+\lambda} = \partial_{2v-\lambda}$ ist. Lässt man dasselbe Gesetz auch für die Bezeichnung der E gelten, also

$$E_{(-\lambda)} = -E_\lambda \quad \text{und} \quad E_{2v+\lambda} = E_{2v-\lambda},$$

so kann man, wie sich leicht ergiebt,

$$\sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, E_\lambda \partial_v \partial_\lambda = \sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, \partial_\lambda (E_{v+\lambda} - E_{v-\lambda})$$

setzen und wird hierin $(\overset{v}{m})^{2h-1}$ statt $(\overset{v}{m})^1$ substituirt, so erhalten wir, da $\partial_v = \mathfrak{n} + \frac{1}{\mathfrak{n}}$ ist und $\mathfrak{n}^4 = m \equiv -1$, mithin $\partial_{v(2h-1)} = \mathfrak{z}.\partial_v$ wird, $\mathfrak{z} = \pm 1$,

$$\sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, E_\lambda \partial_v \partial_{\lambda(2h-1)} = \sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, \mathfrak{z}.\partial_{\lambda(2h-1)} (E_{v+\lambda} - E_{v-\lambda})$$

und $\mathfrak{z}$ wird hierin

$$= +1, \quad \text{für} \quad h \equiv 1 \text{ oder } 0 \pmod{4},$$
$$= -1, \quad \text{für} \quad h \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod{4}.$$

Mithin haben wir, wenn $E_{v+\lambda} - E_{v-\lambda} = \mathrm{E}_\lambda$ geschrieben wird,

$$_{1\ldots}{}^{h\ldots v}\; e_0 + \sum_{2}^{2(v-1)}{}_{x}\, e_x.\partial_{x(2h-1)} \pm \sum_{1}^{2v-1}{}_{\lambda}\, \mathrm{E}_\lambda \partial_{\lambda(2h-1)} \equiv 0,$$

wobei das + Zeichen für $h \equiv 2$ und 3 (mod. 4) zu wählen ist. Dies System lässt nun für die Grössen e_x und E_λ genau dieselbe Behandlung zu, wie

oben für die Grössen e_x und e_λ. Wir erhalten auch *dasselbe* System linearer Gleichungen, *nur* dass bei den Gleichungen für $h \equiv 1$ und $0 \pmod{4}$ die Coefficienten der Unbekannten (λ, λ_1), λ und λ_1 ungerade, das entgegengesetzte Zeichen erfordern. — Hat man dann die E_λ gefunden, die ja Summen und Differenzen der E_λ sind, so werden hieraus die E_λ bestimmt.

Beispiel.

$\mu = 3, \ \nu = 5.$

Das Coefficientenschema für die (k, l) ist hier, wenn wir das zweite der oben unter $\nu = 5$ erwähnten Schemata wählen, folgendes

Coefficientenschema $\mu = 3, \ \nu = 5.$

		0, 0	4, 0	2, 2	6, 2	2, 0	6, 0	0, 2	4, 2	1, 1	7, 1	5, 1	3, 1	3, 3	5, 3	1, 3	7, 3	fr. Glied
$= 0$	$h = 1$	+		+2						+2				+2				
	$h = 4$	+		−2							−2				+2			
	$h = 2$	+			−2							−2				−2		
	$h = 3$	+			+2								−2				−2	
$= 2$	$h = 1$		+	+	+							+	−			−	+	−1
	$h = 4$		+	−	−							−	−			+	+	−1
	$h = 2$		−	+	−					+	+			−	+			−1
	$h = 3$		−	−	+					−	+			+	+			−1
$= 1$	$h = 1$					+		+	+	−			+		+	+		
	$h = 4$					−		+	+		+	+		−			−	
	$h = 2$						−	+	−	−		+			−		+	
	$h = 3$						+	+	−		−		+	−		−		
$= 3$	$h = 1$						+		+		+	−		−			+	
	$h = 4$						−		+	+			+		−	+		
	$h = 2$					+			−		−		−	−		+		
	$h = 3$					−			−	+		+			+		+	
Werthe		(−6)	(−3)	(1)	(1)	(−2)	(−2)	(4)	(2)	(1)	(−3)	(−3)	(−3)	(1)	(1)	(−1)	(1)	

und $(4, 0) = -1$. Hiemit werden nun die e_x

$$\frac{e_0}{n} = -\partial_4 + 4\partial_2 - 6, \quad \text{also} \quad e_0 = -n\,\partial^4 \qquad = -1$$

$$\frac{e_2}{n} = \quad +1\,\partial_2 - 2, \quad \text{also} \quad e_2 = \quad n\,\partial^2 \qquad = \quad 2$$

$$\frac{e_4}{n} = \quad +2\,\partial_2 - 3, \quad \text{also} \quad e_4 = \quad n(2\,\partial^2 + 1) = \quad 8$$

$$\frac{e_6}{n} = \quad +1\,\partial_2 - 2, \quad \text{also} \quad e_6 = \quad n\,\partial^2 \qquad = \quad 2;$$

ferner die E_λ

$$\frac{E_1}{n} = -1\partial_3 + 1\partial$$
$$\frac{E_3}{n} = +1\partial_3 - 3\partial$$
$$\frac{E_5}{n} = +1\partial_3 - 3\partial$$
$$\frac{E_7}{n} = +1\partial_3 - 3\partial;$$

also, da

$$E_1 = E_5 - E_3$$
$$E_3 = E_7 - E_1$$
$$E_5 = E_7 + E_1$$
$$E_7 = E_5 + E_3$$

ist, so

$$\frac{E_1}{n} = \tfrac{1}{2}(E_5 - E_3) = 0$$
$$\frac{E_3}{n} = \tfrac{1}{2}(E_7 - E_1) = 1\partial_3 - 2\partial$$
$$\frac{E_5}{n} = \tfrac{1}{2}(E_7 + E_1) = \quad -1\partial$$
$$\frac{E_7}{n} = \tfrac{1}{2}(E_5 + E_3) = \partial_3 - 3\partial,$$

also die e_λ

$$\frac{e_1}{n} = \sqrt{2}\,\frac{E_1}{n} = 0, \qquad e_1 = 0 \qquad = 0$$
$$\frac{e_3}{n} = \sqrt{2}\,\frac{E_3}{n} = \sqrt{2}(\partial_3 - 2\partial), \quad e_3 = n\sqrt{2}(\partial^3 + \partial) = 6$$
$$\frac{e_5}{n} = \sqrt{2}\,\frac{E_5}{n} = \sqrt{2}(\quad -\partial), \quad e_5 = n\sqrt{2}(-\partial) = -4$$
$$\frac{e_7}{n} = \sqrt{2}\,\frac{E_7}{n} = \sqrt{2}(\partial_3 - 3\partial), \quad e_7 = n\sqrt{2}\,\partial^3 = 2,$$

worin

$$n = \sqrt[4]{m} = 4, \quad \partial = \overset{5}{m} - \frac{1}{\overset{5}{m}} \quad \text{und} \quad \overset{5}{m} = \sqrt{2}$$

ist und

$$(-n\partial^4)^2 + 2\,\{2(n\partial^2)^2 + (n(2\partial^2+1))^2 + (n\sqrt{2}(\partial^3+\partial))^2 + (n\sqrt{2}(-\partial))^2 + (n\sqrt{2}\,\partial^3)^2\}$$

wird identisch $= p$.

Zusammenhang zwischen den Congruenzen

$$1 \ldots h \ldots v \quad \sum_{0}^{2v-1}{}_r\, e_r\,\partial_{r(2h-1)} \equiv 0 \pmod{p}$$

und der Bedingungsgleichung

$$p = e_0^2 + 2\sum_1^{2v-1} e_r^2.$$

Sondert man bei den Congruenzen die dem Index nach geraden e_x von den e_λ und quadrirt beide Seiten; so erhält man leicht

$$e_0^2 + 2\Sigma e_r^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Sollte nun ausser den e noch ein zweites System ganzer Zahlen g die Congruenzen erfüllen und auch

$$g_0 \equiv -1 \pmod{4} \quad \text{und} \quad g_0^2 + 2\Sigma g_r^2 = p$$

sein, so würde man

$$(e_0 - g_0)^2 + 2\Sigma(e_r - g_r)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

folgern können und hieraus

$$\pm(2e_0 g_0 + 2\Sigma 2e_r g_r) = 0 \quad \text{oder} \quad \overline{\gtrless} 6p.$$

Nun ist aber

$$\pm 2e_r g_r \overline{\gtrless} e_r^2 + g_r^2, \quad \text{also} \quad \pm(2e_0 g_0 + 2\Sigma 2e_r g_r) \overline{\gtrless} 2p,$$

folglich $= 0$, und es sind daher die g nicht von den e verschieden. *Ein* System e muss es aber geben, wie aus der Definition der Zahlen e folgt.

Königsberg, den 4. Februar 1878.

Auflösung der Gleichungen fünften Grades *).

(Von Herrn *L. Kiepert* in Darmstadt.)

Herr *Kronecker* hat bei seinen ausgezeichneten Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades gefunden **), dass ihre Auflösung abhängt von der Lösung einer Gleichung sechsten Grades in f^2, deren Wurzeln sich durch Anwendung elliptischer Functionen explicite darstellen lassen. (Man vergleiche auch die Abhandlung von Herrn *Brioschi:* Sul metodo di *Kronecker* per la risoluzione delle equazioni di quinto grado. Milano 1858.)

Schon vor einigen Jahren machte mich Herr *Weierstrass* darauf aufmerksam, dass diese Darstellung wahrscheinlich einfacher werde, wenn man seine Function $\wp u$ statt der *Jacobi*schen Bezeichnungen einführe, und veranlasste mich auch zu Rechnungen, die aber damals nicht ganz den gewünschten Erfolg hatten.

Ich wurde zu diesem Probleme zurückgeführt, als Herr *Klein* im Anschluss an seine Untersuchungen über das Ikosaëder, die später zusammengefasst in den mathematischen Annalen erschienen ***), eine Notiz in den *Rendi conti* †) veröffentlichte, in welcher er darauf aufmerksam macht, dass die Gleichung, aus welcher Herr *Kronecker* bei seiner Methode den Modul der elliptischen Function berechnete, im Wesentlichen von der absoluten Invariante der elliptischen Function abhängt. Es gelang mir so im Anschluss an meine früheren Rechnungen fast unmittelbar, die Formeln für die Auflösung jener Gleichungen sechsten Grades für einen wichtigen Specialfall ($a = 0$) zu finden, welche in §. 3 auseinander gesetzt sind.

Ich will hier gleich bemerken, dass inzwischen Herr *Klein* seinerseits

---

*) Ein Auszug dieser Abhandlung findet sich in den Nachrichten der Göttinger Ges. d. Wissensch. (Sitzung vom 6. Juli 1878 p. 424.) und in den *Annali di Matematica,* Serie IIª, Tomo IXº. p. 119.

**) *Kronecker,* Extrait d'une lettre à M. *Hermite* (Comptes rendus 1858, 6 Juin), und Ueber Gleichungen fünften Grades (Monatsberichte d. Berliner Akademie 1861 p. 609).

***) *Klein,* Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder (Math. Annalen Band 12 p. 503—560).

†) *Klein,* Sull' equazioni dell' Icosaedro nella risoluzione delle equazioni del quinto grado, 26 aprile 1877.

auf ganz anderem Wege zu analogen Formeln geführt wurde*), und zwar stellte sich unsre gegenseitige Beziehung merkwürdiger Weise so, dass er mir auf mein Schreiben, durch welches ich ihm im December 1877 mein Resultat mittheilte, antworten konnte, er sei den Tag vor Ankunft meines Briefes gerade zu derselben Formel gelangt**).

Im Folgenden habe ich diese Untersuchungen von meinem Standpunkte aus eingehend dargestellt, und habe namentlich im letzten Paragraphen ausgeführt, wie sich nunmehr die Lösung der *allgemeinen* Gleichungen fünften Grades gestalten lässt. Wesentlich ist dabei für mich die neue Arbeit von Herrn *Gordan****) gewesen, auf die ich weiter unten noch zu sprechen komme.

Die Zielpunkte, die Herr *Kronecker* im Auge hat, und die nur zu erreichen sind, wenn man Functionen mit *zwei* Parametern zur Lösung jener Gleichung sechsten Grades verwendet, sind bisher noch ausser Acht gelassen, ich hoffe aber, in dem Folgenden bereits die Grundlage für weitere Entwickelungen zu besitzen, die auch in dieser Hinsicht befriedigen.

§. 1. Methode von Herrn *Kronecker*.

Zunächst soll die sinnreiche Methode, die Herr *Kronecker* gegeben hat, mit einigen Worten auseinandergesetzt werden, und zwar will ich dies in einer Form thun, die ich zum Theil wörtlich einer brieflichen Mittheilung von Herrn *Weierstrass* verdanke.

Die Auflösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades lässt sich abhängig machen von der Lösung der Gleichung

$$(1.)\quad (f^2+a)^5(f^2+5a)+10b(f^2+a)^3+4c(f^2+a)+5b^2-4ac = 0\dagger),$$

in der f die Unbekannte bezeichnet, während a, b, c rational aus den Coefficienten der Gleichung fünften Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante zusammengesetzt werden. Diese Gleichung für f ist zwar von höherem Grade als die ursprüngliche, gleichwohl aber viel einfacher,

*) *Klein,* Ueber Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. (Math. Annalen Band 14 p. 111—172.)

**) Vergl. Seite 147 der eben citirten Abhandlung.

***) *Gordan,* Ueber Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. (Math. Annalen Band 13 p. 375—404.)

†) Um Irrungen zu vermeiden, möchte ich erwähnen, dass hier, dem Beispiele von Herrn *Kronecker* folgend, immer $+a$ und $+c$ gesetzt ist, wo bei Herrn *Brioschi* $-a$ und $-c$ steht.

nicht nur, weil in ihr blos *drei* Constanten vorkommen, sondern hauptsächlich deswegen, weil unter ihren Wurzeln lineare Relationen bestehen, welche charakteristisch für sie sind.

Wählt man nämlich unter ihren Wurzeln irgend eine (f) aus, so lassen sich derselben fünf andere f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 in der Art zugesellen, dass unter ihnen entweder die Relationen

$$(2^a.)\quad \begin{cases} f_0+f_1+f_2+f_3+f_4=\pm f\sqrt{5}, \\ f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3 f_3+\varepsilon^4 f_4=0, \\ f_0+\varepsilon^4 f_1+\varepsilon^3 f_2+\varepsilon^2 f_3+\varepsilon f_4=0, \end{cases}$$

oder die Relationen

$$(2^b.)\quad \begin{cases} f_0+f_1+f_2+f_3+f_4=\mp f\sqrt{5}, \\ f_0+\varepsilon^2 f_1+\varepsilon^4 f_2+\varepsilon f_3+\varepsilon^3 f_4=0, \\ f_0+\varepsilon^3 f_1+\varepsilon f_2+\varepsilon^4 f_3+\varepsilon^2 f_4=0 \end{cases}$$

bestehen, wo

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{5}}=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

sein soll.

Diese drei Relationen sagen aus, dass man $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ durch drei Grössen A_0, A_1, A_2 in folgender Weise darstellen kann:

$$(3^a.)\quad \pm f=A_0\sqrt{5},\quad f_r=A_0+\varepsilon^{2r}A_1+\varepsilon^{3r}A_2,$$

oder

$$(3^b.)\quad \mp f=A_0\sqrt{5},\quad f_r=A_0+\varepsilon^{r}A_1+\varepsilon^{4r}A_2.$$

Umgekehrt erhält man, wenn sechs Grössen $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ durch die Relationen (2^a.) oder (2^b.) mit einander verbunden sind, für die Quadrate derselben mittels der Ausdrücke (3^a.) resp. (3^b.) eine Gleichung von der Form (1.), in der a, b, c ganze rationale Functionen von A_0, A_1, A_2 sind.

Nun hat *Jacobi* gefunden (dieses Journal Bd. 3, p. 308), dass in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen Grössen vorkommen, welche Wurzeln einer Gleichung von der Form (1.) sind. Ist z. B. $\sin\operatorname{am}(\mu u, \lambda)$ durch Transformation fünften Grades aus $\sin\operatorname{am}(u, k)$ entstanden, so hat μ für einen gegebenen Werth von k sechs Werthe, und diese genügen, für f^2 gesetzt, der Gleichung (1.), wenn man

$$a=-1,\quad b=0,\quad c=2^7 k^2(1-k^2)$$

macht. Ich will deshalb nach dem Vorgange von Herrn *Brioschi* die Gleichung (1.) eine *Jacobi-Kronecker*sche *Resolvente* nennen.

Zur Lösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades reicht aber die Gleichung, welcher μ genügt, nicht aus, weil man von den drei Grössen a, b, c höchstens der *einen* durch Einführung einer Substitution einen bestimmten vorgeschriebenen Werth geben kann, während die *beiden* andern *variabel* bleiben müssen, wenn ein von *Abel* für die algebraisch lösbaren Gleichungen gegebener Satz, den Herr *Kronecker* auf die allgemeinen Gleichungen übertragen hat, Geltung behalten soll. Herr *Kronecker* verlangt nämlich, dass alle bei der Auflösung der Gleichung benutzten Hülfsgrössen aus den Wurzeln der Gleichung (abgesehen von Wurzeln der Einheit) *rational* zusammengesetzt seien.

Dieser Forderung genügt bis jetzt keine der gegebenen Auflösungen der Gleichungen fünften Grades, denn bei allen kommen *irrationale* Functionen der Wurzeln zur Anwendung.

Man kann z. B. die *allgemeine Jacobi-Kronecker*sche Resolvente auf eine *specielle* reduciren, in der a gleich Null ist. Es giebt nämlich unendlich viele Functionen f von den Wurzeln einer Gleichung fünften Grades, die einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente genügen, und mit den zugehörigen Werthen f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 die Relationen (2^a.) oder (2^b.) befriedigen. Solche Functionen sind nach den Angaben von Herrn *Kronecker* z. B. folgende Ausdrücke, in denen x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der gegebenen Gleichung fünften Grades bezeichnen:

$$f = \sum_{m=0}^{m=4} \sum_{n=1}^{n=4} x_m\, x_{m+n}^2\, x_{m+2n}^2 \sin\frac{2n\pi}{5} \quad \text{und} \quad f' = \sum_{m=0}^{m=4} \sum_{n=1}^{n=4} x_m^3\, x_{m+n}\, x_{m+2n} \sin\frac{2n\pi}{5},$$

wobei die grösseren Indices auf die kleinsten Reste modulo 5 zu beschränken sind.

Da die Relationen (2^a.) und (2^b.) homogene lineare Gleichungen sind, so gelten sie auch für $f+vf'$, wenn sie für f und f' einzeln gelten, was auch v sein mag. Daraus folgt, dass $f+vf'$ die Wurzel einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente ist, wobei noch v so gewählt werden möge, dass

$$(f+vf')^2+(f_0+vf'_0)^2+(f_1+vf'_1)^2+(f_2+vf'_2)^2+(f_3+vf'_3)^2+(f_4+vf'_4)^2 = 0$$

wird. Dies giebt zur Berechnung von v eine *quadratische* Gleichung, deren Coefficienten aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung und der Quadratwurzel aus ihrer Discriminante *rational* zusammengesetzt sind.

Durch diese Bestimmung von v erreicht man, dass $f+vf'$ die Wurzel einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente wird, in der die Grösse a gleich

Null ist, die sich also, wenn f statt $f+vf'$ gesetzt wird, auf die Form

$$(4.)\quad f^{12}+10bf^6+4cf^2+5b^2 = 0$$

reducirt. Auch für diese Gleichung giebt es in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen ein Analogon. Ist nämlich

$$\sqrt{z} = \frac{\cos\mathrm{am}\, 2\Omega}{\cos\mathrm{am}\, 4\Omega} - \frac{\cos\mathrm{am}\, 4\Omega}{\cos\mathrm{am}\, 2\Omega},$$

wobei 2Ω der fünfte Theil einer Periode ist, dann wird z die Wurzel der Gleichung

$$z^6 - \frac{160}{k^2k'^2}z^3 - \frac{2^8(1-16k^2k'^2)}{k^4k'^4}z + \frac{2^8.5}{k^4k'^4} = 0.$$

Setzt man daher $mz = f^2$, so hat man k und m so zu bestimmen, dass

$$b = -\frac{16m^3}{k^2k'^2},\quad c = -\frac{2^6m^5(1-16k^2k'^2)}{k^4k'^4}$$

wird. Man hat also zur Berechnung von $k^2k'^2$ die kubische Gleichung

$$\frac{c^3}{b^5} = \frac{(1-16k^2k'^2)^3}{4k^2k'^2}$$

aufzulösen und findet dann den Werth von k^2 durch Auflösung einer quadratischen Gleichung. Für m ergiebt sich schliesslich der Werth

$$m = -\frac{b^2(1-16k^2k'^2)}{4c}.$$

§. 2. Hülfsformeln.

Ehe ich mit der soeben angedeuteten Lösung diejenige vergleiche, die durch Anwendung der *Weierstrass*schen Bezeichnungen möglich wird, will ich einige von Herrn *Weierstrass* in seinen Vorlesungen gegebene Formeln anführen*). Es seien 2ω und $2\omega'$ die Fundamentalperioden der elliptischen Function $\wp u$, welche durch die Differentialgleichung

$$(5.)\quad (\wp' u)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2\wp u - g_3 = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$$

definirt ist. Dabei sei für den Fall, dass

$$(6.)\quad \Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2$$

grösser als Null ist, wo also e_1, e_2, e_3 reell sind,

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

---

*) Die wichtigsten Formeln, die sich auf die von Herrn *Weierstrass* in seinen Vorlesungen eingeführte Function $\wp u$ beziehen, habe ich meiner Abhandlung „Wirkl. Ausführung d. ganzzahligen Multiplication d. ellipt. Functionen" vorangeschickt. (Dieses Journal Bd. 76, p. 21—33.)

Ferner sei

$$(7.)\quad z = e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}, \quad h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}},$$

so dass h dieselbe Bedeutung hat wie bei ***Jacobi*** der Buchstabe q. Gewöhnlich wird h durch die ausserordentlich stark convergente Reihe

$$(8.)\quad h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \cdots$$

ausgerechnet, wobei

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2}}{\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2}} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

ist. Dazu braucht man die Auflösung der kubischen Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0.$$

Bei der folgenden Untersuchung kommt es aber gerade darauf an, dass diese Irrationalität umgangen wird, und dies ist in der That möglich, da sich mit Anwendung hypergeometrischer Reihen ω und ω' als Functionen der absoluten Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ berechnen lassen, also auch $h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$, was immer noch nicht hinreichend bekannt ist. (Vergl. ***H. Bruns***, Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, Dorpat 1875 und ***F. Klein***, Ueber Transformation d. ellipt. Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Abschnitt I. Math. Annalen Band 14, p. 111—126.)

Setzt man nun noch

$$2\eta = \frac{\omega}{\pi^2}\left(\frac{1}{6} + \Sigma \frac{1}{\sin\frac{\nu\omega'\pi}{\omega}}\right),$$

so wird

$$(9.)\quad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\,\frac{z - z^{-1}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}z^2}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu}z^{-2}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

und

$$(10.)\quad \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n}\cdot e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\,\sigma u.$$

Hierbei gelten noch die Relationen

$$\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}, \quad \eta' = \frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega'}, \quad 2\eta\omega' - 2\eta'\omega = \pi i,$$

$$\wp u = -\frac{d^2\lg(\sigma u)}{du^2},$$

$$(11.)\qquad \wp u - \wp v = \frac{\sigma(v-u)\sigma(v+u)}{(\sigma v)^2(\sigma u)^2},$$

$$(12.)\qquad \Delta^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1-h^{2\nu}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}.$$

§. 3. Darstellung der Grössen f.

Es sei jetzt

$$(13.)\qquad \xi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right)-\wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)},$$

dann findet man durch Anwendung der bekannten Transformationsgleichungen *), dass ξ der Gleichung

$$(14.)\qquad \xi^6 + \frac{10}{\Delta}\xi^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}\xi + \frac{5}{\Delta^2} = 0$$

genügt. Damit diese Gleichung für $f = \xi^{\frac{1}{2}}$ mit der *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente (4.) identisch wird, hat man nur zu setzen

$$(15.)\qquad \Delta = \frac{1}{b},\quad g_2 = \frac{-c}{3b^2},\quad 27g_3^2 = g_2^3 - \Delta = \frac{-c^3-27b^5}{27b^6},\quad J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{-c^3}{27b^5}.$$

Jetzt haben wir nach Formel (11.)

$$f = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right)-\wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)} = \frac{\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right)^2\sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right)^2}{\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right)\sigma\left(\frac{6\omega}{5}\right)};$$

da aber nach Formel (10.)

$$\sigma\left(\frac{6\omega}{5}\right) = \sigma\left(-\frac{4\omega}{5}+2\omega\right) = -e^{\frac{2\eta\omega}{5}}\sigma\left(-\frac{4\omega}{5}\right) = e^{\frac{2\eta\omega}{5}}\sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right)$$

ist, so wird

$$(16.)\qquad f = e^{-\frac{2\eta\omega}{5}}\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right) \text{**}).$$

---

*) Vergl. *Felix Müller*, De transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867 bei Calvary.

**) Diese Darstellung von f scheint von besonderem Interesse zu sein, da sie eine Verallgemeinerung zulässt, die für die Auflösung der Gleichungen höherer Grade von Wichtigkeit ist. So hat z. B. bei Auflösung der Gleichungen siebenten Grades die Grösse

$$f = e^{-\frac{4\eta\omega}{7}}\sigma\left(\frac{2\omega}{7}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{7}\right)\sigma\left(\frac{6\omega}{7}\right)$$

die entsprechende Bedeutung.

Nun ist $z = e^{\frac{\pi i}{5}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ für $u = \frac{2\omega}{5}$, und $z = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \varepsilon$ für $u = \frac{4\omega}{5}$, deshalb ist nach Formel (9.)

$$\sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \frac{2\omega}{\pi} \cdot e^{\frac{2\eta\omega}{25}} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^4}{1-h^{2\nu}}\right),$$

$$\sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right) = \frac{2\omega}{\pi} \cdot e^{\frac{8\eta\omega}{25}} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^2}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^3}{1-h^{2\nu}}\right),$$

also

$$f = \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(1-h^{10\nu})}{(1-h^{2\nu})^5}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch einfacher schreiben, denn es ist nach Formel (12.)

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^3 = \Delta^{-\frac{1}{6}} h^{\frac{1}{3}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-h^{2\nu})^4 \quad \text{und} \quad 4 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5},$$

folglich wird

$$(17.) \quad f = h^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt{5} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{1-h^{10\nu}}{1-h^{2\nu}}\right) = \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt{5} \; \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}}.$$

Dies ist die oben besprochene Formel, welche, unwesentlich modificirt, Herr *Klein* fast gleichzeitig mit mir gefunden hat.

In ähnlicher Weise lassen sich die Grössen f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 bilden, wenn man

$$f_r = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right)} = \frac{\sigma\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{5}\right)^2 \sigma\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right)^2}{\sigma\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{5}\right) \sigma\left(\frac{6\omega'+144r\omega}{5}\right)}$$

setzt. Gewöhnlich werden bei Transformation der elliptischen Functionen die Perioden der transformirten Function mit

$$\frac{2\omega}{n}, \quad 2\omega' \quad \text{resp.} \quad 2\omega, \quad \frac{2\omega'+16r\omega}{n} \quad (r = 0, 1, 2, \dots n-1)$$

bezeichnet. Der Grund davon, dass man $2\omega'+16r\omega$ und nicht $2\omega'+2r\omega$ schreibt, mag wohl darin liegen, dass in den meisten Rechnungen die Grössen $h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ und $h^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\omega'\pi i}{4\omega}}$ benutzt werden, welche bei der Transformation übergehen in

$$h^n \quad \text{und} \quad h^{\frac{n}{4}} \quad \text{resp.} \quad h^{\frac{1}{n}} . e^{\frac{8r\pi i}{n}} \quad \text{und} \quad h^{\frac{1}{4n}} . e^{\frac{2r\pi i}{n}}.$$

Hätte man $2r$ statt $16r$ geschrieben, so würde bei $h^{\frac{1}{4n}}$ ausser der n^{ten} Wurzel der Einheit noch eine achte Wurzel der Einheit als Factor hinzutreten.

In dem Folgenden spielt nun die Grösse $h^{\frac{1}{12}}$ eine grosse Rolle. Um also eine 24te Einheitswurzel bei $h^{\frac{1}{12}}$ zu vermeiden, schreibe ich die Perioden der transformirten Function

$$\frac{2\omega}{n}, \quad 2\omega' \quad \text{resp.} \quad 2\omega, \quad \frac{2\omega'+48r\omega}{n}.$$

Dadurch wird nur die Anordnung der f eine andre, weshalb ich auch in den Formeln (2ª.), (2ᵇ.) und (3ª.), (3ᵇ.) bei der Grösse f das untere Vorzeichen erhalten muss, während man bisher nur das obere Zeichen hatte.

Nach Formel (10.) wird

$$\sigma\left(\frac{6\omega'+144r\omega}{5}\right) = \sigma\left(-\frac{4\omega'+96r\omega}{5}+2\omega'+48r\omega\right)$$
$$= e^{(2\eta'+48r\eta)\left(\frac{\omega'+24r\omega}{5}\right)}.\sigma\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right),$$

und deshalb

$$f_r = e^{-(2\eta'+48r\eta)\left(\frac{\omega'+24r\omega}{5}\right)}\sigma\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{5}\right)\sigma\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right).$$

Für $u = \frac{2\omega'+48r\omega}{5}$ wird $z = h^{\frac{1}{5}}\varepsilon^{12r}$, und nach Formel (9.)

$$\sigma\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{5}\right)$$
$$= \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\frac{2\eta}{25\omega}(\omega'+24r\omega)^2}.\frac{h^{\frac{1}{5}}\varepsilon^{12r}-h^{-\frac{1}{5}}\varepsilon^{-12r}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu+\frac{2}{5}}\varepsilon^{24r}}{1-h^{2\nu}}.\frac{1-h^{2\nu-\frac{2}{5}}\varepsilon^{-24r}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

und ebenso

$$\sigma\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{5}\right)$$
$$= \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\frac{8\eta}{25\omega}(\omega'+24r\omega)^2}.\frac{h^{\frac{2}{5}}\varepsilon^{24r}-h^{-\frac{2}{5}}\varepsilon^{-24r}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu+\frac{4}{5}}\varepsilon^{48r}}{1-h^{2\nu}}.\frac{1-h^{2\nu-\frac{4}{5}}\varepsilon^{-48r}}{1-h^{2\nu}}\right).$$

Dies giebt

$$f_r = -\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2\varepsilon^{-24r}h^{-\frac{2}{5}}\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{(1-\varepsilon^{24r\nu}h^{\frac{2\nu}{5}})}{(1-h^{2\nu})},$$

oder

$$(18.)\quad f_r = -\varepsilon^r h^{\frac{1}{15}}\Delta^{-\frac{1}{6}}\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\frac{1-\varepsilon^{24r\nu}h^{\frac{2\nu}{5}}}{1-h^{2\nu}}\right) = -\Delta^{-\frac{1}{6}}\frac{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda\varepsilon^{r(6\lambda+1)^2}h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}}{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}}.$$

Wenn man also

$$(19.)\quad B = \Delta^{\frac{1}{6}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-h^{2\nu}) = \Delta^{\frac{1}{6}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}$$

setzt*), so wird

$$(20.)\quad \begin{cases} B.f = h^{\frac{5}{12}} \sqrt{5} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-h^{10\nu}) = \sqrt{5} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}}, \\ B.f_r = -\varepsilon^r h^{\frac{1}{60}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-\varepsilon^{24r\nu} h^{\frac{2\nu}{5}}) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}}. \end{cases}$$

§. 4. Andere Darstellung der Grössen f.

Die Grössen f haben noch eine andere interessante Bedeutung. Nach Formel (12.) ist nämlich

$$\Delta^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-h^{2\nu}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}.$$

Sind nun $D, D_0, D_1, D_2, D_3, D_4$ die dem Δ entsprechenden Discriminanten der transformirten elliptischen Functionen, so wird analog

$$D^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{5\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{5}{12}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-h^{10\nu}),$$

$$D_r^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^r h^{\frac{1}{60}} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1-\varepsilon^{24r\nu} h^{\frac{2\nu}{5}}),$$

also

$$B = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{5}{24}}, \quad B.f = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{24}}, \quad B.f_r = -\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} D_r^{\frac{1}{24}},$$

folglich ist

$$(21.)\quad \Delta^{\frac{5}{24}} f = D^{\frac{1}{24}}, \quad \Delta^{\frac{5}{24}} f_r = -D_r^{\frac{1}{24}}.$$

§. 5. Relationen zwischen den Grössen $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$.

Mit Hülfe der Gleichungen (20.) ist es leicht zu zeigen, dass zwischen den Grössen $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ die Relationen (2''.) bestehen. Es ist nämlich

$$B.f_r = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}},$$

und setzt man $\lambda = 5\mu + \nu$, wo $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, so wird

$$\varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} = \varepsilon^{r(6\nu+1)^2},$$

---

*) Die Grösse $\Delta^{\frac{1}{6}}$ ist wegen Formel (12.) nicht als Irrationalität zu betrachten. Auch der Factor $h^{\frac{5}{12}}$ hebt sich in dem Ausdruck für f fort, wenn man die Entwickelung von $\Delta^{\frac{1}{6}}$ einsetzt.

und dies ist bezüglich für

$$\nu = 0,\quad \nu = 1,\quad \nu = 2,\quad \nu = 3,\quad \nu = 4$$
$$\varepsilon^r,\qquad \varepsilon^{4r},\qquad \varepsilon^{4r},\qquad \varepsilon^r,\qquad 1.$$

Deshalb wird, da sich in $\sum_{r=0}^{r=4} B.f_r$ alle Glieder fortheben, in denen ν von 4 verschieden ist,

$$\sum_{r=0}^{r=4} B.f_r = -5\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\mu h^{\frac{25(6\mu+5)^2}{60}},$$

oder wenn man $\mu = -\lambda - 1$ setzt,

$$\sum_{r=0}^{r=4} B.f_r = 5\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}} = B.f\sqrt{5}.$$

Damit ist die erste der Relationen (2^b.) bewiesen:

$$f_0+f_1+f_2+f_3+f_4 = f\sqrt{5}.$$

Ferner ist

$$B.\varepsilon^{2r} f_r = -\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda \varepsilon^{2r+r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}},$$

und es ist für $\lambda = 5\mu + \nu$

$$\varepsilon^{2r+r(6\lambda+1)^2} = \varepsilon^{2r+r(6\nu+1)^2}.$$

Dies wird aber bezüglich für

$$\nu = 0,\quad \nu = 1,\quad \nu = 2,\quad \nu = 3,\quad \nu = 4$$
$$\varepsilon^{3r},\qquad \varepsilon^r,\qquad \varepsilon^r,\qquad \varepsilon^{3r},\qquad \varepsilon^{2r},$$

folglich ist

$$\sum_{r=0}^{r=4} B.\varepsilon^{2r} f_r = 0 \quad \text{oder} \quad f_0+\varepsilon^2 f_1+\varepsilon^4 f_2+\varepsilon f_3+\varepsilon^3 f_4 = 0;$$

ebenso zeigt man, dass

$$f_0+\varepsilon^3 f_1+\varepsilon f_2+\varepsilon^4 f_3+\varepsilon^2 f_4 = 0,$$

und dies sind die beiden andern Relationen (2^b.).

§. 6. Bildung anderer Functionen, die einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente genügen.

Schon Herr *Kronecker* hat in der oben erwähnten Abhandlung gezeigt, wie man aus *einer* solchen Function f andere herleiten kann, die gleichfalls einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente genügen. Herr ***Brioschi*** hat sogar in seinen interessanten Untersuchungen über diesen Gegenstand diese anderen Functionen explicite gegeben. (Die Resultate seiner früheren Arbeiten sind sehr übersichtlich in seiner neuesten Abhandlung: Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Math. Annalen Bd. 13, p. 109—160 zusammengestellt.) Die von Herrn ***Brioschi*** aufgestellten Aus-

drücke will ich auf die eben besprochene Function

$$f = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$$

anwenden.

Es sei zunächst f die Wurzel der *allgemeinen Jacobi-Kronecker*schen Resolvente

$$(1.)\quad (f^2+a)^5(f^2+5a)+10b(f^2+a)^3+4c(f^2+a)+5b^2-4ac = 0,$$

dann genügen sechs passend gewählte Wurzeln der Gleichung $f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ den Relationen

$$(2^a.)\quad \begin{cases} f_0+\ \ f_1+\ \ f_2+\ \ f_3+\ \ f_4 = \pm f\sqrt{5}, \\ f_0+\varepsilon\, f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3 f_3+\varepsilon^4 f_4 = 0, \\ f_0+\varepsilon^4 f_1+\varepsilon^3 f_2+\varepsilon^2 f_3+\varepsilon\, f_4 = 0, \end{cases}$$

oder den Relationen

$$(2^b.)\quad \begin{cases} f_0+\ \ f_1+\ \ f_2+\ \ f_3+\ \ f_4 = \mp f\sqrt{5}, \\ f_0+\varepsilon^2 f_1+\varepsilon^4 f_2+\varepsilon\, f_3+\varepsilon^3 f_4 = 0, \\ f_0+\varepsilon^3 f_1+\varepsilon\, f_2+\varepsilon^4 f_3+\varepsilon^2 f_4 = 0. \end{cases}$$

Ebenso werden aber auch die Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial a},\ \frac{\partial f_0}{\partial a},\ \frac{\partial f_1}{\partial a},\ \frac{\partial f_2}{\partial a},\ \frac{\partial f_3}{\partial a},\ \frac{\partial f_4}{\partial a};$$

$$\frac{\partial f}{\partial b},\ \frac{\partial f_0}{\partial b},\ \frac{\partial f_1}{\partial b},\ \frac{\partial f_2}{\partial b},\ \frac{\partial f_3}{\partial b},\ \frac{\partial f_4}{\partial b};$$

$$\frac{\partial f}{\partial c},\ \frac{\partial f_0}{\partial c},\ \frac{\partial f_1}{\partial c},\ \frac{\partial f_2}{\partial c},\ \frac{\partial f_3}{\partial c},\ \frac{\partial f_4}{\partial c}$$

denselben Relationen genügen. Es ist daher ganz allgemein

$$\sqrt{z} = \lambda\frac{\partial f}{\partial a}+\mu\frac{\partial f}{\partial b}+\nu\frac{\partial f}{\partial c}$$

die Wurzel einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente, wobei noch λ, μ, ν ganz beliebige rationale Functionen von a, b, c sind. $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$ können als rationale Functionen von f dargestellt werden, während f eine lineare Function dieser drei Grössen ist, denn es wird nach den Angaben von Herrn *Brioschi*

$$f = 2a\frac{\partial f}{\partial a}+6b\frac{\partial f}{\partial b}+10c\frac{\partial f}{\partial c}.$$

Man kann daher *alle* diese Functionen $\sqrt{z}$ ebenso gut aus f und *zwei* andern passend gewählten Functionen dieser Art *linear* zusammensetzen und zwar seien diese beiden Functionen, wie man sie aus den Formeln von Herrn *Brioschi* ohne Weiteres entnehmen kann,

$$f' = [(f^4-a^2)(f^2+5a)-5b]:2bf,$$

$$f'' = [f^8+9af^6+27a^2f^4+39a^3f^2+9bf^2+20a^4+14ab]\cdot\frac{f}{2b}\cdot$$

Ist

$$f = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right)-\wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)},$$

so wird a gleich Null und b gleich $\frac{1}{\varDelta}$, folglich ist

$$(22.)\quad f' = \tfrac{1}{2}(\varDelta f^5-5f^{-1}),\quad f'' = \tfrac{1}{2}(\varDelta f^9+9f^3),$$

und zwar genügt f' der Gleichung

$$(23.)\quad \begin{cases} f'^2-3g_2)^5(f'^2-15g_2)+1600\varDelta(f'^2-3g_2)^3-1800000g_2^2\varDelta(f'^2-3g_2) \\ \qquad +12800000\varDelta^2-5400000g_2^3\varDelta = 0. \end{cases}$$

Hier ist also

$$a = -3g_2,\quad b = 1600\varDelta,\quad c = -450000g_2^2\varDelta.$$

In der Form

$$\sqrt{z} = pf+qf'+rf''$$

sind daher unendlich viele Ausdrücke enthalten, die alle den Relationen (2^b.) genügen und deshalb Wurzeln einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente sind. Die Coefficienten p, q, r sind dabei noch beliebige Functionen von g_2 und $\varDelta$.

Herr *Klein* scheint zuerst beachtet zu haben, dass sich nicht nur die Constanten a, b, c, sondern auch die *vierte* Wurzel aus der Discriminante π der *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente rational durch die Coefficienten und die Quadratwurzel aus der Discriminante von der ursprünglichen Gleichung fünften Grades darstellen lässt, während sich durch die Grössen a, b, c nur die *Quadratwurzel* aus π rational ausdrücken lässt. Da diese Grösse $\sqrt[4]{\pi}$ von Wichtigkeit ist, möge sie bei den hier ausgerechneten Resolventen jedes Mal angegeben werden. Allgemein ist

$$\sqrt{\pi} = 64(-27b^5-c^3-25a^3b^4+40a^4b^2c-16a^5c^2+45ab^3c-20a^2bc^2).$$

Dies giebt bei der Gleichung

$$\Delta^2 f^{12} + 10\,\Delta f^6 - 12\,g_2 f^2 + 5 \;=\; 0$$

$$\sqrt{\pi} = \frac{64.27.27\,g_3^2}{f^6}, \quad \text{also} \quad \sqrt[4]{\pi} = \frac{216\,g_3}{\Delta^3}.$$

Bei Gleichung (23.) ist

$$\sqrt[4]{\pi} = 2^6.3^3.5^5 g_3 \Delta (3^3 g_2^3 + 2^9 \Delta).$$

Man kann aber, wie gleichfalls schon Herr *Kronecker* gezeigt hat, aus f auch andre Ausdrücke bilden, die den Relationen (2^a.) genügen, und zwar wird ψ ein solcher Ausdruck sein, wenn ganz allgemein

$$(f^2 + a)\left(\psi^2 + \frac{c}{5b^2 - 4ac}\right) = 1$$

ist. Hier ist also

$$\Delta^2 f^{12} + 10\,\Delta f^6 - 12\,g_2 f^2 + 5 \doteq 0,$$

oder wenn man durch $5f^{12}$ dividirt und $\frac{1}{f^2} = \psi^2 - \frac{3g_2}{5}$ setzt,

$$(24.)\quad \frac{1}{f^{12}} - \frac{12g_2}{5}\frac{1}{f^{10}} + 2\Delta\cdot\frac{1}{f^6} + \frac{\Delta^2}{5} = (\psi^2 - \tfrac{3}{5}g_2)^5(\psi^2 - 3g_2) + 2\Delta(\psi^2 - \tfrac{3}{5}g_2)^3 + \frac{\Delta^2}{5} = 0.$$

Dabei wird

$$a = -\tfrac{3}{5}g_2, \quad b = \frac{\Delta}{5}, \quad c = 0, \quad \sqrt[4]{\pi} = \frac{216\,g_3\,\Delta^2}{25\sqrt{5}}.$$

Man kann auch ψ selbst als rationale Function von f darstellen, denn es ist

$$\begin{aligned} 5f^2\psi^2 = 3g_2 f^2 + 5 &= 3\,g_2 f^2 + 5 + \tfrac{1}{4}(\Delta^2 f^{12} + 10\,\Delta f^6 - 12\,g_2 f^2 + 5) \\ &= \tfrac{1}{4}(\Delta^2 f^{12} + 10\,\Delta f^6 + 25) \end{aligned}$$

oder

$$(25.)\quad \psi = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\Delta f^5 + 5f^{-1}).$$

Aus den Untersuchungen der Herren *Kronecker* und *Brioschi* folgt, dass ψ und die zugehörigen Wurzeln der Gleichung (24.) den Relationen (2^a.) genügen. Dasselbe gilt aber auch von $\frac{\partial\psi}{\partial a}$, $\frac{\partial\psi}{\partial b}$, $\frac{\partial\psi}{\partial c}$, ja sogar von

$$\lambda'\frac{\partial\psi}{\partial a} + \mu'\frac{\partial\psi}{\partial b} + \nu'\frac{\partial\psi}{\partial c},$$

wo λ', μ', ν' noch beliebige Functionen von a, b, c sind. Die einfachsten Ausdrücke, aus denen sich $\lambda'\frac{\partial\psi}{\partial a} + \mu'\frac{\partial\psi}{\partial b} + \nu'\frac{\partial\psi}{\partial c}$ *linear* zusammensetzen lässt, und die selbst solche Grössen sind, heissen

$$(26.)\quad \varphi = \tfrac{1}{2}(\Delta f^5 + 5f^{-1}), \quad \varphi' = f^3, \quad \varphi'' = \tfrac{1}{2}(\Delta f^7 + 7f).$$

Die *Jacobi-Kronecker*sche Resolvente, der φ genügt, ist wegen $\varphi = \psi\sqrt{5}$

$$(24^a.)\quad \begin{cases} (\varphi^2-3g_2)^5(\varphi^2-15g_2)+250\varDelta(\varphi^2-3g_2)^3+3125\varDelta^2 = 0, \\ a = -3g_2, \quad b = 25\varDelta, \quad c = 0, \quad \sqrt[4]{\pi} = 216.5^5 g_3\varDelta^2. \end{cases}$$

Die Resolvente, deren Wurzel $\varphi' = f^3$ ist, findet man sehr leicht aus

$$\varDelta^2 f^{12} + 10\varDelta . f^6 - 12g_2 f^2 + 5 = 0,$$

denn es ist

$$(12g_2f^2)^3 = 1728g_2^3\varphi'^2 = (\varDelta^2\varphi'^4 + 10\varDelta\varphi'^2+5)^3,$$

oder

$$(27.)\quad \begin{cases} (\varDelta\varphi'^2+3)^5(\varDelta\varphi'^2+15)-320(\varDelta\varphi'^2+3)^3 \\ \quad +192(16\varDelta-9g_2^3)(\varDelta\varphi'^2+3)-2^{12}+\dfrac{5184g_2^3}{\varDelta} = 0, \\ a = \dfrac{3}{\varDelta}, \quad b = -\dfrac{32}{\varDelta^3}, \quad c = \dfrac{48}{\varDelta^6}(16\varDelta-9g_2^3), \quad \sqrt[4]{\pi} = \dfrac{2^9.3^6g_2^3g_3}{\varDelta^9}. \end{cases}$$

Man kann auch sehr leicht zeigen, dass $\varphi' = f^3$ den Relationen (2^a.) genügt. Bekanntlich ist

$$h^{\frac{1}{4}}\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}(1-h^{2\nu})^3 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda(2\lambda+1)h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}}.$$

Wenn man also, der Gleichung (19.) entsprechend, setzt

$$B^3 = \varDelta^{\frac{1}{4}}h^{\frac{1}{4}}\prod_\nu(1-h^{2\nu})^3 = \varDelta^{\frac{1}{4}}\sum_0^\infty(-1)^\lambda(2\lambda+1)h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}},$$

so wird

$$B^3f^3 = 5\sqrt{5}\sum_0^\infty(-1)^\lambda(2\lambda+1)h^{\frac{5(2\lambda+1)^2}{4}},$$

$$B^3f_r^3 = -\sum_0^\infty(-1)^\lambda(2\lambda+1)\varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2}h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{20}}.$$

Jetzt wird wieder für $\lambda = 5\mu+\nu$

$$\varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} = \varepsilon^{3r(2\nu+1)^2}$$

und dies ist bezüglich für

$$\begin{array}{ccccc} \nu = 0, & \nu = 1, & \nu = 2, & \nu = 3, & \nu = 4 \\ \varepsilon^{3r}, & \varepsilon^{2r}, & 1, & \varepsilon^{2r}, & \varepsilon^{3r}; \end{array}$$

da sich also in $\sum_{r=0}^{r=4}B^3f_r^3$ alle Glieder fortheben, bei denen ν von 2 verschieden ist, so erhält man

$$B^3\sum_{r=0}^{r=4}f_r^3 = -5\sum_0^\infty(-1)^\mu(10\mu+5)h^{\frac{5(2\mu+1)^2}{4}} = -25\sum_0^\infty(-1)^\lambda(2\lambda+1)h^{\frac{5(2\lambda+1)^2}{4}},$$

d. h. es ist

$$f_0^3+f_1^3+f_2^3+f_3^3+f_4^3 = -f^3\sqrt{5}.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich dann auch

$$f_0^3+\varepsilon f_1^3+\varepsilon^2 f_2^3+\varepsilon^3 f_3^3+\varepsilon^4 f_4^3 = 0,$$
$$f_0^3+\varepsilon^4 f_1^3+\varepsilon^3 f_2^3+\varepsilon^2 f_3^3+\varepsilon f_4^3 = 0.$$

Beiläufig sei erwähnt, dass

$$(28.)\quad f^3 = \frac{1}{\left[\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right)-\wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)\right]^3} = \frac{1}{\wp'\left(\frac{2\omega}{5}\right)\wp'\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$$

ist. Nach dem Additionstheorem der elliptischen Functionen wird nämlich

$$[\wp(u+v)-\wp(u-v)](\wp u-\wp v)^2 = -\wp' u\wp' v,$$

oder wenn man in dieser Gleichung $u=\frac{2\omega}{5}$, $v=\frac{4\omega}{5}$ setzt,

$$\left[\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right)-\wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)\right]^3 = \wp'\left(\frac{2\omega}{5}\right)\wp'\left(\frac{4\omega}{5}\right).$$

Zum Schluss dieses Paragraphen sei noch die Bemerkung erlaubt, dass sich alle rationalen *ungeraden* Functionen von f *linear* durch die sechs Grössen $f, f', f'', \varphi, \varphi', \varphi''$ darstellen lassen.

Es war nämlich

$$f=f,\qquad f'=\tfrac{1}{2}(\Delta f^5-5f^{-1}),\qquad f''=\tfrac{1}{2}(\Delta f^9+9f^3),$$
$$\varphi=\tfrac{1}{2}(\Delta f^5+5f^{-1}),\qquad \varphi'=f^3,\qquad \varphi''=\tfrac{1}{2}(\Delta f^7+7f).$$

Daraus folgt

$$(29.)\quad \begin{cases} \Delta f^9=2f''-9\varphi',\quad \Delta f^7=2\varphi''-7f,\quad \Delta f^5=f'+\varphi,\\ f^3=\varphi',\quad f=f,\quad f^{-1}=\tfrac{1}{10}(\varphi-f'). \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$\Delta^2 f^{12}+10\Delta f^6-12g_2f^2+5 = 0$$

kann man also *alle* ungeraden Potenzen von f und deshalb auch alle ungeraden rationalen Functionen von f *linear* durch $f, f', f'', \varphi, \varphi', \varphi''$ ausdrücken.

§. 7. Erniedrigung der *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente auf den fünften Grad.

Die Modulargleichungen für die Transformation fünften, siebenten und elften Grades sind bezüglich vom sechsten, achten und zwölften Grade, lassen sich aber, wie bereits *Galois* gezeigt hat, auf einen Grad herab-

drücken, der um eine Einheit niedriger ist. Für die Erniedrigung der *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente hat Herr *Brioschi* folgende Ausdrücke gegeben. Es ist ganz allgemein

$$(30.) \quad y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f^2 - f_r^2)(f_{r+2} - f_{r+3})(f_{r+4} - f_{r+1}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (r = 0, 1, 2, 3, 4),$$

dann werden y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 die Wurzeln der Gleichung

$$(31.) \quad y^5 + 10\,b y^3 + 5(9b^2 - 4ac)y - \sqrt[4]{\pi} = 0,$$

wo π wieder die Discriminante der *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente ist.

Hierbei ist y_r nur scheinbar eine Irrationalität, denn bildet man y_r wirklich, indem man für f und f_r ihre Werthe aus den Gleichungen (3ᵃ.) oder (3ᵇ.) einsetzt, so findet man ohne Weiteres

$$f^2 - f_r^2 = (f_{r+2} + f_{r+3})(f_{r+4} + f_{r+1}),$$
$$f_{r+2} - f_{r+3} = -(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)(f_{r+4} - f_{r+1}),$$

so dass man auch setzen könnte

$$y_r = \frac{\sqrt{-(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)}}{\sqrt[4]{5}} (f^2 - f_r^2)(f_{r+4} - f_{r+1}).$$

(Im Uebrigen lassen sich auch mit Hülfe der Gleichung (31ᵃ.) alle Ausdrücke so umgestalten, dass sie nur y_r^2 enthalten.)

Auch andre rationale Ausdrücke von den Grössen f führen zu einer Resolvente fünften Grades.

Wendet man diese Erniedrigung auf den Fall

$$f = \frac{1}{\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \varphi\left(\frac{4\omega}{5}\right)}, \quad \text{also} \quad a = 0, \quad b = \frac{1}{\Delta}, \quad c = -\frac{3g_2}{\Delta^3}, \quad \sqrt[4]{\pi} = \frac{216 g_3}{\Delta^3}$$

an, so nimmt die Gleichung (31.) die Form an

$$(31^a.) \quad \Delta^3 y^5 + 10\,\Delta^2 y^3 + 45\,\Delta y - 216 g_3 = 0.$$

§. 8. Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades.

Im ersten Paragraphen war gesagt worden, dass sich die Auflösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades abhängig machen lässt von der Auflösung einer *Jacobi-Kronecker*schen Resolvente. Mit demselben Erfolg kann man aber auch die *Brioschi*sche Resolvente benutzen, und zwar hat Herr *Gordan* in seiner oben erwähnten Abhandlung eine Methode angegeben, durch welche die Zurückführung der Gleichung

$$(32.) \quad z^5 + 5\,l z^2 - 5\,m z + n = 0$$

auf eine *Brioschi*sche Resolvente sich ziemlich einfach gestaltet. Wie diese letztere am zweckmässigsten durch elliptische Functionen zu lösen ist*), geht aus dem Voranstehenden unmittelbar hervor. Es ergiebt sich durch Zusammenfassung dieser Betrachtungen nunmehr folgende verhältnissmässig einfache Auflösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades.

Es seien gesucht die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 der allgemeinen Gleichung fünften Grades

$$(33.)\quad x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E = 0.$$

Um diese Gleichung auf die *Brioschi*sche Resolvente (31^a.) zurückzuführen, setze man

$$(34.)\quad x^2-ux+v = -\frac{\alpha+\beta y}{3+\Delta y^2} = z.$$

Zunächst wird durch die Substitution $z = x^2-ux+v$ die Gleichung (33.) auf die Form (32.) gebracht, indem man u und v so bestimmt, dass in der Gleichung fünften Grades, der die Grösse z genügt, die Coefficienten von z^4 und z^3 gleich Null werden. Dies macht allerdings die Auflösung *einer quadratischen Gleichung* nothwendig, und in diesem *einzigen* Punkte genügt die hier angegebene Methode noch nicht den von Herrn *Kronecker* gestellten Anforderungen. Man findet nämlich

$$(35.)\quad (2A^2-5B)u^2+(4A^3-13AB+15C)u+(2A^4-8A^2B+10AC+3B^2-10D) = 0,$$

$$(36.)\quad 5v = -Au-A^2+2B.$$

Nach dieser Festsetzung wird die Gleichung für z

$$(32.)\quad z^5+5lz^2-5mz+n = 0,$$

wobei

$$(37.)\quad \begin{cases} 5l = -C(u^3+Au^2+Bu+C)+D(4u^2+3Au+2B)-E(5u+2A)-10v^3, \\ 5m = -D(u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D)+E(5u^3+4Au^2+3Bu+2C)+5v^4+10lv, \\ n = -E(u^5+Au^4+Bu^3+Cu^2+Du+E)-v^5-5lv^2+5mv \end{cases}$$

ist. Um nun noch die Gleichung (32.) auf die Form von (31^a.) zu bringen, stellt man den andern aus Gleichung (34.) sich ergebenden Werth von z, nämlich $z = -\frac{\alpha+\beta y}{3+\Delta y^2}$ mit Gleichung (31^a.) zusammen und eliminirt y,

*) Herr *Gordan* hat in seiner Arbeit die Frage, welche Methoden zur Auflösung der *Brioschi*schen Resolvente durch elliptische Functionen möglichst einfach zu verwenden sind, wie es scheint, absichtlich, nicht berührt, ist vielmehr zum Schluss darauf eingegangen, die *Hermite-Jerrard*sche Form zu discutiren, wobei sehr complicirte Formeln entstehen.

dann erhält man eine Gleichung von der Form

$$z^5 + 5Lz^2 - 5Mz + N = 0.$$

Damit nun aber völlige Uebereinstimmung dieser Gleichung mit Gleichung (32.) stattfindet, oder mit andern Worten, damit $L = l$, $M = m$, $N = n$ werde, müssen α, β und $\frac{g_2^3}{\Delta}$ so gewählt werden, dass die Gleichungen

$$(38.)\quad \begin{cases} 1728 g_2^3 \Delta L = 8\Delta^2\alpha^3 - 72\Delta\alpha\beta^2 + 216 g_3(\Delta\alpha^2\beta - \beta^3) = 1728 g_2^3 \Delta l, \\ 1728 g_2^3 \Delta M = \Delta^2\alpha^4 + 18\Delta\alpha^2\beta^2 - 27\beta^4 + 216 g_3\alpha\beta^3 \quad = 1728 g_2^3 \Delta m, \\ 1728 g_2^3 \Delta^2 N = \Delta^3\alpha^5 + 10\Delta^2\alpha^3\beta^2 + 45\Delta\alpha\beta^4 + 216 g_3\beta^5 = 1728 g_2^3 \Delta^2 n \end{cases}$$

befriedigt werden. Dies geschieht, wenn man α aus der quadratischen Gleichung

$$(39.)\quad (l^4 - lmn + m^3)\alpha^2 + (11l^3 + ln^2 - 2m^2 n)\alpha - 27l^3 n + 64 l^2 m^2 + mn^2 = 0\text{*)}$$

berechnet und in die Formeln

$$(40.)\quad \begin{cases} \pm 12 g_2 = l\alpha^2 + 3m\alpha - n, \\ \pm \Delta = l^2[(ln - m^2)\alpha + mn], \\ \beta^2 = \pm l^3[l^2\alpha^2 + 11lm\alpha + 64m^2 - 27ln] \end{cases}$$

einsetzt. Für die Lösung der quadratischen Gleichung (39.) ist noch zu erwähnen, dass

$$2(l^4 - lmn + m^3)\alpha = -(11l^3 + ln^2 - 2m^2 n) \pm l\sqrt{\Delta'}$$

wird, wo

$$\Delta' = 108 l^5 n - 135 l^4 n^2 - 90 l^2 mn^2 + 320 lm^3 n - 256 m^5 + n^4$$

die Discriminante der Gleichung (32.) ist. Nun ist aber

$$z = x^2 - ux + v \quad \text{und deshalb} \quad z_\lambda - z_\mu = (x_\lambda - x_\mu)(x_\lambda + x_\mu - u),$$

so dass $\sqrt{\Delta'}$ gleich ist der Quadratwurzel aus der Discriminante der ursprünglichen Gleichung fünften Grades, multiplicirt mit einer rationalen Function von u und von den Coefficienten dieser Gleichung. Die Berechnung von α führt also keine Irrationalität herbei, die mit den Anforderungen von Herrn *Kronecker* unverträglich wäre.

Ferner kommt zu der irrationalen Grösse u scheinbar noch eine zweite β hinzu, da nur β^2 rational durch α dargestellt ist. Dies ist aber nicht der Fall, denn in Wirklichkeit braucht man β selbst gar nicht.

---

*) Bei dem in den Göttinger Nachrichten und in den Annali di Matematica veröffentlichten Auszuge steht in dieser Gleichung aus Versehen $-mn^2$ statt $+mn^2$.

Multiplicirt man nämlich

$$z = -\frac{\alpha+\beta y}{3+\Delta y^2}$$

im Zähler und Nenner mit $\Delta^3 y^4+10\Delta^2 y^2+45\Delta$, so wird der Zähler

$$-\alpha(\Delta^3 y^4+10\Delta^2 y^2+45\Delta)-\beta(\Delta^3 y^5+10\Delta^2 y^3+45\Delta y)$$
$$= -\alpha(\Delta^3 y^4+10\Delta^2 y^2+45\Delta)-216 g_3 \beta;$$

$g_3\beta$ lässt sich aber, wie schon aus den Gleichungen (38.) hervorgeht, rational durch α darstellen.

Zur vollständigen Auflösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades sind nach dem Vorhergehenden nur folgende Rechnungsoperationen nöthig.

1.) *Man berechne aus der quadratischen Gleichung* (35.) *die Grösse* u, *dann geben die Gleichungen* (36.) *und* (37.) *unmittelbar die Werthe von* v, l, m *und* n.

2.) *Sodann berechne man* α *aus der Gleichung* (39.) *und setze den gefundenen Werth in die Formeln* (40.) *ein.*

3.) *Man berechne aus der absoluten Invariante* $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ *die Grösse* $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$.

4.) *Man bestimme* f *und* f_r $(r = 0, 1, 2, 3, 4)$ *durch die Gleichungen* (20.)

$$B.f = \sqrt{5}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{5(6\lambda+1)^2}{12}}, \quad B.f_r = -\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{60}},$$

$$B = \Delta^{\frac{1}{8}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}},$$

berechne

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left[(f^2-f_r^2)(f_{r+2}^2-f_{r+3}^2)(f_{r+4}^2-f_{r+1}^2)\right]^{\frac{1}{4}}$$

und daraus

$$z_r = -\frac{\alpha+\beta y_r}{3+\Delta y_r^2},$$

dann sind die fünf Wurzeln der ***allgemeinen*** *Gleichung fünften Grades*

$$x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E = 0$$

$$x_r = -\frac{E+(z_r-v)(u^3+Au^2+Bu+C)+(z_r-v)^2(2u+A)}{u^4+Au^3+Bu^2+Cu+D+(z_r-v)(3u^2+2Au+B)+(z_r-v)^3}.$$
$$(r = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Darmstadt, im August 1878.

On the triple ϑ-functions.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

There should be in all 64 functions proportional to irrational algebraical functions of three independent variables x, y, z; there is no difficulty in obtaining the expression of these 64 functions in the case of the system of differential equations connected with the integral

$$\int dx : \sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x.e-x.f-x.g-x.h-x};$$

but this is ***not the general form*** of the system for the deficiency (Geschlecht) $p=3$; and I do not know how to deal with the general form: the present note relates therefore exclusively to the abovementioned hyper-elliptic form.

I.

If in the Memoir, *Weierstrass* „Theorie der *Abel*schen Functionen" this Journal t. 52 (1856) pp. 285—380, we take $\varrho=3$, and write x, y, z; u, v, w; a, b, c, d, e, f, g instead of x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$; then neglecting throughout mere constant factors, we have:

$$X = a-x.b-x.c-x.d-x.e-x.f-x.g-x$$

with the like values for Y and Z: the differential equations are

$$du = \frac{b-x.c-x.dx}{\sqrt{X}} + \frac{b-y.c-y.dy}{\sqrt{Y}} + \frac{b-z.c-z.dz}{\sqrt{Z}},$$

$$dv = \frac{c-x.a-x.dx}{\sqrt{X}} + \frac{c-y.a-y.dy}{\sqrt{Y}} + \frac{c-z.a-z.dz}{\sqrt{Z}},$$

$$dw = \frac{a-x.b-x.dx}{\sqrt{X}} + \frac{a-y.b-y.dy}{\sqrt{Y}} + \frac{a-z.b-z.dz}{\sqrt{Z}},$$

and if we write the single letters A, B, C, D, E, F, G for $\mathrm{al}(u,v,w)_1$, $\mathrm{al}(u,v,w)_2$, $\mathrm{al}(u,v,w)_3$, $\mathrm{al}(u,v,w)_4$, $\mathrm{al}(u,v,w)_5$, $\mathrm{al}(u,v,w)_6$, $\mathrm{al}(u,v,w)_7$ respectively (each of the capital letters thus denoting a function of (u,v,w)), the expressions of these functions in terms of (x,y,z) are

$$A = \sqrt{a-x.b-x.c-x}, \quad \text{(seven equations)}.$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Similarly instead of the 21 functions $\mathrm{al}(u,v,w)_{12}$, ... $\mathrm{al}(u,v,w)_{67}$ writing

$AB, \ldots FG$ (each of these binary symbols denoting in like manner a function of (u, v, w)), the definition of AB is

$$AB = A\nabla B - B\nabla A,$$

where

$$\nabla = \frac{d}{du} + \frac{d}{dv} + \frac{d}{dw};$$

we have

$$b-c.c-a.a-b \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{a-y.a-z}{x-y.x-z}(b-c)\,du + \frac{b-y.b-z}{x-y.x-z}(c-a)\,dv + \frac{c-y.c-z}{x-y.x-z}(a-b)\,dw,$$

$$\text{,,} \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{a-z.a-x}{y-z.y-x}(b-c)\,du + \frac{b-z.b-x}{y-z.y-x}(c-a)\,dv + \frac{c-z.c-x}{y-z.y-x}(a-b)\,dw,$$

$$\text{,,} \qquad \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{a-x.a-y}{z-x.z-y}(b-c)\,du + \frac{b-x.b-y}{z-x.z-y}(c-a)\,dv + \frac{c-x.c-y}{z-x.z-y}(a-b)\,dw;$$

hence

$$\frac{b-c.c-a.a-b}{\sqrt{X}}\nabla x = \frac{a-y.a-z}{x-y.x-z}(b-c) + \frac{b-y.b-z}{x-y.x-z}(c-a) + \frac{c-y.c-z}{x-y.x-z}(a-b),$$

$$= -\frac{b-c.c-a.a-b}{x-y.x-z},$$

that is

$$\nabla x = \frac{-\sqrt{X}}{x-y.x-z}, \quad \text{and similarly} \quad \nabla y = \frac{-\sqrt{Y}}{y-x.y-z}, \quad \nabla z = \frac{-\sqrt{Z}}{z-x.z-y}.$$

Hence from the equation $A = \sqrt{a-x.a-y.a-z}$, we have

$$\nabla A = -\tfrac{1}{2}A\left(\frac{1}{a-x}\nabla x + \frac{1}{a-y}\nabla y + \frac{1}{a-z}\nabla z\right),$$

that is

$$\nabla A = \frac{\frac{1}{2}A}{y-z.z-x.x-y}\left\{\frac{y-z}{a-x}\sqrt{X} + \frac{z-x}{a-y}\sqrt{Y} + \frac{x-y}{a-z}\sqrt{Z}\right\},$$

and similarly

$$\nabla B = \frac{\frac{1}{2}B}{y-z.z-x.x-y}\left\{\frac{y-z}{b-x}\sqrt{X} + \frac{z-x}{b-y}\sqrt{Y} + \frac{x-y}{b-z}\sqrt{Z}\right\};$$

consequently

$$AB = \frac{\frac{1}{2}(a-b)A.B}{y-z.z-x.x-y}\left\{\frac{(y-z)\sqrt{X}}{a-x.b-x} + \frac{(z-x)\sqrt{Y}}{a-y.b-y} + \frac{(x-y)\sqrt{Z}}{a-z.b-z}\right\},$$

or substituting for A and B their values, and disregarding the constant factor $\frac{1}{2}(a-b)$, this is

$$AB = \frac{1}{y-z.z-x.x-y}\Big\{(y-z)\sqrt{a-y.b-y.a-z.b-z.c-x.d-x.e-x.f-x.g-x}$$

$$+(z-x)\sqrt{a-z.b-z.a-x.b-x.c-y.d-y.e-y.f-y.g-y}$$

$$+(x-y)\sqrt{a-x.b-x.a-y.b-y.c-z.d-z.e-z.f-z.g-z}\Big\},$$

and we have thus in all 21 equations, which exhibit the form of the *Weierstrassian* functions $\text{al}(u, v, w)_{12}, \ldots \text{al}(u, v, w)_{67}$.

To complete the system there should it is clear be 35 new functions $\mathrm{al}(u, v, w)_{123}, \ldots \mathrm{al}(u, v, w)_{567}$ represented by $ABC, \ldots EFG$, viz. the whole number of functions would then be

$$7+\frac{7.6}{1.2}+\frac{7.6.5}{1.2.3}\,(=7+21+35)=63, \;=64-1,$$

since the functions represent ratios of the ϑ-functions.

II.

Starting now with the radical

$$\sqrt{a-x.b-x.c-x.d-x.e-x.f-x.g-x.h-x}$$

composed of eight linear factors, and writing (as in my memoir on the double ϑ-functions t. 85 (1878, pp. 214—245); a, b, c, d, e, f, g, h to denote these factors, and similarly $\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_1, \mathrm{d}_1, \mathrm{e}_1, \mathrm{f}_1, \mathrm{g}_1, \mathrm{h}_1$ and $\mathrm{a}_2, \mathrm{b}_2, \mathrm{c}_2, \mathrm{d}_2, \mathrm{e}_2, \mathrm{f}_2, \mathrm{g}_2, \mathrm{h}_2$ to denote $a-y$, $b-y$, etc. and $a-z$, $b-z$, etc.; so that $X=\mathrm{abcdefgh}$, $Y=\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_1\mathrm{e}_1\mathrm{f}_1\mathrm{g}_1\mathrm{h}_1$, $Z=\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2\mathrm{d}_2\mathrm{e}_2\mathrm{f}_2\mathrm{g}_2\mathrm{h}_2$, then instead of the *Weierstrassian* form the differential equations may be taken to be

$$du = \frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

$$dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{Y}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}},$$

$$dw = \frac{x^2dx}{\sqrt{X}}+\frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}+\frac{z^2dz}{\sqrt{Z}},$$

and we then have 64 ϑ-functions and an ω-function, viz. writing $\theta=y-z.z-x.x-y$, and then

$$\sqrt{a} = \sqrt{\mathrm{a}\,\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2} \quad \text{(8 equations)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{abc} = \frac{1}{\theta}\left\{(y-z)\sqrt{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2\mathrm{defgh}}+(z-x)\sqrt{\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2\mathrm{abcd}_1\mathrm{e}_1\mathrm{f}_1\mathrm{g}_1\mathrm{h}_1}+\right.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \left.+(x-y)\sqrt{\mathrm{abca}_1\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1\mathrm{d}_2\mathrm{e}_2\mathrm{f}_2\mathrm{g}_2\mathrm{h}_2}\right\} \quad \text{(56 equations)}$$

the equations which define the ϑ-functions $A, B, \ldots H, ABC, \ldots FGH$, and the ω-function Ω are

$$A = \Omega\sqrt{a} \quad \text{(8 equations)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$ABC = \Omega\sqrt{abc} \quad \text{(56 equations)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

and one other relation which I have not as yet investigated.

As regards the algebraical relations between the 64 ϑ-functions it is to be remarked that selecting in a proper manner 8 of the functions, the square of any one of the other functions can be expressed as a linear function of the squares of the 8 selected functions. To explain this somewhat further, observe that taking any 5 squares such as $(ABC)^2$, we can with these 5 squares form a linear combination which is rational in x, y, z. We have for instance, writing down the irrational part only,

$$(ABC)^2 = \frac{2}{\theta^2}\{\mathrm{abc}(z-x)(x-y)\sqrt{YZ}+\mathrm{a_1b_1c_1}(x-y)(y-z)\sqrt{ZX}$$
$$+\mathrm{a_2b_2c_2}(y-z)(z-x)\sqrt{XY}\},$$

and forming in all five such equations, then inasmuch as the coefficients abc, ... of $(z-x)(x-y)\sqrt{YZ}$ are each of them a cubic function containing terms in x^0, x^1, x^2, x^3, we have a determinate set of constant factors such that the resulting term in $(z-x)(x-y)\sqrt{YZ}$ will be $=0$; but the coefficients $\mathrm{a_1b_1c_1}$, of $(x-y)(y-z)\sqrt{ZX}$ only differ from the first set of coefficients by containing y instead of x, and the same set of constant factors will thus make the resulting term in $(x-y)(y-z)\sqrt{ZX}$ to be $=0$; and similarly the same set of constant factors will make the resulting term in $(y-z)(z-x)\sqrt{XY}$ to be $=0$; viz. we have thus a set of constant factors, such that the whole irrational part will disappear. *It seems to be in general true that the same set of constant factors will make the rational part integral;* viz. the rational part is a function of the form $\frac{1}{\theta^2}$ into a rational and integral function of x, y, z, and if this rational and integral function divide by θ^2, then the final result will be a rational and integral function, which, being symmetrical in x, y, z, is at once seen to be a linear function of the symmetrical combinations 1, $x+y+z$, $yz+zx+xy$, xyz; such a function is obviously a linear function of any four squares A^2, B^2, C^2, D^2; or the form is, linear function of five squares $(ABC)^2 =$ linear function of four squares A^2, that is any one of the five squares is a linear function of 8 squares.

As an instance consider the *three* squares $(ABC)^2$, $(ABD)^2$, $(ABE)^2$ which are such that we have a linear combination which is rational: in fact we have here in each function the pair of factors ab, which unites itself with $(z-x)(x-y)\sqrt{XY}$, viz. it is only the coefficient of $\mathrm{ab}(z-x)(x-y)\sqrt{XY}$ which has to be made $=0$; the required combination is obviously

$$(d-e)(ABC)^2+(e-c)(ABD)^2+(c-d)(ABE)^2.$$

Here the irrational part vanishes and the rational part is found to be

$$= \frac{1}{\theta^2}\Big[a_1b_1a_2b_2fgh\,(y-z)^2\begin{Bmatrix}(d-e)\,c_1c_2de\\+(e-c)\,d_1d_2ce\\+(c-d)\,e_1e_2dc\end{Bmatrix}$$

$$+\,a_2b_2abfgh\,(z-x)^2\begin{Bmatrix}(d-e)\,c_2cd_1e_1\\+(e-c)\,d_2dc_1e_1\\+(c-d)\,e_2ed_1c_1\end{Bmatrix}$$

$$+\,aba_1b_1f_1g_1h_1\,(x-y)^2\begin{Bmatrix}(d-e)\,cc_1d_2e_2\\+(e-c)\,dd_1c_2e_2\\+(c-d)\,ee_1d_2c_2\end{Bmatrix}\Big].$$

The three terms in $\{\}$ are here $= -(c-d)(d-e)(e-c)$ into $(z-x)(x-y)$, $(x-y)(y-z)$, $(y-z)(z-x)$ respectively; hence the term in $[\,]$ divides by θ and the result is

$$= -\frac{(c-d)(d-e)(e-c)}{\theta}\Big[a_1b_1a_2b_2\,f\,g\,h\;(y-z)$$
$$+\,a_2b_2a\,b\;f_1g_1h_1\,(z-x)$$
$$+\,a\,b\;a_1b_1\,f_2g_2h_2\,(x-y)\Big],$$

or finally this is

$$= -(c-d)(d-e)(e-c)$$

into

$$\begin{array}{lllll} & \{(a^2+ab+b^2)fgh-(a^2b+ab^2)(fg+fh+gh)+a^2b^2(f+g+h)\} \\ + \quad (x+y+z)\{ & -(a+b)fgh+ & ab(fg+fh+gh)-a^2b^2 & & \} \\ +(yz+zx+xy)\{ & fgh- & ab(f+g+h) & +a^2b+ab^2 & \} \\ + \quad xyz\{ & -(fg+fh+gh)+ & (a+b)(f+g+h)-(a^2+ab+b^2)\}, \end{array}$$

that is, we have $(d-e)(ABC)^2+(e-c)(ABD)^2+(c-d)(ABE)^2 =$ a sum of four squares, viz. we have here a linear relation between 7 squares.

I have not as yet investigated the forms of the relations between the products of pairs of ϑ-functions.

Cambridge, 30. Sep. 1878.

Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen.

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Göttingen.)

Der vorliegende Aufsatz hat folgendes Theorem zum Gegenstande: Wenn eine irreductible algebraische Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen die Eigenschaft hat, durch eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst überzugehen, so ist die Anzahl der von einander linear unabhängigen allenthalben endlich bleibenden Integralfunctionen, welche ebenso verzweigt sind, wie die mit der betrachteten Gleichung im *Riemann*schen Sinne zu derselben Klasse gehörenden algebraischen Functionen, entweder gleich *Null* oder gleich *Eins*.

Der Beweis, den ich im Nachfolgenden für dieses Theorem mittheile, um in einer folgenden Abhandlung auf dasselbe mich berufen zu können, gründet sich auf die Betrachtung einer *Riemann*schen Fläche, durch welche die Verzweigung der erwähnten algebraischen Functionen geometrisch dargestellt werden kann. In Rücksicht hierauf gebe ich dem zu beweisenden Theoreme folgende Fassung: Wenn eine geschlossene *Riemann*sche Fläche durch eine Schaar abbildender Functionen auf sich selbst eindeutig, zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet werden kann, so ist dieselbe entweder *einfach* oder *dreifach* zusammenhängend.

Es sei $F(s, z) = 0$ eine irreductible algebraische Gleichung zwischen den beiden veränderlichen Grössen s und z, welche die Eigenschaft besitzt, durch eine *Schaar* rationaler Transformationen

$$s = \sigma(s_1, z_1; \alpha), \quad z = \zeta(s_1, z_1; \alpha)$$

in sich selbst, d. h. in die Gleichung $F(s_1, z_1) = 0$ überzugehen. Die Grössen s, z sind hierbei voraussetzungsgemäss rationale Functionen der Grössen s_1, z_1 und analytische Functionen der Grösse α, des Parameters der Schaar.

Ferner werde vorausgesetzt, dass auch umgekehrt die Grössen s_1 und z_1 als rationale Functionen der Grössen s und z

$$s_1 = \sigma_1(s, z; \alpha), \quad z_1 = \zeta_1(s, z; \alpha)$$

dargestellt werden können. Die Coefficienten dieser rationalen Functionen sind dann analytische Functionen des Parameters α.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die identische Transformation

$$s_1 = s, \quad z_1 = z$$

zu der betrachteten Schaar von Transformationen gehöre und zwar für einen nicht singulären Werth des Parameters der Schaar. Denn, bezeichnet α' einen nicht singulären Werth von α, so besteht erstens zwischen den Grössen

$$s' = \sigma_1(s, z; \alpha'), \quad z' = \zeta_1(s, z; \alpha')$$

die Gleichung

$$F(s', z') = 0,$$

und zweitens sind s und z vermittelst der Gleichungen

$$s = \sigma(s', z'; \alpha'), \quad z = \zeta(s', z'; \alpha')$$

rational durch s' und z' ausdrückbar, mithin auch s_1 und z_1.

Für $\alpha = \alpha'$ ergiebt sich dann

$$s_1 = s', \quad z_1 = z'.$$

Nun kann man von Anfang an $s = s'$, $z = z'$ setzen und der Einfachheit des Ausdruckes wegen die Annahme machen, dass α' den Werth Null habe. Unter dieser Voraussetzung werden sich für unendlich kleine Werthe von α und für nicht singuläre Werthe von s und z die Grössen s_1 und z_1 nur unendlich wenig von s und z unterscheiden. Wenn daher z einen Periodenweg beschreibt, so wird auch z_1 einen Periodenweg beschreiben, und zwar einen solchen, welcher auf den Periodenweg, den die Variable z beschrieben hat, reducirbar ist. Man kann nämlich den Periodenweg von z stets so wählen, dass derselbe durch singuläre Werthe nicht hindurchgeht und die Veränderlichkeit von α auf so kleine Werthe beschränken, falls dies nöthig sein sollte, dass auch die Linie, welche z_1 beschreibt, keinen der singulären Werthe überschreitet.

Es sei nun T die über der z-Ebene ausgebreitete *Riemann*sche Fläche, welche die Verzweigung der algebraischen Function s von z geometrisch darstellt. Man denke sich die Fläche T, falls dieselbe nicht einfach zusammenhängend ist, durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T' übergeführt und bezeichne mit u eine auf der Fläche T stets endlich bleibende Integralfunction, welche durch eine Gleichung von der Form

$$u = \int_{s_0, z_0}^{s, z} \frac{\varphi(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} dz$$

für das Innere der Fläche T' eindeutig erklärt sein möge.

Es sei T_1 die über der z_1-Ebene ausgebreitete der Fläche T congruente *Riemann*sche Fläche. In Folge der gestellten Voraussetzungen entsprechen die beiden Flächen T und T_1 einander gegenseitig Punkt für Punkt eindeutig. Es sei T_1' die vermöge der obigen Gleichungen für einen beliebigen Werth von α, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht überschreitet, der Fläche T' entsprechende einfach zusammenhängende Fläche, und es werde das stets endlich bleibende Integral, welches für $\alpha = 0$ mit dem Integrale u übereinstimmt und im Punkte $s_1 = s_0$, $z_1 = z_0$ den Werth Null annimmt, mit u_1 bezeichnet. Ein Zweig dieser Integralfunction ist innerhalb der Fläche T_1' eine eindeutige Function des Orts, also ist dieser Zweig auch eine eindeutige Function des Orts innerhalb der Fläche T'. Da nun u_1 längs der Querschnitte der Fläche T *dieselben* Periodicitätsmoduln wie u besitzt, so hat die Differenz $u_1 - u = v$ überall den Periodicitätsmodul Null und ist daher, weil sie für keinen Punkt von T unendlich gross wird, eine Constante, welche von dem Parameter der Schaar abhängt und zugleich mit demselben unendlich klein wird.

Diese Constante möge zum Parameter der Schaar gewählt und an Stelle von α in die Transformationsgleichungen eingeführt werden. Man kann dann ohne Nachtheil für die Allgemeinheit der Untersuchung von der Annahme ausgehen, dass sämmtliche in den Transformationsgleichungen vorkommenden Coefficienten, welche als analytische Functionen des Parameters vorausgesetzt wurden, nach Potenzen von v mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Potenzreihen sind, welche sämmtlich convergiren, wenn der absolute Betrag $[v]$ der Grösse v kleiner ist als eine gewisse Grösse δ.

Ist nun s_0, z_0 ein nicht singuläres der Gleichung $F(s_0, z_0) = 0$ genügendes Werthepaar, und s, z ein ebenfalls der Gleichung $F(s, z) = 0$ genügendes dem vorigen benachbartes Werthepaar, so kann man jede der beiden Grössen s, z, welche die obere Grenze des Integrales

$$u = \int_{s_0, z_0}^{s, z} \frac{\varphi(s, z)}{\frac{\partial F}{\partial s}} \cdot dz$$

bestimmen, sobald die Veränderlichkeit der Grösse u auf ein gewisses in der Umgebung des Werthes $u = 0$ liegendes Gebiet beschränkt wird, als eine Function von u betrachten, welche innerhalb dieses Gebietes den Charakter einer ganzen Function besitzt. Es sei die Grösse δ so klein gewählt, dass nicht allein die oben gestellte Bedingung erfüllt ist, sondern überdies die, dass die soeben erklärten Functionenelemente

$$s = \psi(u), \quad z = \chi(u)$$

für alle Werthe von u, deren absoluter Betrag kleiner ist als δ, den Charakter ganzer Functionen besitzen.

Unter dieser Voraussetzung können also die beiden Functionenelemente in der Form von Potenzreihen dargestellt werden, welche nach Potenzen von u mit ganzen positiven Exponenten fortschreiten und für alle Werthe von u, deren absoluter Betrag kleiner ist als δ, convergiren.

Auf dieselbe Weise ergeben sich die Gleichungen

$$s_1 = \psi(u_1), \quad z_1 = \chi(u_1)$$

und, wegen der Gleichung $u_1 = u + v$, sobald jede der beiden Grössen u und v dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $\frac{1}{2}\delta$,

$$s_1 = \psi(u+v), \quad z_1 = \chi(u+v).$$

In Folge der Gleichungen

$$s_1 = \sigma_1(s, z; v), \quad z_1 = \zeta_1(s, z; v)$$

ergiebt sich demnach, zunächst unter der angegebenen Bedingung, dass sowohl u als v dem absoluten Betrage nach kleiner sei als $\frac{1}{2}\delta$,

$$\psi(u+v) = \sigma_1(\psi(u), \chi(u); v), \quad \chi(u+v) = \zeta_1(\psi(u), \chi(u); v).$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke sind nun darstellbar als Quotienten je zweier nach Potenzen von u und v mit ganzen positiven Exponenten fortschreitender Potenzreihen, welche jedoch

nicht allein für die Gebiete $[u] < \frac{1}{2}\delta$, $[v] < \frac{1}{2}\delta$, sondern für die Gebiete $[u] < \delta$, $[v] < \delta$ convergiren.

Man kann annehmen, dass diese Potenzreihen keinen Factor von der Form $(u-v)^m$ gemeinsam haben.

Setzt man hierauf $u = v$, so ergeben sich vermittelst der obigen Gleichungen $\psi(2v)$ und $\chi(2v)$ als Quotienten zweier nach Potenzen von v fortschreitender Potenzreihen, welche, wenn $[v] < \delta$ ist, convergiren. Diese Functionenelemente $\psi(2v)$ und $\chi(2v)$ sind also für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag kleiner ist als δ, eindeutig definirt und müssen für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag kleiner ist als $\frac{1}{2}\delta$, mit den vorher erklärten nach Potenzen von $2v$ fortschreitenden Potenzreihen für $\psi(2v)$, $\chi(2v)$ dem Werthe nach übereinstimmen.

Hieraus folgt, wenn man $2v$ durch u ersetzt, dass die neue Definition der Functionen $\psi(u)$ und $\chi(u)$ als *Quotienten* zweier nach Potenzen von u fortschreitender Potenzreihen, welche convergiren, sobald der absolute Betrag von u kleiner ist als 2δ, eine analytische Fortsetzung der ursprünglich nur für das Gebiet $[u] < \delta$ erklärten Functionenelemente $\psi(u)$ und $\chi(u)$ ergiebt, welche sich auf das Gebiet $[u] < 2\delta$ erstreckt. Es geht hieraus zunächst hervor, dass die Functionen $\psi(u)$ und $\chi(u)$ auch für das erweiterte Gebiet des Argumentes eindeutig erklärt bleiben.

Setzt man nun wieder in den Gleichungen für $\psi(u+v)$, $\chi(u+v)$ $2v$ an die Stelle von u, so ergeben sich $\psi(3v)$ und $\chi(3v)$ als Quotienten je zweier nach Potenzen von v fortschreitender Potenzreihen, welche für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag kleiner ist als δ, convergiren.

Diese Darstellung ergiebt eine Definition für die Functionen $\psi(u)$ und $\chi(u)$, welche sich auf das Innere des Gebietes $[u] < 3\delta$ erstreckt. Auf diese Weise kann man fortfahren und den Bereich des Argumentes der Functionen $\psi(u)$ und $\chi(u)$ auf einen beliebig grossen Theil der u-Ebene ausdehnen, ohne dass diese Functionen aufhören, den Charakter rationaler Functionen zu besitzen.

Hieraus folgt, dass diejenigen analytischen Functionen, welche aus den früher erklärten Functionenelementen $\psi(u)$ und $\chi(u)$ durch analytische Fortsetzung entstehen, *eindeutige* Functionen ihres unbeschränkt veränderlichen Argumentes sind.

Ist nun die Ordnungszahl des Zusammenhangs der Fläche T grösser als 1, also mindestens gleich 3, weil die Fläche eine geschlossene ist,

so besitzt die betrachtete allenthalben endlich bleibende Integralfunction mindestens ***zwei Perioden.*** Es sind daher $\psi(u)$ und $\chi(u)$ eindeutige doppelt periodische Functionen von u, welche für alle endlichen Werthe ihres Arguments den Charakter rationaler Functionen besitzen.

Also sind die Functionen $\psi(u)$ und $\chi(u)$ bei passender Wahl der Invarianten g_2 und g_3 rationale Functionen der beiden speciellen elliptischen Functionen $\wp u$ und $\wp' u$, welche Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen seit einer Reihe von Jahren zu Grunde legt.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass die Fläche T, falls dieselbe nicht einfach zusammenhängt, ***nur*** dreifach zusammenhängend sein kann.

Wäre die Ordnungszahl des Zusammenhangs der Fläche T grösser als ***drei,*** so wäre mehr als ***ein*** Paar Querschnitte erforderlich, um die Fläche T in eine einfach zusammenhängende überzuführen. Dann wäre es möglich, für die reellen Theile der Periodicitätsmoduln der allenthalben endlich bleibenden Integralfunction solche Werthe zu wählen, dass die Perioden sich ***nicht*** aus zweien unter ihnen mit reellen rationalen Zahlencoefficienten zusammensetzen lassen.

Dass es wirklich zu jedem Systeme beliebig angenommener Werthe als reeller Theile der Periodicitätsmoduln für eine gegebene *Riemann*sche Fläche eine zugehörende überall endlich bleibende Integralfunction giebt, lässt sich ohne Anwendung der Schlussweise des sogenannten *Dirichlet*schen Princips, durch ein Schlussverfahren begründen, dessen Hauptpunkte in einer in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1870 veröffentlichten Mittheilung des Verfassers dargelegt sind.

Da nun die obige Schlussweise für jede allenthalben endlich bleibende Integralfunction gilt, so müsste es eindeutige Functionen eines complexen Argumentes geben, welche mehr als zwei Fundamentalperioden besitzen, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Also ist die Fläche T entweder ***einfach*** oder ***dreifach*** zusammenhängend.

Im ersteren Falle sind s und z rationale Functionen eines Argumentes t und bei passender Wahl dieser Grösse ist auch umgekehrt t eine rationale Function von s und z.

Im letzteren Falle sind s und z rationale Functionen von $\wp u$ und $\wp' u$ und es sind auch umgekehrt, bei passender Wahl der Invarianten g_2 und g_3, $\wp u$ und $\wp' u$ rationale Functionen von s und z.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergiebt sich unter anderem der folgende: Wenn zwei algebraische Curven in der Beziehung zu einander stehen, dass es auf unendlich viele Weisen möglich ist, vermittelst algebraischer Gleichungen zwischen den Punkten beider Curven ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen herzustellen, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes jeder der beiden Curven entweder rationale Functionen, oder eindeutige elliptische Functionen eines Parameters.

Göttingen, 1875.

Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten.

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Göttingen.)

Die bis jetzt genauer untersuchten nicht algebraischen Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten *), besitzen folgende Eigenschaften:

1. Die ***transcendenten Functionen,*** von welchen die analytische Bestimmung dieser Flächen abhängt, sind bei passender Wahl der unabhängigen Variablen entweder ***Logarithmen,*** oder ***elliptische Integrale erster und zweiter Art,*** welche zu ***reellen*** Invarianten g_2 und g_3 gehören.

2. Längs jeder Curve der auf einer dieser Flächen liegenden Schaar algebraischer Curven hat der reelle oder der imaginäre Bestandtheil des in Betracht kommenden Logarithmus, beziehungsweise elliptischen Integrals ***erster*** Art, einen ***constanten*** Werth. In Folge dieses Umstandes gestattet jede der erwähnten Flächen eine solche conforme Abbildung auf eine Ebene, dass der Schaar von algebraischen Curven, welche sie enthält, in jener Ebene eine Schaar von ***parallelen Geraden*** entspricht.

3. Die erwähnten Flächen sind einander ***paarweise zugeordnet,*** in der Art, dass von je zwei einander zugeordneten Flächen jede eine ***Biegungsfläche*** der andern ist, während den Krümmungslinien der einen die Asymptotenlinien der andern entsprechen und umgekehrt. Hierbei stehen

---

*) 1., Die *Meusnier*sche Schraubenfläche,

2., die durch Rotation der Kettenlinie um ihre Directrix als Axe entstehende Rotationsfläche,

3., die von Herrn *Catalan* aufgefundene Minimalfläche, welche eine Schaar von *Parabeln* enthält,

4., die von *Riemann* und von Herrn *Enneper* untersuchten Minimalflächen, welche eine Schaar von *Kreisen* enthalten,

5., die Minimalflächen, welche von einer Schaar von *Kegeln zweiten Grades* umhüllt werden. Diese Flächen enthalten die unter 1., bis 4., angeführten als specielle Fälle, beziehungsweise als Grenzfälle. (S. den diese Flächen betreffenden im 80. Bande dieses Journals enthaltenen Aufsatz des Verf.)

die auf den Flächen eines Paares liegenden zwei Schaaren von algebraischen Curven in der Beziehung zu einander, dass die Curven der einen Schaar die Biegungslinien der *orthogonalen Trajectorien* der Curven der andern Schaar sind und umgekehrt.

Man kann nun die Aufgabe stellen:

Alle nicht algebraischen Minimalflächen zu bestimmen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten.

Einen Theil der Lösung dieser allgemeinen Aufgabe enthält die vorliegende Abhandlung.

I.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes einer gegebenen algebraischen Curve, X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche eine Normale dieser Curve im Punkte x, y, z, deren Lage sich längs der Curve nach einem gegebenen algebraischen Gesetze ändert, mit den Coordinatenaxen einschliesst.

Es wird vorausgesetzt, es seien x, y, z, X, Y, Z gegebene rationale Functionen zweier Variablen t, τ, zwischen denen eine irreductible algebraische Gleichung von der Form $F(t, \tau) = 0$ besteht, in der Weise, dass auch umgekehrt t und τ als rationale Functionen von x, y, z, X, Y, Z dargestellt werden können. Alle Coefficienten werden als reell vorausgesetzt.

Wird nun mittelst des im Art. V der Miscellen (dieses Journal Bd. 80 pag. 291) angegebenen Systems von Gleichungen eine Minimalfläche bestimmt, welche die gegebene Curve enthält, und deren Normale in jedem Punkte dieser Curve mit der vorher erwähnten Normale der Curve zusammenfällt, so sind die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$, von denen die analytische Bestimmung dieser Minimalfläche abhängt, durch die Grössen t, τ rational ausdrückbar, wie aus den Gleichungen

$$s = \frac{X+Yi}{1-Z}, \quad \mathfrak{F}(s) = \frac{dx+i(Z\,dy-Y\,dz)}{(1-s^2)\,ds} = \frac{dy+i(X\,dz-Z\,dx)}{i(1+s^2)\,ds} = \frac{dz+i(Y\,dx-X\,dy)}{2s\,ds}$$

hervorgeht.

Hieraus folgt, dass die durch die beiden Grössen $s, \mathfrak{F}(s)$ bestimmte Klasse von algebraischen Functionen unter der durch die Grössen t, τ bestimmten Klasse *enthalten* ist.

Im Allgemeinen, d. h. wenn die Functionen x, y, z, X, Y, Z nicht

speciellen Bedingungen genügen, wird es auch umgekehrt möglich sein, die Grössen t, τ rational durch die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ auszudrücken. Unter dieser Voraussetzung wird, wenn s_1 und $\mathfrak{F}_1(s_1)$ die zu s und $\mathfrak{F}(s)$ conjugirten complexen Grössen bezeichnen, auch s_1 und $\mathfrak{F}_1(s_1)$ rational durch t und τ und umgekehrt t und τ durch s_1 und $\mathfrak{F}_1(s_1)$ rational ausdrückbar sein, und es wird hierdurch eine rationale Transformation zwischen s, $\mathfrak{F}(s)$ einerseits und s_1, $\mathfrak{F}_1(s_1)$ andererseits erhalten, welche eindeutig umkehrbar ist.

II.

Wenn eine Minimalfläche *eine Schaar* algebraischer Curven enthält, so bestimmt jede Curve der Schaar in Verbindung mit der auf der Kugel vom Radius 1 durch parallele Normalen ihr entsprechenden Curve eine bestimmte Klasse von algebraischen Functionen, unter welcher die durch die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ bestimmte Klasse enthalten ist.

Das Umgekehrte findet nicht immer statt; denn, wenn z. B. die Minimalfläche eine algebraische Fläche ist, so kann man auf derselben in unendlich mannigfaltiger Weise eine Schaar von algebraischen Curven wählen, so dass die durch die einzelnen Curven der Schaar bestimmten Klassen von algebraischen Functionen in der durch s und $\mathfrak{F}(s)$ bestimmten Klasse *nicht* enthalten sind.

Es kann aber auch der Fall eintreten, dass auf einer nicht algebraischen Minimalfläche eine Schaar von algebraischen Curven liegt, welche in der durch s und $\mathfrak{F}(s)$ bestimmten Klasse *nicht* enthalten sind. (S. das Beispiel 3 des Art. IV.)

Im Folgenden wird nun der Fall etwas genauer untersucht, *in welchem die algebraische Klasse jeder auf der Minimalfläche liegenden Curve der Schaar unter der durch s und $\mathfrak{F}(s)$ bestimmten algebraischen Klasse enthalten ist.*

Ist diese Bedingung erfüllt, *so sind,* wenn die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer Curve der Schaar x, y, z, und des demselben entsprechenden sphärischen Bildes X, Y, Z in der im Art. I. angegebenen Weise durch zwei Grössen t, τ rational ausgedrückt werden, *für jede Curve der Schaar die beiden Grössen t und τ durch die beiden Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ rational ausdrückbar.*

Beweis. Zwischen den Grössen s, $\mathfrak{F}(s)$, x, y, z, X, Y, Z, U, V, W

bestehen ausser den bereits angeführten folgende Gleichungen

$$x = \Re U, \qquad y = \Re V, \qquad z = \Re W,$$

$$dU = (1-s^2)\mathfrak{F}(s)ds, \quad dV = i(1+s^2)\mathfrak{F}(s)ds, \quad dW = 2s\mathfrak{F}(s)ds,$$

$$dU = dx+i(Zdy-Ydz), \quad dV = dy+i(Xdz-Zdx), \quad dW = dz+i(Ydx-Xdy),$$

$$Xdx+Ydy+Zdz = 0, \quad XdU+YdV+ZdW = 0, \quad (dU)^2+(dV)^2+(dW)^2 = 0,$$

$$X^2+Y^2+Z^2 = 1, \quad dU.dx+dV.dy+dW.dz = dx^2+dy^2+dz^2,$$

$$X = i\cdot\frac{dW.dy-dV.dz}{dx^2+dy^2+dz^2}, \quad Y = i\cdot\frac{dU.dz-dW.dx}{dx^2+dy^2+dz^2}, \quad Z = i\cdot\frac{dV.dx-dU.dy}{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Wenn nun die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes einer der Schaar angehörenden Curve durch die beiden Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ rational ausdrückbar sind, so sind in Folge der vorstehenden Gleichungen auch die Grössen X, Y, Z rational durch s und $\mathfrak{F}(s)$ ausdrückbar, und hieraus ergiebt sich, in Folge einer bezüglich der Grössen t, τ getroffenen Voraussetzung, dass auch die Grössen t und τ rational durch die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ ausdrückbar sind, was in dem oben ausgesprochenen Satze behauptet wurde.

Unter der angegebenen Voraussetzung giebt es also eine *Schaar* rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen zwischen s, $\mathfrak{F}(s)$ einerseits und s_1, $\mathfrak{F}_1(s_1)$ andererseits, da, wie im Art. I. ausgeführt wurde, jede Curve der Schaar eine solche Transformation nach sich zieht.

Folglich giebt es auch eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen der zwischen s und $\mathfrak{F}(s)$ bestehenden algebraischen Gleichung *in sich selbst.*

Hieraus ergiebt sich nach dem im vorhergehenden Aufsatze bewiesenen Lehrsatze, dass die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ entweder *rationale Functionen* oder *eindeutige elliptische Functionen einer unabhängig veränderlichen Grösse* sind.

III.

Wenn $\frac{dU}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dW}{dt}$ *rationale* Functionen einer unabhängig veränderlichen Grösse t sind, so ist nothwendig und hinreichend, damit die zugehörende Minimalfläche eine Schaar algebraischer Curven enthalte, dass, wenn mit

$$\Sigma A_\nu \log(t-t_\nu), \quad \Sigma B_\nu \log(t-t_\nu), \quad \Sigma C_\nu \log(t-t_\nu)$$

die in U, V, W vorkommenden logarithmischen Glieder bezeichnet werden,

die Gleichungen

$\Re \Sigma A_\nu \log(t-t_\nu) = \text{const.}, \quad \Re \Sigma B_\nu \log(t-t_\nu) = \text{const.}, \quad \Re \Sigma C_\nu \log(t-t_\nu) = \text{const.},$

in der t-Ebene ***dieselbe Schaar algebraischer Curven*** darstellen.

Damit diese Gleichungen *dieselbe* Curvenschaar darstellen, ist nothwendig und hinreichend, dass $\Sigma A_\nu \log(t-t_\nu)$, $\Sigma B_\nu \log(t-t_\nu)$, $\Sigma C_\nu \log(t-t_\nu)$ in constantem ***reellem*** Verhältnisse stehen. Mittelst einer Coordinatentransformation kann man in diesem Falle bewirken, dass nur W, nicht aber U und V logarithmische Glieder enthält, dass also alle Coefficienten A_ν und B_ν gleich Null sind.

Damit die Gleichung

$$\Re \Sigma C_\nu \log(t-t_\nu) = \text{const.}$$

eine Schaar *algebraischer* Curven darstelle, ist nothwendig und hinreichend, dass alle Coefficienten C_ν entweder reelle oder rein imaginäre Werthe haben und dass die Verhältnisse je zweier unter ihnen ***rational*** sind.

IV.

Es sollen nun einige specielle Fälle von nicht algebraischen Minimalflächen genauer untersucht werden, welche der im Art. III. ins Auge gefassten besonderen Art angehören.

1. Die Functionen U und V werden für *zwei* Werthe t' und t'' von t unendlich gross *erster* Ordnung.

In diesem Falle erhält man $(t-t')^2.(t-t'')^2$ als gemeinsamen Nenner der drei Ausdrücke $\frac{dU}{dt}, \frac{dV}{dt}, \frac{dW}{dt}$. Setzt man nun

$$\frac{dW}{dt} = i c_0' c_0'' \frac{(t-c_1).(t-c_2)}{(t-t')^2.(t-t'')^2},$$

so ist in Folge der Gleichung

$$\frac{dU+idV}{dt} \cdot \frac{dU-idV}{dt} = -\left(\frac{dW}{dt}\right)^2:$$

$$\frac{dU+idV}{dt} = c_0'^2 \cdot \frac{(t-c_1)^2}{(t-t')^2.(t-t'')^2}$$

$$\frac{dU-idV}{dt} = c_0''^2 \cdot \frac{(t-c_2)^2}{(t-t')^2.(t-t'')^2}$$

zu setzen. Damit nun U und V, also auch $U+iV$ und $U-iV$ eindeutige Functionen von t seien, ist nothwendig und hinreichend, dass die beiden

Gleichungen

$$(c_1-t').(c_1-t'')=0,\quad (c_2-t').(c_2-t'')=0$$

erfüllt sind. Man kann also

$$c_1=t'',\quad c_2=t'$$

setzen und erhält dann, von additiven Constanten abgesehen,

$$U+iV=-c_0'^2\cdot\frac{1}{t-t'},\quad U-iV=-c_0''^2\cdot\frac{1}{t-t''},\quad W=i\frac{c_0'c_0''}{t''-t'}\log\frac{t-t''}{t-t'}.$$

In diesem Falle stellen die Gleichungen

$$x=\Re U,\quad y=\Re V,\quad z=\Re W$$

die *Meusnier*sche Schraubenfläche oder die durch Rotation der Kettenlinie um ihre Directrix als Axe entstehende Rotationsfläche dar, jenachdem die Grösse $\frac{c_0'c_0''}{t''-t'}$ einen reellen oder einen rein imaginären Werth hat.

2. Die Functionen $U+iV$ und $U-iV$ werden für *zwei* Werthe von t, nämlich für $t=0$ und für $t=\infty$, unendlich gross *zweiter* Ordnung.

Setzt man in diesem Falle

$$\frac{dW}{dt}=ic_0'c_0''\frac{(t-c_1)(t-c_2)(t-c_3)(t-c_4)}{t^3},$$

so sind *zwei* Anordnungen zulässig:

$$\begin{array}{c|c}
\frac{dU+idV}{dt}=c_0'^2\cdot\frac{(t-c_3)^2(t-c_1)(t-c_2)}{t^3}, & \frac{dU+idV}{dt}=c_0'^2\cdot\frac{(t-c_1)^2(t-c_3)^2}{t^3}, \\
\frac{dU-idV}{dt}=c_0''^2\cdot\frac{(t-c_4)^2(t-c_1)(t-c_2)}{t^3}, & \frac{dU-idV}{dt}=c_0''^2\cdot\frac{(t-c_2)^2(t-c_4)^2}{t^3}, \\
z=i\frac{c_0'}{c_0''}\cdot\frac{t-c_3}{t-c_4}. & z=i\cdot\frac{c_0'}{c_0''}\cdot\frac{(t-c_1)(t-c_3)}{(t-c_2)(t-c_4)}.
\end{array}$$

Damit nun U und V keine logarithmischen Glieder enthalten, müssen die Gleichungen

$$\begin{array}{c|c}
c_3^2+2(c_1+c_2)c_3+c_1c_2=0 & c_3^2+4c_1c_3+c_1^2=0 \\
c_4^2+2(c_1+c_2)c_3+c_1c_2=0 & c_4^2+4c_2c_4+c_2^2=0
\end{array}$$

erfüllt sein, aus denen sich

$$\begin{array}{c|c}
c_3=-(c_1+c_2)+\sqrt{c_1^2+c_1c_2+c_2^2}, & c_3=-(2-\sqrt{3})c_1, \\
c_4=-(c_1+c_2)-\sqrt{c_1^2+c_1c_2+c_2^2} & c_4=-(2-\sqrt{3})c_2
\end{array}$$

ergiebt. Der in W vorkommende Logarithmus von t hat den Coefficienten

$$-2ic_0'c_0''(c_1^2+c_1c_2+c_2^2).\quad\Big|\quad -ic_0'c_0''(2-\sqrt{3})(c_1-c_2)^2.$$

Hat dieser Coefficient einen reellen oder einen rein imaginären Werth, so enthält die zugehörende Minimalfläche eine Schaar algebraischer Curven des *vierten* Grades, welche der Curvenschaar

$$\Re \log t = \text{const.}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \Re i \log t = \text{const.},$$

entspricht.

Unter den auf die angegebene Weise bestimmten, von zwei wesentlichen Constanten, nämlich den Verhältnissen $\frac{c_1}{c_2}$ und $\frac{c_0'}{c_0''}$, abhängenden Minimalflächen ist eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit durch die Bedingung ausgezeichnet, dass die Grösse W ausser dem logarithmischen Gliede nur Potenzen von t mit geradem Exponenten enthalten soll.

Damit dieses eintrete, ist in Folge der Gleichungen

$$c_1+c_2+c_3+c_4 = -(c_1+c_2) \quad \Big| \quad c_1+c_2+c_3+c_4 = (\sqrt{3}-1)(c_1+c_2)$$

nothwendig und hinreichend, dass $c_2 = -c_1$ gesetzt werde.

In diesem Falle kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{array}{l|l} c_1 = 1, \quad c_2 = -1, & c_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \\ c_3 = 1, \quad c_4 = -1 & c_3 = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad c_4 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

setzen, während das Verhältniss $c_0':c_0''$ willkürlich bleibt. Setzt man auch noch $c_0' = c_0'' = 1$, so erhält man folgende specielle Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} U = \frac{1}{2}(t^2+t^{-2}) & U = \frac{1}{2}(t^2-t^{-2}) \\ V = 2i(t+t^{-1}) & V = 2\sqrt{2}i(t+t^{-1}) \\ W = \frac{i}{2}(t^2-t^{-2})-2i\log t & W = \frac{i}{2}(t^2-t^{-2})-4i\log t \\ s = i\frac{t-1}{t+1}. & s = i\frac{t^2-\sqrt{2}.t-1}{t^2+\sqrt{2}.t-1}. \end{array}$$

Aus den Gleichungen auf der *linken* Seite ergeben sich, wenn $t = r.e^{i\varphi}$ gesetzt wird, die folgenden

$$x = \tfrac{1}{2}(r^2+r^{-2})\cos 2\varphi, \quad y = -2(r-r^{-1})\sin\varphi, \quad z = -\tfrac{1}{2}(r^2+r^{-2})\sin 2\varphi+2\varphi,$$

$$s = i.\frac{re^{i\varphi}-1}{re^{i\varphi}+1}.$$

Diese Gleichungen stellen, wenn $\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, für jeden ganzzahligen Werth von n eine *Parabel* dar. Alle diese Parabeln liegen auf dem parabolischen Cylinder

$$y^2 = -8(x+1).$$

Da für die angegebenen Werthe von φ der absolute Betrag der Grösse s gleich 1 ist, so liegen die längs jeder von diesen Parabeln construirten Normalen der Minimalfläche in der Ebene der betreffenden Parabel. Die durch die obigen Gleichungen dargestellte periodische Minimalfläche wird daher von dem parabolischen Cylinder $y^2 = -8(x+1)$ längs dieser Parabeln berührt. Die erwähnten Parabeln sind geodätische Linien der Minimalfläche.

Für jeden constanten Werth von φ stellen die obigen Gleichungen ebenfalls eine Parabel dar, welche Schnittlinie der Ebene

$$\frac{x}{\cos 2\varphi} + \frac{z-2\varphi}{\sin 2\varphi} = 0$$

mit dem parabolischen Cylinder $\frac{y^2}{8\sin^2\varphi} = \frac{x}{\cos 2\varphi} - 1$ ist. Längs jeder Parabel der Schaar wird die Minimalfläche von einem parabolischen Cylinder

$$\frac{y^2}{8\sin^2\varphi} + x + \frac{z-2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} + 1 = 0$$

berührt. Für den Werth $r = 1$ stellen die obigen Gleichungen eine in der Ebene $y = 0$ liegende *Cycloide* dar, welche eine geodätische Linie der Minimalfläche ist.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die betrachtete Minimalfläche dieselbe ist, auf welche Herr *Catalan* im Jahre 1855 geführt wurde und für welche derselbe eine geometrische Construction gegeben hat. Lässt man U, V, W in $-iU, -iV, -iW$ übergehen, so geht aus dieser Fläche eine andere hervor, welche eine Biegungsfläche derselben ist.

Auf dieser durch die Gleichungen

$$x = \tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})\sin 2\varphi, \quad y = 2(r+r^{-1})\cos\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})\cos 2\varphi - 2\log r$$

dargestellten Minimalfläche liegt eine Schaar von Raumcurven *vierten* Grades, in welchen die Rotationscylinder

$$x^2+(z+2\log r)^2 = \tfrac{1}{4}(r^2-r^{-2})^2$$

von den parabolischen Cylindern

$$y^2 = 4\frac{r+r^{-1}}{r-r^{-1}}(z+2\log r)+2(r+r^{-1})^2$$

geschnitten werden.

Im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = -\tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})-2\log r$ berühren sich beide Cylinder; in diesem Punkte besitzt daher ihre Schnittlinie einen Doppelpunkt. Längs jeder Curve der Schaar wird die Minimalfläche von einem

Rotationskegel

$$x^2+[z+\tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})+2\log r]^2 = \tfrac{1}{4}(r-r^{-1})^2y^2$$

berührt. Die z-Axe ist eine Doppellinie der Fläche. Dasselbe gilt bezüglich der y-Axe, von welcher der zwischen $y=-4$ und $y=+4$ liegende Theil mit reellen Flächenelementen zusammenhängt. Die Endpunkte dieser Strecke sind uniplanare Doppelpunkte der Fläche.

Ueberhaupt besitzen alle Minimalflächen, zu welchen die auf der *linken* Seite der obigen Entwickelungen zu Grunde gelegte Anordnung führt, uniplanare Doppelpunkte, welche den Werthen $t=c_1$ und $t=c_2$ entsprechen. —

Die Gleichungen auf der *rechten* Seite der obigen Entwickelungen (pag. 152) führen zu einer periodischen Minimalfläche, welche von den Ebenen

$$z = 2(2n+1)\pi$$

in geodätischen Linien geschnitten und längs dieser ebenen Curven von der Cylinderfläche

$$x^2-2\left(\frac{y}{4}\right)^2-\left(\frac{y}{4}\right)^4 = 0$$

berührt wird.

Lässt man auch bei dieser Fläche U, V, W beziehlich in $-iU$, $-iV$, $-iW$ übergehen, so erhält man eine durch folgende Gleichungen bestimmte Minimalfläche

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(r^2+r^{-2})\sin 2\varphi \\ y &= 2\sqrt{2}(r+r^{-1})\cos\varphi \\ z &= \tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})\cos 2\varphi-4\log r. \end{aligned}$$

Für jeden constanten Werth von r stellen diese Gleichungen eine Raumcurve vierten Grades dar, welche Schnittlinie des elliptischen Cylinders

$$\left[\frac{x}{\tfrac{1}{2}(r^2+r^{-2})}\right]^2+\left[\frac{z+4\log r}{\tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})}\right]^2 = 1$$

mit dem parabolischen Cylinder

$$y^2 = 8\frac{r+r^{-1}}{r-r^{-1}}[z+\tfrac{1}{2}(r^2-r^{-2})+4\log r]$$

ist. Dem Werthe $r=1$ entspricht eine ebene Curve vierten Grades

$$x^2-2\left(\frac{y}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^4=0,\quad z=0,$$

welche eine geodätische Linie der Minimalfläche ist.

Die z-Axe ist eine Doppellinie der Fläche.

3. Ein Beispiel für den Fall, in welchem die Function W sich an *drei* Stellen logarithmisch verzweigt, nämlich für die Werthe $t = -1$, $t = +1$ und $t = \infty$, ist das folgende:

$$s = t, \quad \mathfrak{F}(s) = \frac{3+6t^2-t^4}{(1-t^2)^3},$$

$$U = \frac{3t+t^3}{1-t^2}, \quad V = i\cdot\frac{3t+t^5}{(1-t^2)^2}, \quad W = \log(1-t^2) + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}.$$

Die algebraischen Curven der Minimalfläche entsprechen den in der t-Ebene liegenden *confocalen Lemniskaten*, deren Brennpunkte die Punkte $t = -1$ und $t = +1$ sind.

Dieser specielle Fall unterscheidet sich von allen andern meines Wissens bisher genauer untersuchten nicht algebraischen Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten, dadurch, dass die algebraischen Klassen, welche durch irgend zwei der Schaar angehörende Curven bestimmt werden, im Allgemeinen von einander *verschieden* sind. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes jeder Curve der Schaar sind darstellbar als eindeutige elliptische Functionen einer veränderlichen Grösse, aber die zugehörende absolute Invariante *ändert sich* beim Uebergange von einer Curve der Schaar zur unendlich benachbarten.

In diesem Falle sind also die auf der Minimalfläche liegenden algebraischen Curven in der durch s und $\mathfrak{F}(s)$ bestimmten algebraischen Klasse *nicht* enthalten.

V.

Die allgemeine Untersuchung wird jetzt an der Stelle wieder aufgenommen, wo dieselbe durch die Betrachtung specieller Fälle unterbrochen wurde.

Im Art. II. ist gezeigt worden, dass die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ unter den daselbst angegebenen Voraussetzungen entweder rationale Functionen oder eindeutige elliptische Functionen einer veränderlichen Grösse sind.

In diesem Artikel wird nun der Fall genauer untersucht, in welchem die Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ eindeutige elliptische Functionen eines Argumentes u sind.

Aus demselben Grunde, aus welchem die Coefficienten der zwischen t und τ bestehenden algebraischen Gleichung als reell vorausgesetzt worden sind, kann man von der Annahme ausgehen, dass die Invarianten g_2 und g_3

der elliptischen Functionen $\wp u$ und $\wp' u$, durch welche t, τ, s und $\mathfrak{F}(s)$ rational ausgedrückt werden, *reelle* Werthe haben.

Unter dieser Voraussetzung entsprechen conjugirten Werthen t, t_1 auch conjugirte Werthe u, u_1 des Argumentes, und es hat daher die Differenz $u-u_1$ einen rein imaginären Werth, welcher mit $2vi$ bezeichnet werden möge. Da nun jede der rationalen eindeutig umkehrbaren Transformationen der zwischen s und $\mathfrak{F}(s)$ bestehenden Gleichung in die zwischen s_1 und $\mathfrak{F}_1(s_1)$ bestehende Gleichung für die Grösse $u-u_1$ einen *constanten* Werth ergiebt, — die Schlussfolgerung ist der in dem vorangehenden Aufsatze angewandten völlig analog — so kann die Grösse v als Parameter der auf der Minimalfläche liegenden Schaar algebraischer Curven angesehen werden.

Die Gleichung $u-u_1 = 2vi$ stellt, wenn v als veränderlicher Parameter angesehen wird, in der u-Ebene eine Schaar von *parallelen Geraden* dar, längs denen der imaginäre Bestandtheil der Grösse u einen constanten Werth hat. Weil aber die Grösse u als eine Function des complexen Argumentes s angesehen werden kann und in Folge dessen die Minimalfläche auf die u-Ebene conform abgebildet wird, so bilden die auf der Minimalfläche liegenden der Schaar angehörenden algebraischen Curven nebst ihren orthogonalen Trajectorien ein *isometrisches Curvensystem* auf der Fläche, mit anderen Worten, die erwähnte Curvenschaar vermag nebst der zu ihr orthogonalen Curvenschaar die Minimalfläche in unendlich kleine Quadrate zu theilen.

Setzt man nun $u = u'+vi$, wo u' eine veränderliche Grösse bezeichnet, welche zunächst nur reelle Werthe annehmen soll, so ergiebt sich aus der Voraussetzung, welche bezüglich der auf der Minimalfläche liegenden Curven der Schaar gestellt worden ist, und aus dem für die Function $\wp u$ geltenden Additionstheorem, dass die reellen Theile der drei Functionen U, V, W für jeden constanten Werth von v rationale Functionen von $\wp u'$ und $\wp' u'$ sein müssen.

Denn für jeden constanten Werth von v sollen die Gleichungen

$$x = \Re U, \quad y = \Re V, \quad z = \Re W$$

eine algebraische Curve darstellen, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben durch s und $\mathfrak{F}(s)$, also auch durch $\wp u$ und $\wp' u$ rational ausdrückbar sind. Da nun $u = u'+vi$ ist und $\wp(u'+vi)$ sowohl als $\wp'(u'+vi)$ in Folge des für diese Functionen geltenden

Additionstheorems durch $\wp u'$ und $\wp' u'$ rational ausdrückbar ist, so sind auch die reellen Theile von U, V, W für jeden constanten Werth von v rationale Functionen von $\wp u'$ und $\wp' u'$.

Damit dieses eintritt, ist nothwendig und hinreichend, dass *zwei* Bedingungen erfüllt sind:

erstens, dass in den für die Umgebung irgend eines Werthes $u = u_0$ geltenden Entwickelungen von U, V, W nach Potenzen von $u-u_0$ für *keinen* Werth von u_0 ein mit dem Factor $\log(u-u_0)$ behaftetes Glied auftrete, mit anderen Worten, dass die Functionen U, V, W kein Integral *dritter* Art enthalten;

zweitens, dass die Coefficienten der in den drei Functionen U, V, W vorkommenden mit $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$, beziehungsweise mit u multiplicirten Glieder *rein imaginäre* Werthe haben.

Beweis. Bezeichnet U_1 die zu der Grösse U conjugirte Grösse, welche eine Function der zu der Grösse u conjugirten Grösse u_1 ist, so gilt, vorausgesetzt, dass den Grössen u und u_1 zunächst nur conjugirte Werthe beigelegt werden, die Gleichung

$$2\Re U = U+U_1.$$

Setzt man nun $u = u'+vi$, $u_1 = u'-vi$, so soll nach der Voraussetzung, für jeden constanten Werth von v, $U+U_1$ eine rationale Function von $\wp u'$ und $\wp' u'$ sein; man erhält also die Gleichung

$$U+U_1 = R(\wp u', \wp' u'),$$

in welcher R eine rationale Function bezeichnet, deren Coefficienten analytische Functionen des Parameters v sind.

Man kann jetzt die Voraussetzung, dass der Variablen u' nur reelle Werthe beigelegt werden sollen, fallen lassen, weil alle in Betracht kommenden Functionen analytische Functionen sind.

Hieraus folgt, dass die Grösse $U+U_1$ als Function der jetzt unbeschränkt veränderlichen Grösse u' betrachtet für alle endlichen Werthe dieser Grösse den Charakter einer rationalen Function besitzt. Aus diesem Grunde ist $U+U_1$ an *keiner* Stelle logarithmisch verzweigt.

Es kann aber auch die Grösse U an keiner Stelle logarithmisch verzweigt sein.

Enthielte nämlich die für die Umgebung irgend eines Werthes $u = u_0$ geltende, nach Potenzen von $u-u_0$ fortschreitende Entwickelung von U das

Glied $C\log(u-u_0)$, so würde die für die Umgebung des Werthes $u' = u_0 - vi$ geltende Entwickelung von U das Glied $C\log(u'-(u_0-vi))$ und die für die Umgebung desselben Werthes geltende Entwickelung von U_1 das Glied $-C\log(u'-(u_0-vi))$ enthalten müssen. Hieraus würde folgen, dass die für die Umgebung des Werthes $u_1 = u_0 - 2vi$ geltende Entwickelung von U_1 das Glied $-C\log(u_1-(u_0-2vi))$, und die für die Umgebung des Werthes $u = u_{01}+2vi$ geltende Entwickelung von U das Glied $-C_1\log(u-(u_{01}+2vi))$ enthalten müsste, wenn u_{01}, C_1 die zu den Grössen u_0, C conjugirten Grössen bezeichnen.

Da nun die Function U innerhalb jedes Periodenparallelogramms jedenfalls nur an einer *endlichen* Anzahl von Stellen logarithmisch verzweigt sein kann, so besitzt dieselbe für den Werth $u = u_{01}+2vi$, wenn v nicht *specielle* Werthe annimmt, den Charakter einer ganzen Function. Es muss also C_1 und demnach auch C gleich Null sein.

Hiermit ist der *erste* Theil des obigen Satzes bewiesen.

Weil die Functionen U, V, W unter den angegebenen Voraussetzungen an keiner Stelle logarithmisch verzweigt sind, besitzen dieselben die Gestalt

$$(A+Bi)\frac{\sigma'}{\sigma}(u)+(C+Di)u+R_1(\wp u, \wp' u),$$

wo A, B, C, D reelle Constanten sind und R_1 eine rationale Function bezeichnet.

Der reelle Theil dieses Ausdruckes erhält, wenn $u = u'+vi$ gesetzt und die Veränderlichkeit von u' und v auf *reelle* Werthe beschränkt wird, nach dem für die elliptischen Integrale zweiter Art geltenden Additionstheoreme die Gestalt

$$A\frac{\sigma'}{\sigma}(u')+Bi\frac{\sigma'}{\sigma}(vi)+Cu'-Dv+R_2[\wp u', \wp' u', \wp(vi), \wp'(vi)],$$

wo R_2 eine rationale Function bezeichnet.

Dieser Ausdruck ist, wenn der Grösse v ein constanter Werth beigelegt wird, nur dann eine doppeltperiodische Function von u', wenn A und C einzeln gleich Null sind.

Es muss also sowohl A als auch C gleich Null gesetzt werden.

Hiermit ist der *zweite* Theil der oben aufgestellten Behauptung bewiesen.

Die Aufgabe:

„Alle nicht algebraischen Minimalflächen zu bestimmen, welche eine

Schaar algebraischer in dem angegebenen Sinne mit den Grössen s und $\mathfrak{F}(s)$ in dieselbe Riemannsche Klasse gehörender Curven enthalten,"
ist daher mit Ausnahme des Falles, in welchem s und $\mathfrak{F}(s)$ durch dieselbe veränderliche Grösse t rational ausdrückbar sind, allgemein zurückgeführt auf folgendes algebraische

Problem:

Durch Gleichungen von der Form:

$$U = i\left(Au + A'\frac{\sigma'}{\sigma}(u)\right) + F_1(\wp u, \wp' u),$$

$$V = i\left(Bu + B'\frac{\sigma'}{\sigma}(u)\right) + F_2(\wp u, \wp' u),$$

$$W = i\left(Cu + C'\frac{\sigma'}{\sigma}(u)\right) + F_3(\wp u, \wp' u),$$

in welchen $A \dots C'$ reelle Constanten und F_1, F_2, F_3 rationale Functionen bezeichnen, sollen drei linear unabhängige Functionen U, V, W derselben unbeschränkt veränderlichen Grösse u bestimmt werden, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate ihrer Ableitungen identisch gleich Null ist.

Die Function $\wp u$ ist mit ihrer Ableitung $\wp' u$ durch die Gleichung

$$(\wp' u)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2 \wp u - g_3$$

verbunden, in welcher g_2 und g_3 zwei *reelle* Grössen bezeichnen. Die Constante der Integration ist durch die Bedingung

$$\wp(0) = \infty$$

bestimmt.

Von der Function $\wp u$ hängt die Function σu durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = -\wp u$$

ab und ist durch die Bedingungen $\sigma'(0) = 1$, $\sigma''(0) = 0$ eindeutig bestimmt. Die Function $\frac{\sigma'}{\sigma}(u)$, ein elliptisches Integral *zweiter* Art, betrachtet als Function des elliptischen Integrals *erster* Art u, ist durch die Gleichung

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{d \log \sigma u}{du}$$

bestimmt.

Wenn es gelungen ist, drei Functionen U, V, W den Bedingungen

des obigen Problems gemäss zu bestimmen, so stellen die Gleichungen

$$x = \Re U, \quad y = \Re V, \quad z = \Re W,$$

wie sich aus dem Additionstheorem ergiebt, eine Minimalfläche dar, welche eine Schaar algebraischer Curven enthält. Jeder Geraden der u-Ebene, längs welcher der *imaginäre* Bestandtheil der Grösse u einen constanten Werth hat, entspricht eine Curve der Schaar.

Unter derselben Voraussetzung stellen die Gleichungen

$$x = \Re iU, \quad y = \Re iV, \quad z = \Re iW$$

eine *zweite* Minimalfläche dar, welche eine Biegungsfläche der vorigen ist und welche ebenfalls eine Schaar algebraischer Curven enthält. Jeder Geraden der u-Ebene, längs welcher der *reelle* Bestandtheil der Grösse u einen constanten Werth hat, entspricht eine algebraische Curve auf dieser zweiten Minimalfläche.

Bemerkung. Der einfachste Fall der im letzten Artikel betrachteten Minimalflächen ergiebt sich, wenn die mit U, V, W bezeichneten Functionen der Bedingung unterworfen werden, innerhalb jedes Periodenparallelogramms nur für zwei Werthe des Argumentes u und zwar von der ersten Ordnung unendlich gross zu werden. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass in Folge der übrigen Bedingungen des Problems die Differenz dieser beiden Werthe eine halbe Periode sein muss. Als allgemeine Gleichung der durch die angegebene Bedingung charakterisirten Minimalflächen ergiebt sich bei passender Wahl des Coordinatensystems

$$\left(x - \frac{\sigma'}{\sigma}(z) - e_2 z\right)^2 + y^2 - (\wp z - e_2) = 0.$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ reelle Werthe haben und dass $(e_1 - e_2)(e_2 - e_3) = 1$ ist. Die betrachteten Flächen, welche von den Ebenen $z = \text{const.}$ in Kreisen geschnitten werden, stimmen mit den von *Riemann* und von Herrn *Enneper* untersuchten eine Schaar reeller Kreise enthaltenden Minimalflächen überein.

Göttingen, 1875.

On the Tetrahedroid as a particular case of the 16-nodal quartic surface.

(By Prof. *A. Cayley* at Cambridge.)

In the paper „Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers" this journal t. 65 (1866) pp. 284—290, I showed how the surface called the Tetrahedroid could be identified as a special form of *Kummer*'s 16-nodal quartic surface; but I was not then in possession of the simplified form of the equation of the 16-nodal surface given in my paper „Note sur la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers et de seize plans singuliers" this journal t. 73 (1871) pp. 292—293 (see also my paper, „A third memoir on Quartic surfaces", Proc. Lond. Math. Soc. t. III (1871) p. 250). Using the equation last referred to, I resume therefore the consideration of the question.

Taking the constants $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ such that

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha'+\beta'+\gamma'=0, \quad \alpha''+\beta''+\gamma''=0$$

and writing also

$$\begin{aligned} M &= \alpha'\alpha''(\beta-\gamma)+\beta'\beta''(\gamma-\alpha)+\gamma'\gamma''(\alpha-\beta) \\ &= \alpha''\alpha\,(\beta'-\gamma')+\beta''\beta\,(\gamma'-\alpha')+\gamma''\gamma\,(\alpha'-\beta') \\ &= \alpha\,\alpha'\,(\beta''-\gamma'')+\beta\,\beta'\,(\gamma''-\alpha'')+\gamma\,\gamma'\,(\alpha''-\beta'') \\ &= -\tfrac{1}{3}\{(\beta-\gamma)(\beta'-\gamma')(\beta''-\gamma'')+(\gamma-\alpha)(\gamma'-\alpha')(\gamma''-\alpha'')+(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')(\alpha''-\beta'')\}, \end{aligned}$$

(the equivalence of which different expressions for M is verified without difficulty): writing also X, Y, Z, W as current coordinates, the equation of the 16-nodal surface is

$$0=\left\{\begin{aligned} &W^2(X^2+Y^2+Z^2-2YZ-2ZX-2XY) \\ &+2W\{\alpha\alpha'\alpha''(Y^2Z-YZ^2)+\beta\beta'\beta''(Z^2X-ZX^2)+\gamma\gamma'\gamma''(X^2Y-XY^2)+MXYZ\} \\ &+(\alpha\alpha'\alpha''YZ+\beta\beta'\beta''ZX+\gamma\gamma'\gamma''XY)^2 \end{aligned}\right.$$

where ($\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ being connected as above) the number of constants is $=6$.

The equations of the 16 singular planes are

$$\begin{array}{llll}
X=0, & Y=0, & Z=0, & W=0, \\
\alpha(\gamma'\gamma''Y-\beta'\beta''Z)-W=0, & \beta(\alpha'\alpha''Z-\gamma'\gamma''X)-W=0, & \gamma(\beta'\beta''X-\alpha'\alpha''Y)-W=0, & \beta\gamma X+\ \gamma\alpha Y+\ \alpha\beta Z=0, \\
\alpha'(\gamma''\gamma Y-\beta''\beta Z)-W=0, & \beta'(\alpha''\alpha Z-\gamma''\gamma X)-W=0, & \gamma'(\beta''\beta X-\alpha''\alpha Y)-W=0, & \beta'\gamma'X+\gamma'\alpha'Y+\alpha'\beta'Z=0, \\
\alpha''(\gamma\gamma'Y-\beta\beta'Z)-W=0, & \beta''(\alpha\alpha'Z-\gamma\gamma'X)-W=0, & \gamma''(\beta\beta'X-\alpha\alpha'Y)-W=0, & \beta''\gamma''X+\gamma''\alpha''Y+\alpha''\beta''Z=0.
\end{array}$$

Writing x, y, z, w as current coordinates the equation of the Tetrahedroid is

$$\begin{aligned}
& m^2n^2f^2x^4+n^2l^2g^2y^4+l^2m^2h^2z^4+f^2g^2h^2w^4 \\
& +(l^2f^2-m^2g^2-n^2h^2)(l^2y^2z^2+f^2x^2w^2)+(-l^2f^2+m^2g^2-n^2h^2)(m^2z^2x^2+g^2y^2w^2) \\
& +(-l^2f^2-m^2g^2+n^2h^2)(n^2x^2y^2+h^2z^2w^2) \;=\; 0,
\end{aligned}$$

where (inasmuch as f, g, h, l, m, n enter homogeneously) the number of constants is $=5$.

The equations of the 16 singular planes (written in an order corresponding to that used for the 16-nodal surface) are

$$\begin{array}{r|r|r|r}
* \quad ny-mz+fw=0 & -nx \quad * + lz+gw=0 & mx-ly \quad * + hw=0 & -fx-gy-hz \quad * =0 \\
fx-gy-hz \quad * =0 & mx+ly \quad * + hw=0 & -nx \quad * - lz+gw=0 & * \quad ny-mz-fw=0 \\
-mx-ly \quad * + hw=0 & -fx+gy-hz \quad * =0 & * \quad ny+mz+fw=0 & -nx \quad * + lz-gw=0 \\
nx \quad * + lz+gw=0 & * \quad -ny-mz+fw=0 & -fx-gy+hz \quad * =0 & mx-ly \quad * - hw=0.
\end{array}$$

These equations can be made to agree each to each with those of the 16 singular planes of the 16-nodal surface, provided that we have

$$\frac{m}{\gamma}=\frac{n}{\beta},\quad \frac{n}{\alpha'}=\frac{l}{\gamma'},\quad \frac{l}{\beta''}=\frac{m}{\alpha''};\quad f=-l\alpha\alpha'\alpha'',\ g=-m\beta\beta'\beta'',\ h=-n\gamma\gamma'\gamma'',$$

where observe that the first three equations give $\alpha'\beta''\gamma=\alpha''\beta\gamma'$ which is the relation between the constants when the 16-nodal surface reduces itself to a tetrahedroid in the above manner. And if we then assume

$$X=ny-mz+fw,\quad Y=-nx+lz+gw,\quad Z=mx-ly+hw,\quad W=-fx-gy-hz,$$

the 16 linear functions of X, Y, Z, W will become mere constant multiples of the corresponding 16 linear functions of x, y, z, w; the constants by which the several functions of x, y, z, w have to be multiplied in order to reduce them each to the corresponding linear function of X, Y, Z, W being given by the table

$$\begin{array}{llll}
1, & 1, & 1, & 1, \\
\dfrac{1}{m\beta}(l\alpha-m\beta), & -\dfrac{\alpha'\alpha''}{m}(l\alpha-m\beta), & \dfrac{\alpha'\alpha''}{n}(l\alpha-m\beta), & \dfrac{\beta\gamma}{\alpha'\alpha''}(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'), \\
\dfrac{\beta''\beta}{l}(m\beta'-n\gamma'), & \dfrac{1}{n\gamma'}(m\beta'-n\gamma'), & -\dfrac{\beta''\beta}{n}(m\beta'-n\gamma'), & \dfrac{\gamma'\alpha'}{\beta''\beta}(\gamma''\alpha-\gamma\alpha''), \\
-\dfrac{\gamma\gamma'}{l}(n\gamma''-l\alpha''), & \dfrac{\gamma\gamma'}{m}(n\gamma''-l\alpha''), & \dfrac{1}{l\alpha''}(n\gamma''-l\alpha''), & \dfrac{\alpha''\beta''}{\gamma\gamma'}(\alpha\beta'-\alpha'\beta).
\end{array}$$

For instance we have

$$\alpha(\gamma'\gamma'' Y - \beta'\beta'' Z) - W = \frac{1}{m\beta}(l\alpha - m\beta)(fx - gy - hz),$$

viz. substituting for Y, Z, W their values the relation is

$$\left.\begin{array}{rl} m\alpha\beta.\gamma'\gamma''(-nx & * \quad +lz+gw) \\ -m\alpha\beta.\beta'\beta''(\ \ mx-ly & * \quad +hw) \\ - \qquad m\beta(-fx-gy-hz & * \quad) \end{array}\right\} = (l\alpha - m\beta)(fx - gy - hz)$$

As regards the terms in y, z, and w, the identity is as once verified: As regards the term in x we should have

$$m\alpha\beta(-n\gamma'\gamma'' - m\beta'\beta'') - (l\alpha - 2m\beta)f = 0,$$

viz. substituting for f its value, $-l\alpha\alpha'\alpha'' = -m\alpha\alpha'\beta''$, the equation divides by $m\alpha$ and we then have

$$\beta(-n\gamma'\gamma'' - m\beta'\beta'') + \alpha'\beta''(l\alpha - 2m\beta) = 0,$$

that is

$$l\alpha\alpha'\beta'' - m\beta\beta''(\beta' + 2\alpha') - n\beta\gamma'\gamma'' = 0,$$

or writing herein $m\beta'' = l\alpha''$, $n\gamma' = l\alpha'$, and $\beta' + 2\alpha' = \alpha' - \gamma'$, the equation becomes $\alpha'\alpha\beta'' - \alpha''\beta(\alpha' - \gamma') - \alpha'\beta\gamma'' = 0$, that is $\alpha'(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) = \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta\gamma'$; or writing herein $\alpha''\beta\gamma' = \alpha'\beta''\gamma$, the equation divided by α' becomes $\alpha\beta'' - \alpha''\beta = \beta\gamma'' - \beta''\gamma$, which is true in virtue of $\alpha + \beta + \gamma = 0$ and $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0$. And in like manner the several other identities may be verified.

The equation $\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma'$ might have been obtained as the condition of the intersection, in a common point, of four of the singular planes of the 16-nodal surface; and when this equation is satisfied, there are in fact four systems each of four planes, such that the four planes of a system meet in a common point: viz. we have

Planes

$$\begin{array}{llll}
X = 0, & \beta\gamma X + \gamma\alpha Y + \alpha\beta Z = 0, & \gamma'(\beta''\beta X - \alpha''\alpha Y) - W = 0, & \beta''(\alpha\alpha' Z - \gamma\gamma' X) - W = 0, \\
Y = 0, & \gamma(\beta'\beta'' X - \alpha'\alpha'' Y) - W = 0, & \beta'\gamma' X + \gamma'\alpha' Y + \alpha'\beta' Z = 0, & \alpha''(\gamma\gamma' Y - \beta\beta' Z) - W = 0, \\
Z = 0, & \beta(\alpha'\alpha'' Z - \gamma'\gamma'' X) - W = 0, & \alpha'(\gamma''\gamma Y - \beta''\beta Z) - W = 0, & \beta''\gamma'' X + \gamma''\alpha'' Y + \alpha''\beta'' Z = 0, \\
W = 0, & \alpha(\gamma'\gamma'' Y - \beta'\beta'' Z) - W = 0, & \beta'(\alpha''\alpha Z - \gamma''\gamma X) - W = 0, & \gamma''(\beta\beta' X - \alpha\alpha' Y) - W = 0,
\end{array}$$

meeting in points

$$\begin{array}{cccc}
0, & -\beta, & \gamma, & \alpha''\beta\gamma'.\alpha \\
\alpha', & 0, & -\gamma', & \alpha''\beta\gamma'.\beta' \\
-\alpha'', & \beta'', & 0, & \alpha''\beta\gamma'.\gamma'' \\
\beta''.\alpha\alpha'\alpha'', & \alpha''.\beta\beta'\beta'', & \gamma''.\alpha''\beta\gamma', & 0,
\end{array}$$

the four points being in fact the vertices of the tetrahedron formed by the four planes of the tetrahedroid. Observe that if the singular planes of the 16-nodal surface in their original order are

$$\begin{array}{rrrr} 1, & 2, & 3, & 4, \\ 5, & 6, & 7, & 8, \\ 9, & 10, & 11, & 12, \\ 13, & 14, & 15, & 16, \end{array}$$

then the planes forming the last-mentioned four systems of planes are

$$\begin{array}{rrrr} (1, & 8, & 11, & 14), \\ (2, & 7, & 12, & 13), \\ (3, & 6, & 9, & 16), \\ (4, & 5, & 10, & 15), \end{array}$$

viz. they correspond each of them to a term which in the determinant formed with the 16 symbols would have the sign $+$.

The equation $\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma'$ is evidently not unique, the triads (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ enter symmetrically into the equation of the 16-nodal surface, and by taking the singular planes of one of the surfaces in a different order, the equation would present itself under one or other of the different forms

$$\alpha'\beta''\gamma = \alpha''\beta\gamma', \quad \alpha''\beta\gamma' = \alpha\beta'\gamma'', \quad \alpha\beta'\gamma'' = \alpha'\beta''\gamma,$$
$$\alpha'\beta\gamma'' = \alpha''\beta'\gamma, \quad \alpha''\beta'\gamma = \alpha\beta''\gamma', \quad \alpha\beta''\gamma' = \alpha'\beta\gamma''.$$

Cambridge, 9. Dec. 1878.

Algorithm for the characteristics of the triple ϑ-functions.

(By Prof. *A. Cayley* at Cambridge.)

The characteristics of the triple ϑ-functions may be represented, the 28 odd characteristics by the binary symbols or duads, 12, ... 78, and the even ones $\left(\text{other than } \begin{matrix}000\\000\end{matrix}, = 0\right)$, say the 35 even characteristics, by the ternary symbols or triads 123, ... 567: which triads may be regarded as abbreviations for the double tetrads 1238.4567, ... 5678.1234, the 8 being always attached to the expressed triad. The correspondence of the symbols is given by the diagram:

upper line of characteristic

lower line of characteristic	000	100	010	110	001	101	011	111
000	0	236	345	137	467	156	124	257
100	237	67	136	12	157	48	256	35
010	245	127	23	68	134	357	15	47
110	126	13	78	145	356	25	46	234
001	567	146	125	247	45	17	38	26
101	147	58	246	34	16	123	27	367
011	135	347	14	57	28	36	167	456
111	346	24	56	235	37	267	457	18

or what is the same thing it is

upper line of characteristic

	000	100	010	110	001	101	011	111
12				100				
13		110						
14			011					
15							010	
16					101			
17						001		
18								111
23			010					
24		111						
25						110		
26								001
27							101	
28					011			
34				101				
35								100
36						011		
37					111			
38							001	
45					001			
46							110	
47								010
48						100		
56			111					
57				011				
58		101						
67		100						
68				010				
78			110					

lower line of characteristic

	000	100	010	110	001	101	011	111
123						101		
124							000	
125			001					
126	110							
127		010						
134					010			
135	011							
136			100					
137				000				
145				110				
146		001						
147	101							
156						000		
157					100			
167							011	
234								110
235				111				
236		000						
237	100							
245	010							
246			101					
247				001				
256							100	
257								000
267						111		
345			000					
346	111							
347		011						
356					110			
357						010		
367								101
456								011
457							111	
467					000			
567	001							

lower line of characteristic

by means of which the two-line-characteristic is at once found when the duad or triad is given.

The new algorithm renders unnecessary the Table I of *Weber*'s memoir „Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3". (Berlin 1876.) In fact the system of six pairs corresponding to an odd characteristic such as 12 is

$$13.23,\quad 14.24,\quad 15.25,\quad 16.26,\quad 17.27,\quad 18.28$$

and that corresponding to an even characteristic such as 123 (= 1238.4567) is

$$12.38,\quad 13.28,\quad 18.23,\quad 45.67,\quad 46.57,\quad 47.56$$

so that all the (28 + 35 =) 63 systems can be at once formed.

The odd characteristics correspond to the bitangents of a quartic curve, and as regards these bitangents the notation is in fact the notation arising out of *Hesse*'s investigations and explained *Salmon*'s Higher Plane Curves (2nd Ed. 1873) pp. 222—225. It may be noticed that the geometrical symbols corresponding to the before-mentioned two systems are:

3 4 5 1 2 6 7 8 and 1 2 4 5 8 3 7 6 · Hence selecting out of the first system any two pairs we have a symbol □, but selecting out of the second system any two pairs we have a symbol which is either □ or |||; so that in each case (*Salmon* p. 224) the four bitangents are such that the eight points of contact lie on a conic.

The 28 bitangents of the general quartic curve

$$\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0,$$

represented by the equations given *Weber* pp. 100—101, and taken in the order in which they are there written down have for their duad-characteristics

18, 28, 38, 23, 13, 12, 48, 14, 58, 15, 68, 16, 78, 17, 24, 34, 25, 35,
26, 36, 27, 37, 67, 57, 56, 45, 46, 47

respectively. Taking out of any one of the 63 systems three pairs of bitangents at pleasure, these give rise to an equation of the curve of a form such as $\sqrt{x_1\xi_1} + \sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_3\xi_3} = 0$, and the whole number of the forms of equation is thus = 1260. The triads of pairs which enter into the same equation may be

triads such as 12.34, 13.42, 14.23	No.	=	70
" " " 12.34, 13.42, 56.78	"	=	630
" " " 13.23, 14.24, 15.25	"	=	560
making the whole number		=	1260,

as already mentioned.

Cambridge, 7. Dec. 1878.

Zusatz zur obigen Abhandlung.

(Von *C. W. Borchardt.*)

Von Herrn *Weierstrass* rührt bekanntlich der Gedanke her, aus den 4^ρ ϑ-Functionen von ρ Variabeln $2\rho+1$ Functionen, welche mit einem einfachen Index bezeichnet werden, so auszuwählen, dass die Composition dieser $2\rho+1$ Indices zu $2, 3, \dots \rho$ sämmtliche ϑ-Functionen mit Ausnahme des Hauptheta erschöpfen. In der *Weierstrass*schen Theorie sind die $2\rho+1$ Functionen, von welchen man ausgeht, so gewählt, dass sich unter ihnen ρ ungerade Functionen finden, deren Indices $\alpha, \beta, \dots$ seien, und $\rho+1$ gerade Functionen, deren Indices $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ seien. Alsdann ist irgend eine ϑ-Function, mit einem aus ν Zahlen $\alpha, \beta, \dots$ und $n-\nu$ Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ also im Ganzen n Zahlen componirten Index eine gerade oder ungerade Function, jenachdem

$$\frac{n^2-n}{2}+\nu$$

eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Auswahl der $2\varrho+1$ Functionen, welche man als ϑ's mit einfachem Index zu Grunde legt, kann auf verschiedenartige Weise modificirt werden. Für $\varrho=3$ hat Herr *Heinrich Weber* *) gefunden, dass man zu einer beliebig gewählten geraden Charakteristik p immer 7 ungerade Charakteristiken $p+\alpha_1, \dots p+\alpha_7$ so auswählen kann, dass diese 7 und die 21 aus p und den Amben der α componirten Charakteristiken alle 28 ungeraden Charakteristiken und alle aus p und den Ternen der α componirten Charakteristiken die von p verschiedenen 35 geraden Charakteristiken liefern. Diesen Satz hat Herr *Schottky* **) auf ϑ-Functionen von ϱ Variabeln dahin ausgedehnt:

Es ist möglich ein System primitiver Indices $1, 2, 3, \dots 2\varrho+1$ und einen ausgezeichneten ε so zu wählen, dass εa ein gerader Index ist, wenn die Anzahl der primitiven Indices, aus denen a zusammengesetzt ist, $\equiv \varrho$ oder $\varrho+1 \pmod{4}$ ist, dagegen ein ungerader, wenn diese Anzahl $\equiv \varrho+2$ oder $\varrho+3 \pmod{4}$ ist.

Hiernach bezeichnet Herr *Schottky* für $\varrho=3$, indem er $\varepsilon=0$ setzt, die 64 ϑ-Functionen durch die Indices

$$0,\ \varkappa,\ \varkappa\lambda,\ \varkappa\lambda\mu \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1 \dots 7)$$

in der Weise, dass $\varkappa$, $\varkappa\lambda$ die $7+21=28$ ungeraden, 0, $\varkappa\lambda\mu$ die $1+35=36$ geraden Functionen liefern, welche Bezeichnung, wie man sieht, abgesehen von unwesentlichen Modificationen, mit derjenigen übereinstimmt, welche Herr *Cayley* im Vorstehenden angewandt hat.

Es ist noch zu bemerken, dass die $7+21=28$ Functionen, welche in der *Weierstrass*schen Bezeichnung mit einem einfachen und zweifachen Index bezeichnet werden, durch Hinzufügung einer gehörig bestimmten halben Periode in die 28 ungeraden Functionen übergehen.

In der That, man setze mit Herrn *Weierstrass*

$$\vartheta(v_1 \dots v_\varrho)_{\mu_1 \dots \mu_\varrho : \nu_1 \dots \nu_\varrho} = \sum_{n_1 \dots n_\varrho = -\infty}^{+\infty} e^{g(v_1 - \frac{1}{2}\mu_1 \dots v_\varrho - \frac{1}{2}\mu_\varrho;\, n_1 - \frac{1}{2}\nu_1 \dots n_\varrho - \frac{1}{2}\nu_\varrho)}$$

$$g(v_1 \dots v_\varrho;\, n_1 \dots n_\varrho) = \pi i \{2n_1 v_1 + \dots + 2n_\varrho v_\varrho + n_1^2 \tau_{11} + 2n_1 n_2 \tau_{12} + \dots + n_\varrho^2 \tau_{\varrho\varrho}\},$$

so geht bekanntlich für $\varrho=3$ das Hauptheta $\vartheta_{000,000}$, wenn man nach einander alle möglichen halben Perioden zu den Argumenten v_1, v_2, v_3 hinzu-

---

*) Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3, Berlin bei G. Reimer 1876; Theorem VII p. 25, VIII p. 27, XII p. 29. Nur scheinbar lautet das Ergebniss in der *Weber*schen Schrift dadurch etwas anders, dass dort $p+\alpha_\varkappa=\beta_\varkappa$ gesetzt ist.

**) Abriss einer Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln, Habilitationsschrift, Breslau am 5. November 1878 p. 18.

fügt, abgesehen von einem Exponentialfactor, in die ganze Reihe der 64 ϑ-Functionen über, sodass jeder Function $\vartheta_{\mu_1\mu_2\mu_3,\nu_1\nu_2\nu_3}$ eine bestimmte halbe Periode entspricht. Dies vorausgesetzt, entspricht die in Rede stehende halbe Periode der Combination

$$(1,\ 0,\ 1;\ 1,\ 1,\ 1)$$

der sechs Zahlen μ, ν.

Schliesslich möge in übersichtlicher Gestalt die Tabelle der 64 ϑ-Functionen nach der *Weierstrass*schen Bezeichnung folgen, welche sich in Herrn *Henoch*s Inaugural-Dissertation „de Abelianarum functionum periodis“ p. 15 findet.

$\nu_1\nu_2\nu_3$ \ $\mu_1\mu_2\mu_3$	000	100	010	001	011	101	110	111
000	7	12	34	56	012	034	056	0
100	01	$\underline{02}$	256	234	2	$\underline{134}$	$\underline{156}$	$\underline{1}$
010	456	03	$\underline{356}$	4	$\underline{3}$	124	$\underline{04}$	$\underline{123}$
001	6	126	346	$\underline{5}$	$\underline{345}$	$\underline{125}$	05	$\underline{06}$
011	45	036	$\underline{35}$	$\underline{46}$	36	$\underline{035}$	$\underline{046}$	045
101	016	$\underline{026}$	25	$\underline{015}$	$\underline{26}$	025	$\underline{15}$	16
110	23	$\underline{13}$	$\underline{24}$	014	$\underline{013}$	$\underline{024}$	14	023
111	236	$\underline{136}$	$\underline{246}$	$\underline{235}$	245	135	146	$\underline{145}$

In dieser Tafel mit doppeltem Eingang bilden der Complex der Zahlen μ_1, μ_2, μ_3 und der Complex der Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 die beziehungsweise über den 8 Verticalreihen und vor den 8 Horizontalreihen stehenden Ueberschriften, während in jedem der 64 Felder der Tafel der einfache oder componirte Index steht, welcher nach der *Weierstrass*schen Bezeichnung der Combination beider Complexe μ_1, μ_2, μ_3 und ν_1, ν_2, ν_3, d. h. dem Zeiger der betreffenden ϑ-Function entspricht. Die unterstrichenen Indices gehören zu ungeraden ϑ-Functionen.

Berlin, d. 15. December 1878.

Anmerkung über einen Satz von *Fermat*.

(Von Herrn *Baltzer* in Giessen.)

Dass 2^m+1 eine Primzahl sei, wenn m eine Potenz von 2 ist, hat *Fermat* geglaubt und geäussert (Opp. p. 115: „apud me constat, et jam dudum Analystis illius theorematis veritas fuit significata"). Es ist jedoch von *Euler* Comm. Petrop. 6 p. 104 gelegentlich wahrgenommen worden, dass $2^{32}+1$ durch 641 theilbar ist. Wenn nun *Gauss* Disqu. arithm. 365 bemerkt „Fermatius quidem inductione deceptus affirmaverat, omnes numeros sub illa forma contentos necessario primos esse", so könnte ein ungünstiges Licht auf andere *Fermat*sche Sätze fallen, deren Beweise noch heute fehlen.

Es darf aber nicht unbeachtet bleiben, wie *Fermat* selbst in einem frühern Brief vom 18. October 1640 (Opp. p. 162) über jenen Satz, der später als unrichtig erkannt worden ist, sich geäussert hat: „Mais je vous avoue tout net (car par avance je vous avertis que comme je ne suis pas capable de m'attribuer plus que je ne sais, je dis avec la même franchise ce que je ne sais pas) que je n'ai pu encore démontrer l'exclusion de tous les diviseurs en cette belle proposition que je vous avais envoyée, et que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 7, 257, 65537 etc. Car bien que je réduise l'exclusion à la plupart des nombres, et que j'aie même des raisons probables pour le reste, je n'ai pu encore démontrer nécessairement la vérité de cette proposition."

Aus *Fermats* Nachlass kennt man dessen Randbemerkung zu *Diophant* Arithm. II, 8: „Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere. Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi; hanc marginis exiguitas non caperet". Durch Zusammenstellung dieser Aeusserung mit der obigen wird die Möglichkeit des Zweifels nicht wenig eingeschränkt.

Giessen, Juni 1878.

Ueber die Erweiterung des *Jacobi*schen Transformationsprincips.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

Nachdem *Legendre* gezeigt hatte, dass man der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}} = \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

durch rationale Substitutionen zweiten und dritten Grades, also durch eine Transformation von der Form

$$(2.)\qquad y = \frac{a+a'x+a''x^2+\cdots+a^{(p)}x^p}{b+b'x+b''x^2+\cdots+b^{(p)}x^p}$$

genügen könne, in welcher

$$p = 2^\alpha . 3^\beta . (2m+1)^2$$

ist, war es bekanntlich *Jacobi*, der in seinen ersten Arbeiten über die Theorie der elliptischen Functionen nachwies, dass, was auch p für eine positive ganze Zahl sein mag, eine Substitution von der Form (2.) existire, welche ein elliptisches Differential erster Gattung wieder in ein anderes elliptisches Differential erster Gattung transformirt. Und zwar besteht das von *Jacobi* zum Beweise dieses Satzes angewandte, überaus einfache Princip darin, dass die Substitution (2.) mit unbestimmten Coefficienten des Zählers und Nenners in den Ausdruck

$$(M.)\qquad \frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4}}$$

eingesetzt, und die Constanten

$$a,\ a',\ a'',\ \dots\ a^{(p)},\ b,\ b',\ b'',\ \dots\ b^{(p)}$$

so bestimmt werden, dass das Polynom unter der Quadratwurzel $2p-2$ Doppelfactoren hat; es wird sodann gezeigt, dass die Zahl der willkürlichen Constanten zu dieser Bestimmung ausreicht, und dass endlich der Quotient aus der in den Zähler des Ausdruckes ($M.$) eintretenden Function von x und den aus der Quadratwurzel heraustretenden Factoren eine Constante ist.

Dieser Satz bildet aber die Grundlage der algebraischen Theorie der Transformation der elliptischen Integrale und Functionen.

Es war unmittelbar ersichtlich, dass für Polynome von höherem Grade als dem vierten eine solche rationale Transformation eines hyperelliptischen Differentials erster Gattung in ein anderes, zu einem Polynome gleichen Grades gehöriges derselben Gattung im Allgemeinen nicht möglich ist, da die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen die Zahl der zur Verfügung stehenden Constanten übertrifft, wie dies auch von *Richelot* in der ersten seiner beiden ausgezeichneten Arbeiten über die Transformation der *Abel*schen Functionen erster Ordnung gezeigt worden, und es war wiederum *Jacobi*, welcher die fundamentale Bedeutung des *Abel*schen Theorems für die Definition der Umkehrungsfunctionen der Integrale algebraischer Functionen erkennend, *Richelot* den Weg wies, wie die Transformationstheorie der elliptischen Integrale auf die hyperelliptischen Integrale auszudehnen sei, indem er eine irrationale Substitution ermittelte, welche *ein* hyperelliptisches Integral erster Ordnung und erster Gattung auf die Summe zweier solcher Integrale zurückführte. Diesen Gedanken nahm *Richelot* auf und entwickelte in den Variabeln der beiden Integrale quadratische Substitutionen, welche *ein* hyperelliptisches Integral in die Summe von zwei andern solchen Integralen überführten, deren Moduln in bestimmten Grössenbeziehungen zu den gegebenen Moduln standen, indem er das Analogon für die *Landen*sche Transformation der elliptischen Integrale herzustellen suchte. Diese in den Jahren 1834 und 1837 im 12. und 16. Bande dieses Journals veröffentlichten Untersuchungen wurden nach keiner Seite hin weder auf Transformationen höherer Grade für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung noch auf hyperelliptische Integrale höherer Ordnung ausgedehnt, da die Methoden *Richelots* lediglich dem *quadratischen* Charakter der Substitutionsgleichung angepasst waren, und ein Fortschreiten auf diesem Wege zu undurchführbaren algebraischen Rechnungen führen musste, bis *Hermite* in seiner berühmten Arbeit „Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes" im Jahre 1855 diese Frage von einer ganz anderen Seite her beleuchtete, indem er sich die Aufgabe der Transformation der zu den hyperelliptischen Integralen erster Ordnung gehörigen ϑ-Functionen stellte und den für diese Theorie fundamental gewordenen Satz bewies, dass die zu einem bestimmt definirten k gehörigen transformirten ϑ-Functionen mit einer Exponentialgrösse multiplicirt sich als ganze homogene Functionen

k^{ten} Grades von vier ϑ-Functionen des ursprünglichen Systems ausdrücken lassen. Von dieser Arbeit *Hermites* ausgehend habe ich selbst in einer Reihe von Arbeiten, die in diesem Journale veröffentlicht sind, genauere Untersuchungen über die Transformation zweiten und dritten Grades der zu den hyperelliptischen Integralen erster Ordnung gehörigen ϑ-Functionen angestellt und auch gezeigt, wie man von den Transformationsformeln der ϑ-Functionen aus zu den Resultaten gelangen kann, die *Richelot* auf rein algebraischem Wege für die Transformation zweiten Grades gefunden hatte.

Dass jedoch die rein algebraische Behandlung des allgemeinen Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale oder die Erweiterung des von *Jacobi* für die Transformation der elliptischen Integrale angewandten Princips bisher noch nicht versucht worden, liegt unzweifelhaft darin, dass man erst das Analogon zu dem von *Abel* für elliptische Integrale aufgestellten Satze haben musste, nach welchem jede *algebraische* Transformation eines elliptischen Integrals durch eine *rationale* ersetzt werden kann; erst dann war die von *Jacobi* mit unbestimmten Coefficienten angesetzte rationale Substitution, wenn überhaupt für jeden Grad eine algebraische Transformation existirte, die allgemeinste. Nun habe ich (s. die siebente Vorlesung meiner „Theorie der hyperelliptischen Integrale") nachgewiesen — ich hebe hier nur einen speciellen Fall des dort gegebenen allgemeinen Theorems hervor, welches eine Ausdehnung des *Abel*schen Satzes ist — dass, wenn eine Beziehung von der Form

$$(3.)\quad \int F(z, \sqrt{R(z)})\,dz = \int F_1(z_1, \sqrt{R_1(z_1)})\,dz_1 + u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_\nu \log v_\nu$$

besteht, in welcher

$$(4.)\quad R(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1}),$$

$$(5.)\quad R_1(z_1) = (z_1-\beta_1)(z_1-\beta_2)\dots(z_1-\beta_{2p+1}),$$

F und F_1 rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen,

$$u,\ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_\nu$$

algebraische Functionen von z,

$$A_1,\ A_2,\ \dots\ A_\nu$$

Constanten bedeuten, und wobei z_1 als algebraische Function von z vorausgesetzt wird, sich nothwendig auch ein System von Transformationsgleichungen von der Form

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}+\cdots+\dfrac{dy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}} = \dfrac{F_1(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \\ \dfrac{y_1dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{y_2dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}+\cdots+\dfrac{y_pdy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}} = \dfrac{F_2(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{y_1^{p-1}dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{y_2^{p-1}dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}+\cdots+\dfrac{y_p^{p-1}dy_p}{\sqrt{R_1(y_p)}} = \dfrac{F_p(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \end{cases}$$

ergiebt, in welchem

$$F_1(z),\quad F_2(z),\quad \ldots\quad F_p(z)$$

im Allgemeinen ganze Functionen des $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von z sind,

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots\quad y_p$$

Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(7.)\quad y^p+f_1(z,\sqrt{R(z)})y^{p-1}+f_2(z,\sqrt{R(z)})y^{p-2}+\cdots+f_p(z,\sqrt{R(z)}) = 0$$

bedeuten, in welcher $f_1, f_2, \ldots f_p$ rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen vorstellen, und

$$\sqrt{R_1(y_1)},\quad \sqrt{R_1(y_2)},\quad \ldots\quad \sqrt{R_1(y_p)}$$

sich mit Hülfe der Grössen z und $\sqrt{R(z)}$ rational durch die resp. y ausdrücken lassen; ich habe aber ausserdem gezeigt, *dass sich das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen in allen Fällen durch das folgende:*

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}}+\dfrac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}}+\cdots+\dfrac{dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}} = 2\dfrac{F_1(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \\ \dfrac{Y_1dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}}+\dfrac{Y_2dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}}+\cdots+\dfrac{Y_pdY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}} = 2\dfrac{F_2(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{Y_1^{p-1}dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}}+\dfrac{Y_2^{p-1}dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}}+\cdots+\dfrac{Y_p^{p-1}dY_p}{\sqrt{R_1(Y_p)}} = 2\dfrac{F_p(z)dz}{\sqrt{R(z)}} \end{cases}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1,\quad Y_2,\quad \ldots\quad Y_p$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(9.)\quad Y^p+\chi_1(z)Y^{p-1}+\chi_2(z)Y^{p-2}+\cdots+\chi_p(z) = 0$$

darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)},\quad \sqrt{R_1(Y_2)},\quad \ldots\quad \sqrt{R_1(Y_p)}$$

sich als rationale Functionen von z und der zugehörigen Y-Grösse ausdrücken lassen, multiplicirt mit $\sqrt{R(z)}$.

Umgekehrt ist aber auch ersichtlich, ***dass die Existenz der Gleichung*** (9.) ***verbunden mit den für die den Lösungen derselben zugehörigen Irrationalitäten geltenden Bedingungen ein Differentialgleichungssystem von der Form*** (8.) ***nach sich zieht,*** da, wenn eine der Lösungen der Gleichung (8.) mit Y_α bezeichnet wird, aus dieser Gleichung

$$dY_\alpha = f(Y_\alpha, z)dz$$

folgt, worin f eine rationale Function bedeutet, oder auch

$$Y_\alpha^k dY_\alpha = Y_\alpha^k f(Y_\alpha, z)dz;$$

da aber ferner der Voraussetzung gemäss

$$\sqrt{R_1(Y_\alpha)} = F(Y_\alpha, z)\sqrt{R(z)}$$

ist, worin F ebenfalls eine rationale Function vorstellt, so folgt

$$\frac{Y_\alpha^k dY_\alpha}{\sqrt{R_1(Y_\alpha)}} = \varphi(Y_\alpha, z)\frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

worin auch φ eine rationale Function, und daher durch Summation nach α von 1 bis p

$$\sum_1^p{}_\alpha \frac{Y_\alpha^k dY_\alpha}{\sqrt{R_1(Y_\alpha)}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \sum_1^p{}_\alpha \varphi(Y_\alpha, z);$$

da nun

$$\sum_1^p{}_\alpha \varphi(Y_\alpha, z)$$

als rationale symmetrische Function der Lösungen der Gleichung (9.) sich als rationale Function von z darstellen lässt, ausserdem, da sich auf der linken Seite der Gleichung nur hyperelliptische Differentiale erster Gattung befinden, rechts auch nur ein hyperelliptisches Differential dieser Gattung auftreten kann, so liefert die letzte Gleichung eine der Gleichungen des Systems (8.).

Für elliptische Integrale, also für $p = 1$ geht dieser Satz in den bekannten, von *Abel* aufgestellten über, dass man das Transformationsproblem für ein elliptisches Integral zurückführen kann auf die Bestimmung einer rationalen Function Y von z, für welche

$$\frac{\sqrt{R_1(Y)}}{\sqrt{R(z)}}$$

eine rationale Function von z ist.

Und eben für dieses letztere Problem hat *Jacobi* jenes algebraische Transformationsprincip eingeführt, mit Hülfe dessen er auch die Transformationsformeln der ersten Grade und die zugehörigen Modulargleichungen wirklich aufgestellt hat; wir wollen dieses *Jacobi*sche Princip für elliptische Integrale hier nochmals und zwar nur in etwas anderer Form darstellen, um die Natur der von mir nachher zu entwickelnden Erweiterung jenes Princips und die Anwendung desselben auf hyperelliptische Integrale deutlicher erkennen zu lassen.

Sei

$$R(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3),$$

worin α_1, α_2, α_3 als gegeben zu betrachten sind, und

$$\sqrt{R_1(Y)} = (Y-\beta_1)(Y-\beta_2)(Y-\beta_3);$$

dann soll

$$(10.)\qquad \frac{\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)(Y-\beta_3)}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)}} = \psi(z)$$

sein, worin Y und $\psi(z)$ rationale Functionen von z bedeuten, oder es soll, um mich der *Riemann*schen Ausdrucksweise zu bedienen, der Quotient der beiden Irrationalitäten wie eine rationale Function von z verzweigt sein.

Setzt man nun nach *Jacobi*

$$(11.)\qquad Y = \frac{U}{V},$$

worin U und V noch zu bestimmende ganze Functionen von z bedeuten, die erste vom m^{ten}, die zweite vom μ^{ten} Grade, wobei $\mu \leqq m$ angenommen werden soll, so wird der Nenner des Quotienten der Irrationalitäten für $z = \alpha_1$, α_2, α_3 mehrdeutig sein und es somit auch der Zähler sein müssen, d. h. diesen z-Werthen werden für Y die Werthe β_1, β_2, β_3 entsprechen müssen *), damit für

$$Y-\beta_1 = A_1(z-\alpha_1)+A_2(z-\alpha_1)^2+\cdots$$

also

$$\sqrt{Y-\beta_1} = A_1^{\frac{1}{2}}(z-\alpha_1)^{\frac{1}{2}}\{1+B_1(z-\alpha_1)+\cdots\}$$

auch

$$\frac{\sqrt{Y-\beta_1}}{\sqrt{z-\alpha_1}} = A_1^{\frac{1}{2}}\{1+B_1(z-\alpha_1)+\cdots\}$$

---

*) Sind $z=\alpha_1$ und $Y=\infty$ entsprechende Werthe, so wird im Folgenden für ein ungerades m der Nenner v vom m^{ten} Grade, und es ist dann für $z=\infty$ $Y=\beta_1$ zu setzen; die Beziehung der Anzahl der willkürlichen Constanten zur Anzahl der Bedingungen bleibt dieselbe.

wieder eine eindeutige Function von z wird; somit werden die drei Grössen β_1, β_2, β_3 durch die noch unbestimmt gebliebenen Coefficienten der Polynome U und V bestimmt sein. Nun wird aber der Zähler des Quotienten der Irrationalitäten mehrdeutig für alle z-Werthe, welche $Y = \beta_1, \beta_2, \beta_3$ entsprechen, oder für alle Lösungen der Gleichungen

$$(12.)\quad U-\beta_1 V = 0, \quad U-\beta_2 V = 0, \quad U-\beta_3 V = 0;$$

nehmen wir nun an, *dass m eine ungerade Zahl ist*, so wird die eine der ungeraden Anzahl von Lösungen dieser Gleichungen resp. α_1, α_2, α_3 sein, während die anderen zu je zwei einander gleich sein müssen; denn da im Allgemeinen

$$Y-\beta_\varrho = \left(\frac{dY}{dz}\right)_{\zeta_\varrho}(z-\zeta_\varrho)+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)_{\zeta_\varrho}(z-\zeta_\varrho)^2+\cdots$$

ist, und aus

$$F(Y, z) = U-YV = 0$$

folgt, dass

$$\left(\frac{dY}{dz}\right)_{\zeta_\varrho} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial F(Y,z)}{\partial z}\right)_{\beta_\varrho,\zeta_\varrho}$$

zugleich verschwinden, so wird, wenn

$$U-\beta_\varrho V = 0$$

eine doppelte Lösung hat,

$$\sqrt{Y-\beta_\varrho} = C_1(z-\zeta_\varrho)+\cdots$$

sein und daher der Quotient der Irrationalitäten eine in ζ_ϱ eindeutige Function von z. Es ergeben sich hieraus somit

$$\frac{3(m-1)}{2}$$

Bedingungsgleichungen für die unbestimmten Coefficienten der ganzen Functionen U und V, und es bleibt also nur noch die Verzweigung des Quotienten für $Y = \infty$ und $z = \infty$ zu untersuchen. Da aber Y eine eindeutige Function von z ist und im Endlichen nur für die Lösungen von $V = 0$ unendlich wird, so werden die Lösungen dieser Gleichung, weil die Entwicklung der Irrationalität des Zählers mit $Y^{\frac{1}{2}}$ beginnt, sämmtlich doppelt vorkommen müssen, damit $Y^{\frac{1}{2}}$ wieder eindeutig in der Umgebung dieser Punkte ist, also μ eine gerade Zahl und somit höchstens $= m-1$ sein können, während die Anzahl der hierdurch fixirten Bedingungen $= \frac{m-1}{2}$ sein wird. Aber es ist Y auch unendlich für $z = \infty$ und zwar von der ersten Ordnung, wofür die Entwicklungen des Zählers und Nenners

des betrachteten Quotienten mit $z^{\frac{3}{2}}$ beginnen und der Quotient somit wieder eindeutig sein wird. Wir erhalten also im Ganzen

$$\frac{3(m-1)}{2}+\frac{m-1}{2} = 2(m-1)$$

Bedingungsgleichungen, während die Anzahl der in U und V vorkommenden willkürlichen Constanten von einer multiplicatorischen abgesehen $2m$ ist, so dass diese Bedingungen sich erfüllen lassen und noch zwei Constanten willkürlich bleiben.

Für den Fall, dass *m eine gerade Zahl* ist, bleibt der Gang der Untersuchung derselbe, der nichts anderes als das *Jacobi*sche Transformationsprincip nur in etwas anderer Gestalt wiedergiebt und für die Integrale höherer Ordnung nun eingehender besprochen werden soll.

Es werde jetzt, um die Möglichkeit der Existenz eines Transformationsproblems in dem angegebenen Sinne zu erkennen, zuerst die Zahl p als eine gerade angenommen und mit 2π bezeichnet, dann wird die Coexistenz der beiden Gleichungen

$$(13.)\qquad \varphi_0(z)\,Y^{2\pi}+\varphi_1(z)\,Y^{2\pi-1}+\cdots+\varphi_{2\pi-1}(z)\,Y+\varphi_{2\pi}(z) = 0$$

und

$$(14.)\qquad \frac{\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)\dots(Y-\beta_{4\pi+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{4\pi+1})}} = \psi(Y, z)$$

zu untersuchen sein, in welchen $\psi(Y, z)$ eine rationale Function von Y und z bedeutet, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{4\pi+1}$ gegebene Grössen sind, und

$$\varphi_0(z),\quad \varphi_1(z),\quad \dots\quad \varphi_{2\pi}(z)$$

ganze Functionen von z vorstellen, deren Coefficienten so zu bestimmen sein werden, dass die Gleichung (14.) erfüllt ist, oder dass

$$(N.)\qquad \frac{\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)\dots(Y-\beta_{4\pi+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{4\pi+1})}}$$

auf der die Grösse Y als Function von z darstellenden *Riemann*schen Fläche eindeutig, also wie Y verzweigt ist und somit nach einem bekannten *Riemann*schen Satze als rationale Function von Y und z dargestellt werden kann.

Da nun der Nenner des Quotienten ($N.$) der beiden Irrationalitäten für $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{4\pi+1}$ mehrdeutig ist und um α_ϱ herum eine Entwicklung von der Form besitzt

$$(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}}\{1+a_1(z-\alpha_\varrho)+a_2(z-\alpha_\varrho)^2+\cdots\},$$

so wird entweder, um den gestellten Bedingungen zu genügen,

$$(15.)\qquad Y-\beta_\varrho = A_1(z-\alpha_\varrho)+A_2(z-\alpha_\varrho)^2+\cdots,$$

in welchem Falle

$$\sqrt{Y-\beta_\varrho} = A_1^{\frac{1}{2}}(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}}\{1+B_1(z-\alpha_\varrho)+B_2(z-\alpha_\varrho)^2+\cdots\}$$

oder

$$\frac{\sqrt{Y-\beta_\varrho}}{\sqrt{z-\alpha_\varrho}} = A_1^{\frac{1}{2}}\{1+B_1(z-\alpha_\varrho)+B_2(z-\alpha_\varrho)^2+\cdots\}$$

und somit (*N.*) in $z=\alpha_\varrho$ eindeutig, also wie Y verzweigt wäre, oder

$$(16.)\qquad Y-c_0 = c_1(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}}+c_2(z-\alpha_\varrho)^{\frac{2}{2}}+\cdots$$

sein, worin c_0 von jedem der β verschieden, so dass

$$\begin{aligned}\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)\dots(Y-\beta_{4\pi+1})} &= d_0+d_1(Y-c_0)+d_2(Y-c_0)^2+\cdots\\ &= e_0+e_1(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}}+e_2(z-\alpha_\varrho)^{\frac{2}{2}}+\cdots\end{aligned}$$

wird, und der Quotient der Irrationalitäten in dem *einen* Punkte α_ϱ der *Riemann*schen Fläche somit so verzweigt ist wie Y nach Gleichung (16.).

Während in dem ersten Falle (15.) dem Werthe $z=\alpha_\varrho$ in dem entsprechenden Theile der *Riemann*schen Fläche nur der *eine* Werth $Y=\beta_\varrho$ entspricht, bildet in dem zweiten Falle der Punkt α_ϱ einen Verzweigungspunkt für zwei Blätter der *Riemann*schen Fläche, und es gehören diesem Werthe die beiden gleichen Werthe $Y=c_0$ zu; da nun einem Werthe $z=\alpha_\varrho$ 2π Werthe von Y entsprechen und im Punkte $z=\alpha_\varrho$, ausser wenn $Y=\beta_\varrho$ wäre, immer je zwei Werthe einander gleich sein müssen, wenn der Quotient der Irrationalitäten wie Y selbst verzweigt sein soll, so wird die Annahme (15.) nicht bestehen, d. h. es werden α_ϱ und β_ϱ nicht entsprechende Werthe sein können*); es müssen sich somit für α_ϱ die 2π entsprechenden Werthe von Y zu je zwei gleichen zusammenfassen lassen, also die Gleichung

$$\varphi_0(\alpha_\varrho)Y^{2\pi}+\varphi_1(\alpha_\varrho)Y^{2\pi-1}+\cdots+\varphi_{2\pi-1}(\alpha_\varrho)Y+\varphi_{2\pi}(\alpha_\varrho) = 0$$

π Paare von gleichen Wurzeln haben. Da diese Bedingung π Gleichungen zwischen den Coefficienten der ganzen Polynome liefert, und dies für jede

*) wenn nicht dem Werthe α_ϱ zwei Werthe β_ϱ und β_σ entsprechen, in welchem Falle, wie unmittelbar zu sehen, auch noch einem andern Werthe α_σ dieselben beiden β-Werthe zugehören werden; man erkennt daraus leicht, dass, während hierdurch im Folgenden für die Existenz der gleichen Lösungen zwei Bedingungsgleichungen weniger eintreten, durch die Festsetzung, dass die jeder der Grössen α_ϱ und α_σ entsprechenden Werthe β_ϱ und β_σ sein sollen, wieder zwei neue Bedingungen hinzutreten, und somit die am Ende der obigen Untersuchung sich ergebende Zahl von Bedingungen dieselbe bleibt.

der Lösungen α_ϱ gültig bleibt, so ergeben sich hieraus

$$(4\pi+1)\pi$$

Bedingungsgleichungen.

Beachten wir ferner, dass die Werthe

$$Y = \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_{4\pi+1}$$

Verzweigungspunkte der Irrationalität des Zählers des zu betrachtenden Quotienten sind, und sei ein dem Werthe $Y = \beta_\varrho$ entsprechender Werth $z = \gamma_\varrho$, wobei γ_ϱ von den α-Werthen verschieden angenommen werden muss, da nach den obigen Festsetzungen die α- und β-Werthe sich nicht entsprechen sollten, so wird nicht

$$z-\gamma_\varrho = e_1(Y-\beta_\varrho)+e_2(Y-\beta_\varrho)^2+\cdots$$

also

$$Y-\beta_\varrho = f_1(z-\gamma_\varrho)+f_2(z-\gamma_\varrho)^2+\cdots$$

sein dürfen, weil sonst der Quotient der Irrationalitäten in $z = \gamma_\varrho$ einen Verzweigungspunkt besässe, den Y als Function von z aufgefasst in diesem Punkte nicht hat; es wird vielmehr

$$z-\gamma_\varrho = g_1(Y-\beta_\varrho)^{\frac{1}{2}}+g_2(Y-\beta_\varrho)^{\frac{2}{2}}+\cdots$$

sein müssen, in welchem Falle

$$Y-\beta_\varrho = h_2(z-\gamma_\varrho)^2+h_3(z-\gamma_\varrho)^3+\cdots$$

sein wird, und daher die Quadratwurzel des Zählers, also der Quotient der Irrationalitäten, wie unmittelbar zu sehen, auch in $z = \gamma_\varrho$ eindeutig. Es müssen somit, wenn der Grad der Polynome

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \ldots \quad \varphi_{2\pi}(z)$$

mit r bezeichnet wird, für $Y = \beta_\varrho$ die r zugehörigen z-Werthe sich zu je zwei gleichen zusammenfassen lassen, also muss r *eine gerade Zahl* sein. Da nun die Elimination der Grösse z aus den beiden Gleichungen

$$\varphi_0(z)Y^{2\pi}+\varphi_1(z)Y^{2\pi-1}+\cdots+\varphi_{2\pi}(z) = 0$$

und der nach z genommenen Ableitung dieser Gleichung

$$\varphi_0'(z)Y^{2\pi}+\varphi_1'(z)Y^{2\pi-1}+\cdots+\varphi_{2\pi}'(z) = 0$$

die Werthe von Y giebt, für welche die vorgelegte Transformationsgleichung zwei gleiche Lösungen in z hat, so wird man die $4\pi+1$ Werthe

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_{4\pi+1},$$

vorausgesetzt, dass r so gross gewählt wird, dass der Grad der Eliminationsgleichung nicht kleiner als $4\pi+1$ ist, aus der Reihe dieser Y-Werthe wählen, und somit wird für die Werthereihe $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{4\pi+1}$ die Existenz je eines Paares gleicher z-Lösungen ohne weitere Bedingungsgleichungen er-

wiesen sein; es bleiben also nur noch für eben diese β-Werthe die Bedingungen für $\frac{r-2}{2}$ Paare gleicher Lösungen zu erfüllen, und es wird daher die Zahl der hierdurch hinzutretenden Bedingungsgleichungen für die unbestimmten Coefficienten der ganzen Functionen von z in der Transformationsgleichung

$$\frac{r-2}{2}(4\pi+1)$$

sein.

Nach diesen Bestimmungen bleibt somit nur noch die Verzweigung des Quotienten der Irrationalitäten in den dem Werthe $Y=\infty$ entsprechenden endlichen z-Punkten und in dem Punkte $z=\infty$ zu untersuchen. Ist $Y=\infty$ für ein endliches $z=\zeta$, so wird im Allgemeinen

$$\begin{aligned} Y &= A_{-x}(z-\zeta)^{-x}+A_{-x+1}(z-\zeta)^{-x+1}+\cdots \\ &= A_{-x}(z-\zeta)^{-x}\{1+B_1(z-\zeta)+\cdots\} \end{aligned}$$

sein, und da die Entwicklung des Zählers des zu untersuchenden Quotienten ($N.$) in der Umgebung von $Y=\infty$ die Form hat

$$Y^{\frac{4\pi+1}{2}}\{1+m_1Y^{-1}+\cdots\} = A_{-x}^{\frac{4\pi+1}{2}}(z-\zeta)^{\frac{-x(4\pi+1)}{2}}\{1+d_1(z-\zeta)+\cdots\},$$

die des Nenners aber um $z=\zeta$ herum eindeutig ist, so muss, damit der Quotient so verzweigt ist, wie Y in $z=\zeta$ es ist, x eine gerade Zahl sein, und es genügt offenbar schon $x=2$ zu wählen, d. h. es wird Y in $z=\zeta$ von der zweiten Ordnung unendlich sein müssen. Man sieht aber leicht, dass, wenn man in der Gleichung (13.) $Y=\frac{1}{t}$ setzt, wodurch dieselbe in

$$F(z,t)=\varphi_{2\pi}(z)t^{2\pi}+\varphi_{2\pi-1}(z)t^{2\pi-1}+\cdots+\varphi_1(z)t+\varphi_0(z)=0$$

übergeht, durch Entwickelung der linken Seite dieser Gleichung um die Punkte $t=0$, $z=\zeta$ herum sich ergiebt:

$$0 = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{0,\zeta}(z-\zeta)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{0,\zeta}t\right)+\cdots,$$

und wenn man nach bekannten Principien für die Untersuchung algebraischer Functionen

$$\frac{t}{z-\zeta} = u$$

setzt und durch $z-\zeta$ dividirt,

$$0 = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{0,\zeta}+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{0,\zeta}u\right)+\frac{(z-\zeta)}{1.2}\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_{0,\zeta}+2u\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial t}\right)_{0,\zeta}+u^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)_{0,\zeta}\right)+\cdots,$$

so dass sich für $z=\zeta$ zur Bestimmung von u die Beziehung ergiebt

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{0,\zeta}+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{0,\zeta}u = 0,$$

und somit u als eindeutige Function von z in der Umgebung von $z=\zeta$ von der Form

$$u = q_1(z-\zeta)+q_2(z-\zeta)^2+\cdots,$$

wenn

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{0,\zeta} = 0,$$

d. h. wenn

$$\varphi_0'(z)_{z=\zeta} = 0$$

oder wenn $z=\zeta$ eine doppelte Lösung von $\varphi_0(z)=0$ ist. In diesem Falle wird dann

$$t = q_1(z-\zeta)^2+q_2(z-\zeta)^3+\cdots$$

und somit

$$Y = q_1^{-1}(z-\zeta)^{-2}+r_1(z-\zeta)^{-1}+\cdots,$$

wie es gefordert ist. Da aber nun bekanntlich Y stets und nur unendlich wird für alle Lösungen der Gleichung $\varphi_0(z)=0$, so werden die oben geforderten Bedingungen erfüllt sein, wenn das Polynom $\varphi_0(z)$ r Paare von je zwei gleichen Lösungen besitzt, wodurch weitere

$$\frac{r}{2}$$

Bedingungsgleichungen für die unbestimmten Coefficienten der Transformationsgleichung hinzutreten.

Es bleibt endlich noch der Werth $z=\infty$ zu untersuchen übrig, in dessen Umgebung die Entwickelung der Irrationalität im Nenner des Quotienten (N.) die Form hat

$$z^{\frac{4\pi+1}{2}}+m_1 z^{\frac{4\pi-1}{2}}+\cdots;$$

zuerst ist unmittelbar ersichtlich, dass die dem $z=\infty$ entsprechenden Werthe von Y unter der Annahme, dass $\varphi_0(z)$ vom r^{ten} Grade, worin r den Grad der Transformationsgleichung in z bezeichnete, sämmtlich endlich sein müssen, da die Substitution $z=\frac{1}{\zeta}$ in Gleichung (13.) nach Multiplication der Gleichung mit ζ^r nur dann für $\zeta=0$ eine unendlich grosse Lösung für Y liefern würde, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von z in $\varphi_0(z)$ verschwindet, also $\varphi_0(z)$ von niedrigerem Grade als dem r^{ten} wäre. Sind aber die 2π dem Werthe $z=\infty$ entsprechenden Werthe von Y sämmtlich endlich, und sei einer derselben η, so wird im Allgemeinen

$$Y-\eta = A_1 z^{-1}+A_2 z^{-2}+\cdots$$

sein, und somit die Irrationalität des Zählers des zu untersuchenden Quotienten auch um $z \mp \infty$ herum eindeutig sein, während die des Nenners zweideutig ist; es wird also, damit auch die Irrationalität des Zählers zweideutig ist, der Werth η zu den Werthen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{4\pi+1}$ gehören müssen, so dass

$$Y-\beta_\varrho = A_1 z^{-1}+A_2 z^{-2}+\cdots$$

und somit

$$\sqrt{Y-\beta_\varrho} = A_1^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}\{1+b_1 z^{-1}+\cdots\}$$

wird, also, weil

$$\sqrt{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{4\pi+1})} = z^{\frac{4\pi+1}{2}}\{1+c_1 z^{-1}+\cdots\},$$

auch

$$\frac{\sqrt{(Y-\beta_1)\ldots(Y-\beta_{4\pi+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{4\pi+1})}} = Mz^{-2\pi-1}\{1+n_1 z^{-1}+\cdots\}$$

so wie Y selbst eindeutig um $z=\infty$ herum ist. Man hat also nur die Bedingungen zu befriedigen, dass für $z=\infty$ oder, wenn man $z=\frac{1}{t}$ setzt, für $t=0$ die 2π zugehörigen Lösungen der Gleichung in Y z. B. die Werthe

$$\beta_2, \quad \beta_4, \quad \ldots \quad \beta_{4\pi}$$

annehmen, wodurch zu den früheren Bedingungen noch

$$2\pi$$

Bedingungsgleichungen hinzutreten.

Im Uebrigen wird offenbar der Quotient der Irrationalitäten gerade so verzweigt sein, wie Y selbst; denn sei

$$Y-Y_1 = \lambda_1(z-z_1)^{\frac{m}{n}}+\lambda_2(z-z_1)^{\frac{m+1}{n}}+\cdots,$$

worin m und n positive ganze Zahlen bedeuten, so wird in der Umgebung von Y_1

$$\sqrt{(Y-\beta_1)\ldots(Y-\beta_{4\pi+1})} = A_1+A_2(Y-Y_1)+A_3(Y-Y_1)^2+\cdots,$$

und weil

$$Y-Y_1 = \lambda_1(z-z_1)^{\frac{m}{n}}\{1+\mu_1(z-z_1)^{\frac{1}{n}}+\cdots\}$$

also

$$(Y-Y_1)^r = \lambda_1^r(z-z_1)^{\frac{mr}{n}}\{1+\nu_1(z-z_1)^{\frac{1}{n}}+\cdots\}$$

ist, auch

$$\sqrt{(Y-\beta_1)\ldots(Y-\beta_{4\pi+1})} = A_1+B_0(z-z_1)^{\frac{m}{n}}+B_1(z-z_1)^{\frac{m+1}{n}}+\cdots$$

sein; da aber ferner unter der Annahme, dass z keiner der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{4\pi+1}$ ist, die früher berücksichtigt waren, .

$$\sqrt{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_{4\pi+1})} = \varrho_0+\varrho_1(z-z_1)+\varrho_2(z-z_1)^2+\cdots$$

ist, so erhält man

$$\frac{\sqrt{(Y-\beta_1)\dots(Y-\beta_{4\pi+1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_{4\pi+1})}} = R+R_0(z-z_1)^{\frac{k}{n}}+R_1(z-z_1)^{\frac{k+1}{n}}+\cdots,$$

und somit ist der Quotient der Irrationalitäten so verzweigt wie Y selbst.

Fassen wir jetzt die einzelnen Resultate zusammen, so ergiebt sich, dass die in den Functionen

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \dots \quad \varphi_{2\pi}(z)$$

enthaltenen willkürlichen Constanten, deren Zahl von einer multiplicatorischen Constanten abgesehen,

$$(r+1)(2\pi+1)-1$$

beträgt,

$$\pi(4\pi+1)+\frac{r-2}{2}(4\pi+1)+\frac{r}{2}+2\pi$$

Bedingungsgleichungen genügen müssen, und da die Ungleichheit

$$\pi(4\pi+1)+\frac{r-2}{2}(4\pi+1)+\frac{r}{2}+2\pi \leqq (r+1)(2\pi+1)-1$$

oder

$$\pi(4\pi-3) \leqq 1$$

nur für $\pi=1$ erfüllt ist, während für jedes grössere π die Anzahl der Bedingungen die der Constanten überschreitet, so folgt, ***dass von allen hyperelliptischen Integralen, deren p eine gerade Zahl ist, nur für die Integrale erster Ordnung eine allgemeine Transformation existirt.***

Sei nun p eine ungerade Zahl von der Form $2\pi-1$, so dass das zu betrachtende Gleichungssystem die Gestalt hat

$$\varphi_0(z)Y^{2\pi-1}+\varphi_1(z)Y^{2\pi-2}+\cdots+\varphi_{2\pi-2}(z)Y+\varphi_{2\pi-1}(z) = 0,$$

$$\frac{\sqrt{(Y-\beta_1)(Y-\beta_2)\dots(Y-\beta_{4\pi-1})}}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{4\pi-1})}} = \psi(Y, z),$$

worin die Functionen

$$\varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \dots \quad \varphi_{2\pi-1}(z)$$

wieder ganze Functionen von z vom r^{ten} Grade vorstellen, während $\psi(Y, z)$ eine rationale Function von Y und z bedeuten soll, so wird wiederum wie

oben für $z = \alpha_\varrho$ die Grösse Y, wenn sie nicht einem der β-Werthe gleich ist und somit eine Verzweigung der Irrationalität des Zählers hervorruft, die Entwickelungsform haben müssen:

$$Y = c_0 + c_1 (z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + c_2 (z - \alpha_\varrho)^{\frac{2}{2}} + \cdots,$$

und somit werden wieder für $z = \alpha_\varrho$ die Y-Werthe zu je zweien einander gleich sein müssen*); da aber die Transformationsgleichung hier von einem unpaaren Grade ist, so wird der eine übrig bleibende Werth von Y einem β-Werthe gleich sein müssen oder β_ϱ einer der Y-Werthe für $z = \alpha_\varrho$ sein, während sich zum Zwecke der Herstellung der gleichen Wurzeln der Y-Gleichung

$$\frac{2\pi - 2}{2} (4\pi - 1)$$

Bedingungen ergeben.

Gehen wir jetzt zu den Werthen von z über, welche einem der fixirten β-Werthe des Y entsprechen, so werden wieder diese z-Werthe zu je zweien einander gleich sein müssen; da aber ein β-Werth als einem α-Werthe entsprechend bereits abgesondert ist, so muss r *eine ungerade Zahl* sein, und es ergeben sich in diesem Falle weitere

$$\frac{r-1}{2} (4\pi - 1)$$

Bedingungsgleichungen.

Für diejenigen endlichen Werthe ζ von z, welchen $Y = \infty$ entspricht, folgt aus den obigen Auseinandersetzungen wieder, dass sie doppelte Lösungen der Gleichung

$$\varphi_0(z) = 0$$

sein müssen; es wird somit der Grad von $\varphi_0(z)$ ein paarer, d. h. der $(r-1)^{\text{te}}$ sein müssen, und die Anzahl der sich weiter ergebenden Bedingungsgleichungen in unserm Falle

$$\frac{r-1}{2}$$

sein.

Was endlich den Werth $z = \infty$ betrifft, so ist leicht zu sehen, dass der eine dem $z = \infty$ oder, wenn $z = \frac{1}{t}$ gesetzt wird, dem $t = 0$ entsprechende Werth von Y unendlich gross wird, weil der eben geforderten Bedingung gemäss $\varphi_0(z)$ nur vom $(r-1)^{\text{ten}}$ Grade war; es wird daher

---

*) s. die Anmerkung S. 181.

$$Y = A_1 z + A_0 + A_{-1} z^{-1} + \cdots$$
$$= A_1 z \{1 + B_{-1} z^{-1} + \cdots\}$$

sein, und der Quotient der Irrationalitäten in der Umgebung der Werthe $z = \infty$ $Y = \infty$ die Entwickelung haben

$$\frac{Y^{\frac{4\pi-1}{2}} \{1 + C_{-1} Y^{-1} + \cdots\}}{z^{\frac{4\pi-1}{2}} \{1 + D_{-1} z^{-1} + \cdots\}} = E_0 + E_{-1} z^{-1} + \cdots,$$

d. h. der Quotient der Irrationalitäten wird in $z = \infty$ eindeutig, wie es Y selbst ist. Die übrigen $2\pi - 2$ dem $z = \infty$ entsprechenden Werthe von Y werden wieder den Werthen

$$\beta_2, \quad \beta_4, \quad \ldots \quad \beta_{4\pi-4}$$

gleich zu machen sein und daher

$$2\pi - 2$$

Bedingungsgleichungen liefern.

Die

$$r + (r+1)(2\pi - 1) - 1$$

Constanten der Transformationsgleichung werden somit

$$(\pi - 1)(4\pi - 1) + \frac{r-1}{2}(4\pi - 1) + \frac{r-1}{2} + 2\pi - 2$$

Bedingungen genügen müssen, und es wird daher, wenn eine allgemeine Transformation existiren soll, die Ungleichheit bestehen müssen

$$(4\pi - 1)\left[\pi - 1 + \frac{r-1}{2}\right] + \frac{r-1}{2} + 2\pi - 2 \leqq r + (r+1)(2\pi - 1) - 1$$

oder

$$\pi(4\pi - 7) \leqq -1,$$

die jedoch nur für $\pi = 1$, d. h. für elliptische Integrale erfüllt ist.

Wir erhalten somit den Satz,

> *dass die allgemeine Transformation in dem von **Jacobi** definirten Sinne bei beliebig gewählten Lösungen des Polynoms $R(z)$ nur für die elliptischen Integrale und die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung möglich ist,*

und haben zugleich die Methode angegeben, wie man für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung die Transformation auf rein algebraischem Wege ausführen und somit ähnliche Untersuchungen anstellen

kann, wie sie von *Jacobi* in den „Fundamenta“ für elliptische Integrale in der algebraischen Herleitung der Transformationsausdrücke und der Bildung von Modulargleichungen gegeben worden.

Ich hoffe auf die wirkliche Ausführung des Transformationsproblems für die ersten Transformationsgrade und auf die Benutzung der sich ergebenden Resultate für weitere Untersuchungen in der Integralrechnung noch ferner zurückkommen zu können und will nur am Schlusse dieser Arbeit noch die Bemerkung hinzufügen, dass Herr *Weierstrass* mir mittheilte, dass er den Satz von der Unmöglichkeit der Transformation für $p > 2$ daraus bewiesen habe, „dass die Bedingungen, welche die $\vartheta(0, 0, \dots 0)_\lambda$ erfüllen müssen, damit die $\vartheta(v_1, v_2, \dots v_p)_\lambda$ auf hyperelliptische Integrale führen, bei beliebigen $\tau_{\alpha\beta}$ nicht mehr erfüllt sind, wenn man die ϑ-Functionen transformirt.“

Wien, im November 1878.

On the triple ϑ-functions.

(By Professor *A. Cayley* at Cambridge.)

A quartic curve has the deficiency 3, and depends therefore on the triple ϑ-functions: and these, as functions of 3 arguments, should be connected with functions of 3 points on the curve; but it is easy to understand that it is possible, and may be convenient, to introduce a fourth point, and so regard them as functions of 4 points on the curve: thus in the circle, the functions $\cos u$, $\sin u$ may be regarded as functions of one point $\cos u = x$, $\sin u = y$, or as functions of two points, $\cos u = xx_1 + yy_1$, $\sin u = xy_1 - x_1 y$. And accordingly in *Weber*'s memoir „Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht 3" (1876) see p. 156, the triple ϑ-functions are regarded as functions of 4 points on the curve: viz. it is in effect shown that (disregarding constant factors) each of the 64 functions is proportional to a determinant the four lines of which are algebraical functions of the coordinates of the four points respectively: the form of this determinant being different according as the characteristic of the ϑ-function is odd or even, or say according as the ϑ-function is odd or even. But the geometrical signification of these formulae requires to be developed.

A quartic curve may be touched in six points by a cubic curve: but (*Hesse*, 1855)*) there are two kinds of such tangent cubics, according as the six points of contact are on a conic, or are not on a conic; say we have a conic hexad of points on the quartic, and a cubic hexad of points on the quartic. In either case three points of the hexad may be assumed at pleasure, and we can then in 28 different ways determine the remaining three points of the conic hexad, and in 36 different ways the remaining three points of the cubic hexad: or what is the same thing, there

---

*) See the two memoirs „Ueber Determinanten in der Geometrie" and „Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung", this Journal t. XLIX. (1855.)

are 28 systems of cubics touching in a conic hexad, and 36 systems of cubics touching in a cubic hexad. The condition in order that four points of the quartic curve may belong to a hexad (conic or cubic) is given by an equation $\Omega = 0$, where Ω is a determinant the four lines of which are algebraical functions of the coordinates of the four points respectively: but the form of such determinant is different according as the condition belongs to a conic hexad, or to a cubic hexad: we have thus 28 conic determinants and 36 cubic determinants, Ω; and the 64 ϑ-functions are proportional to constant multiples of these determinants: viz. the odd functions correspond to the conic determinants, and the even functions to the cubic determinants.

First as to the conic hexads: the points of a conic hexad lie in a conic with the two points of contact of some one of the bitangents of the quartic curve: so that given any three points of the hexad, these together with the two points of contact of the bitangent determine a conic which meets the quartic in the remaining three points of the hexad. Suppose that a, b, c, f, g, h are linear functions of the coordinates such that the equation of the quartic curve is

$$\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch} = 0,$$

then $a=0$, $b=0$, $c=0$, $f=0$, $g=0$, $h=0$ are six of the bitangents of the curve, and the bitangent $a=0$ touches the curve at the two points of intersection of this line with the conic $bg-ch=0$. The general equation of a conic through these two points $a=0$, $bg-ch=0$, may be written

$$bg-ch+a(Ax+By+Cz) = 0,$$

where for x, y, z we may if we please substitute any three of the six linear functions a, b, c, f, g, h, or any other linear functions of the coordinates (x, y, z): and the equation may also be written

$$af \pm (bg-ch)+a(Ax+By+Cz) = 0.$$

Adopting this latter form, and considering the intersections of the conic with the quartic, that is considering the relation $\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch} = 0$ as holding good, we have $af+bg-ch = -2\sqrt{afbg}$, $af-bg+ch = -2\sqrt{afch}$, and we thus have at pleasure one or other of the two equations

$$-2\sqrt{afbg}+ \ a(Ax+By+Cz) = 0,$$
$$-2\sqrt{afch}+ \ a(Ax+By+Cz) = 0,$$

that is

$$-2\sqrt{fbg}\ +\sqrt{a}(Ax+By+Cz) = 0,$$
$$-2\sqrt{fch}\ +\sqrt{a}(Ax+By+Cz) = 0,$$

and hence the condition in order that the four points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) assumed to be points of the quartic, may belong to the conic hexad, may be written

$$\begin{vmatrix} \sqrt{f_1b_1g_1}, & x_1\sqrt{a_1}, & y_1\sqrt{a_1}, & z_1\sqrt{a_1} \\ \sqrt{f_2b_2g_2}, & x_2\sqrt{a_2}, & y_2\sqrt{a_2}, & z_2\sqrt{a_2} \\ \sqrt{f_3b_3g_3}, & x_3\sqrt{a_3}, & y_3\sqrt{a_3}, & z_3\sqrt{a_3} \\ \sqrt{f_4b_4g_4}, & x_4\sqrt{a_4}, & y_4\sqrt{a_4}, & z_4\sqrt{a_4} \end{vmatrix} = 0, \text{ or } \begin{vmatrix} \sqrt{f_1c_1h_1}, & x_1\sqrt{a_1}, & y_1\sqrt{a_1}, & z_1\sqrt{a_1} \\ \sqrt{f_2c_2h_2}, & x_2\sqrt{a_2}, & y_2\sqrt{a_2}, & z_2\sqrt{a_2} \\ \sqrt{f_3c_3h_3}, & x_3\sqrt{a_3}, & y_3\sqrt{a_3}, & z_3\sqrt{a_3} \\ \sqrt{f_4c_4h_4}, & x_4\sqrt{a_4}, & y_4\sqrt{a_4}, & z_4\sqrt{a_4} \end{vmatrix} = 0,$$

where as before the x, y, z may be replaced by any three of the letters a, b, c, f, g, h, or by any other linear functions of (x, y, z): and moreover although in obtaining the condition we have used for the quartic the equation $\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch} = 0$, depending upon six bitangents, yet it is from the process itself clear that the condition can only depend upon the particular bitangent $a = 0$: calling the condition $\Omega = 0$, all the forms of condition which belong to the same bitangent $a = 0$, will be essentially identical, that is the several determinants Ω will differ only by constant factors; or disregarding these constant factors, we have for the bitangent $a = 0$, a single determinant Ω, which may be taken to be any one of the determinants in question. And we have thus 28 determinants Ω, corresponding to the 28 bitangents respectively.

Coming now to the cubic hexads, *Hesse* showed that the equation of a quartic curve could be (and that in 36 different ways) expressed in the form, symmetrical determinant $= 0$, or say

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g, & l \\ h, & b, & f, & m \\ g, & f, & c, & n \\ l, & m, & n, & d \end{vmatrix} = 0$$

where $(a, b, c, d, f, g, h, l, m, n)$ are linear functions of the coordinates; and from each of these forms he obtains the equation of a cubic

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g, & l, & \alpha \\ h, & b, & f, & m, & \beta \\ g, & f, & c, & n, & \gamma \\ l, & m, & n, & d, & \delta \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta & \end{vmatrix} = 0$$

(containing the four constants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, or say the 3 ratios of these constants) touching the quartic in a cubic hexad of points: that the cubic does touch the quartic in six points appears in fact from *Hesse*'s identity

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g, & l, & \alpha \\ h, & b, & f, & m, & \beta \\ g, & f, & c, & n, & \gamma \\ l, & m, & n, & d, & \delta \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & h, & g, & l, & \alpha' \\ h, & b, & f, & m, & \beta' \\ g, & f, & c, & n, & \gamma' \\ l, & m, & n, & d, & \delta' \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta' & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a, & h, & g, & l, & \alpha \\ h, & b, & f, & m, & \beta \\ g, & f, & c, & n, & \gamma \\ l, & m, & n, & d, & \delta \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta' & \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a, & h, & g, & l \\ h, & b, & f, & m \\ g, & f, & c, & n \\ l, & m, & n, & d \end{vmatrix} U,$$

where U is an easily calculated function of the second order in $(a, b, c, d, f, g, h, l, m, n)$ and also of the second order in the determinants $\alpha\beta'-\alpha'\beta$, etc.

We can obtain such a form of the equation of the quartic, from the before mentioned equation $\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch} = 0$, viz. this equation gives

$$\begin{vmatrix} *, & h, & g, & a \\ h, & *, & f, & b \\ g, & f, & *, & c \\ a, & b, & c, & * \end{vmatrix} = 0,$$

which is of the required form, symmetrical determinant $= 0$; the equation is in fact $a^2f^2+b^2g^2+c^2h^2-2bcgh-2cahf-2abfg = 0$, which is the rationalised form of $\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch} = 0$, and we hence have the cubic

$$\begin{vmatrix} *, & h, & g, & a, & \alpha \\ h, & *, & f, & b, & \beta \\ g, & f, & *, & c, & \gamma \\ a, & b, & c, & *, & \delta \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & * \end{vmatrix} = 0,$$

the developed form of which is

$$\alpha^2 bcf + \beta^2 cag + \gamma^2 abh + \delta^2 fgh$$
$$-(a\beta\gamma + f\alpha\delta)(-af + bg + ch)$$
$$-(b\gamma\alpha + g\beta\delta)(\ af - bg + ch)$$
$$-(c\alpha\beta + h\gamma\delta)(\ af + bg - ch) = 0.$$

Considering the intersections with the quartic $\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch} = 0$, we have $-af + bg + ch$, $af - bg + ch$, $af + bg - ch = -2\sqrt{bcgh}$, $-2\sqrt{cahf}$, $-2\sqrt{abfh}$, and the equation thus becomes

$$(\alpha\sqrt{bcf} + \beta\sqrt{cag} + \gamma\sqrt{abh} + \delta\sqrt{fgh})^2 = 0,$$

viz. for the points of the cubic hexad we have

$$\alpha\sqrt{bcf} + \beta\sqrt{cag} + \gamma\sqrt{abh} + \delta\sqrt{fgh} = 0,$$

and hence the condition in order that the four points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) may belong to the cubic hexad is

$$\begin{vmatrix} \sqrt{b_1c_1f_1}, & \sqrt{c_1a_1g_1}, & \sqrt{a_1b_1h_1}, & \sqrt{f_1g_1h_1} \\ \sqrt{b_2c_2f_2}, & \sqrt{c_2a_2g_2}, & \sqrt{a_2b_2h_2}, & \sqrt{f_2g_2h_2} \\ \sqrt{b_3c_3f_3}, & \sqrt{c_3a_3g_3}, & \sqrt{a_3b_3h_3}, & \sqrt{f_3g_3h_3} \\ \sqrt{b_4c_4f_4}, & \sqrt{c_4a_4g_4}, & \sqrt{a_4b_4h_4}, & \sqrt{f_4g_4h_4} \end{vmatrix} = 0,$$

viz. we have thus the form of the determinant Ω which belongs to a cubic hexad.

It is to be observed that the equation $\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch} = 0$ remains unaltered by any of the interchanges a and f, b and g, c and h; but we thus obtain only two cubic hexads; those answering to the equations

$$\alpha\sqrt{bcf} + \beta\sqrt{cag} + \gamma\sqrt{abh} + \delta\sqrt{fgh} = 0,$$

and

$$\alpha\sqrt{agh} + \beta\sqrt{bhf} + \gamma\sqrt{cfg} + \delta\sqrt{abc} = 0,$$

which give distinct hexads. The whole number of ways in which the equation of the quartic can be expressed in a form such as $\sqrt{af} + \sqrt{bg} + \sqrt{ch} = 0$, attending only to the pairs of bitangents, and disregarding the interchanges of the two bitangents of a pair, is $= 1260$; and hence the number of forms for the determinant Ω of a cubic hexad is the double of this, $= 2520$, which is $= 36 \times 70$: but the number of distinct hexads is $= 36$, and thus there must be for each hexad, 70 equivalent forms.

To explain this, observe that every even characteristic except $\begin{smallmatrix}000\\000\end{smallmatrix}$,

and every odd characteristic, can be (and that in 6 ways) expressed as a sum of two different odd characteristics; we have thus (see *Weber*'s Table I) a system of $(35+28=)$ 63 hexpairs; and selecting at pleasure any three pairs out of the same hexpair we have a system of $(63\times 20=)$ 1260 tripairs; giving the 1260 representations of the quartic in a form such as $\sqrt{af}+\sqrt{bg}+\sqrt{ch}=0$.

Each even characteristic $\left(\text{not excluding } {000 \atop 000}\right)$ can be in 56 different ways (*Weber* p. 23) expressed as a sum of three different odd characteristics, and these are such no two of them belong to the same pair, in any tripair; or we may say that each even characteristic gives rise to 56 hemi-tripairs. But a hemi-tripair can be in 5 different ways completed into a tripair; and we have thus, belonging to the same even characteristic $(56\times 5=)$ 280 tripairs, which are however 70 tripairs each taken 4 times. A tripair contains in all $(2^3=)$ 8 hemi-tripairs, but these divide themselves into two sets each of 4 hemi-tripairs such that for each hemi-tripair of the first set the three characteristics have a given sum, and for each hemi-tripair of the second set the three characteristics have a different given sum. Hence considering the 70 tripairs corresponding as above to a given even characteristic, in any one of the 70 tripairs, there is a set of 4 hemi-tripairs such that in each of them the sum of the three characteristics is equal to the given even characteristic; and taking the bitangents f, g, h to correspond to any one of these hemi-tripairs, the bitangents which correspond to the other three hemi-tripairs will be b, c, f; c, a, g and a, b, h respectively; and we thus obtain from any one of these one and the same representation $\alpha\sqrt{bcf}+\beta\sqrt{cag}+\gamma\sqrt{abh}+\delta\sqrt{fgh}=0$ of the cubic hexad. And the 70 tripairs give thus the 70 representations of the same cubic hexad.

The whole number of hemi-tripairs is $36\times 56=2016$: it may be remarked that there exists a system of 288 heptads, each of 7 odd characteristics such that selecting at pleasure any 3 characteristics out of the heptad, we obtain always a hemi-tripair: we have thus in all $288\times 35=10080$ hemi-tripairs: this is $=2016\times 5$, or we have the 2016 hemi-tripairs each taken 5 times. *Weber*'s Table II exhibits 36 out of the 288 heptads.

I recall that in the algorithm derived from *Hesse*'s theory the bitangents are represented by the duads 12, 13, ... 78 formed with the eight figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; these duads correspond to the odd charac-

teristics as shown in the Table, and the table shows also triads corresponding to all the even characteristics except $\begin{smallmatrix}000\\000\end{smallmatrix}$.

Top line of characteristic.

Bottom line of characteristic	000	100	010	110	001	101	011	111
000		236	345	137	467	156	124	257
100	237	67	136	12	157	48	256	35
010	245	127	23	68	134	357	15	47
110	126	13	78	145	356	25	46	234
001	567	146	125	247	45	17	38	26
101	147	58	246	34	16	123	27	367
011	135	347	14	57	17	36	167	456
111	346	24	56	235	37	267	457	18

See my „Algorithm of the triple ϑ-functions" this Journal t. 87 p. 165. The (35+28 =) 63 hexpairs then are

35 hexpairs such as [figure], say this is 1234.5678

or for shortness 567 (the 8 going always with the expressed triad): that is 567 denotes the hexpair

12.34; 13.24; 14.23; 56.78; 57.68; 58.67

and 28 hexpairs such as [figure], say this is 12; that is 12

denotes the hexpair 13.32; 14.42; 15.52; 16.62; 17.72; 18.82.

It is to be noticed that the odd characteristics as represented by their duad symbols can be added by the formulae

$12+23 = 13$, etc. or what is the same thing $12+13+23 = 0, = \begin{smallmatrix}000\\000\end{smallmatrix}$, etc.

and

$$12+34 = 13+24 = 14+23 = 56+78 = 57+68 = 58+67 = 567, \text{ etc.}$$

thus referring to the table

$$12+24 = 13 \quad \text{means} \quad \frac{110}{100}+\frac{010}{010}=\frac{100}{110},$$

and

$$12+34 = 567 \quad \text{means} \quad \frac{110}{100}+\frac{110}{101}=\frac{000}{001},$$

which are right.

The 288 heptads are

8 heptads such as [diagram: 1 joined to 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], say this is the heptad 1, denoting the seven duads 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18;

and 280 heptads such as [diagram: 1 joined to 2, 3, 4, 5; triangle 6, 7, 8], say this is the heptad 1.678 denoting the seven duads 12, 13, 14, 15, 67, 68, 78;

and we hence see that the 2016 hemi-tripairs are

280 hemi-tripairs [diagram: 1 joined to 2, 3, 4] (I.), say this is 1.234 denoting the three duads 12, 13, 14.

1680 hemi-tripairs [diagram: 1–2; 6 joined to 7, 8] (II.), say this is 12(6.78), denoting the three duads 12, 67, 68

56 hemi-tripairs [diagram: triangle 1, 2, 3] (III.), say this is 123, denoting the three duads 12, 13, 23,

2016

and we further see how each hemi-tripair may be completed into a tripair

in 5 different ways: thus (I.) gives the 5 tripairs [diagram: 1; 2, 4; 3] [diagram: 1; 2, 3, 4; 5, 6, 7 or 8]

(III.) gives the 5 tripairs [diagram: 1; 2, 3; 4, 5, 6, 7 or 8] while (II.) gives the 3 tripairs

[diagram: 1, 2 | 34, 35 or 45 | 6; 7, 8; 5, 4 or 3] and the 2 tripairs [diagram: 1, 6; 2, 7; 8] and [diagram: 2, 6; 1, 7; 8].

To each even characteristic there belongs a system of 56 hemi-tripairs; thus for the characteristic $\begin{smallmatrix}000\\000\end{smallmatrix}$, the 56 hemi-tripairs are 123 (that is 12, 13, 23) etc.: whence the 70 tripairs are 1234 (that is 12.34; 13.24; 14.23) etc; and in any such tripair, say in 1234, we have the set of four hemi-tripairs 123, 124, 134, 234 for each of which the sum of the three characteristics is $=\begin{smallmatrix}000\\000\end{smallmatrix}(12+23+13=\begin{smallmatrix}000\\000\end{smallmatrix}$, etc.) and the other set 1.234, 2.134, 3.124, 4.123 for each of which the sum of the three characteristics is $=567\left(12+13+14,\ =23+14,\ =567,\ =\begin{smallmatrix}000\\001\end{smallmatrix}\right)$.

To find the hemi-tripairs that belong to any other even characteristic; for instance, $\begin{smallmatrix}000\\001\end{smallmatrix}$, corresponds to 567: we have 4 such as 1.234; 24 such as (5.12) 34; 4 such as 5.678; and 24 such as (1.56) 78; in all $4+24+4+24,\ =56$. The tripairs are the 2, 1234, 5678; 16 such as 54 (123); 16 such as 15 (678); 36 such as (5162) 34.78; in all $2+16+16+36,\ =70$; and in each of these it is easy to select the hemi-tripairs for which the sum of the 3 duads is $=567$.

Cambridge, 27. Dec. 1878.

Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *L. Kiepert* in Darmstadt.)

Im dritten Bande dieses Journals Seite 308 hat *Jacobi* den Satz ausgesprochen, dass für alle Primzahlen n bei der Transformation n^{ten} Grades der Multiplicator M*) einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von k sind, und dass, wenn $M, M', M'', \ldots M^{(n)}$ die Wurzeln dieser Gleichung sind, zwischen den Grössen

$$\sqrt{M}, \quad \sqrt{M'}, \quad \sqrt{M''}, \quad \ldots \quad \sqrt{M^{(n)}}$$

$\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen bestehen.

Jacobi hält diesen Satz für einen der wichtigsten in der ganzen Transformationstheorie, und in der That zeigen die hier folgenden Untersuchungen, wie die Einführung des Multiplicators M oder einer Grösse, welche dieselbe Eigenschaft hat wie M, das sonst so complicirte Transformationsproblem zu einem äusserst einfachen umgestaltet.

Ich werde hier aber nicht die Bezeichnungen von *Jacobi*, sondern die von Herrn *Weierstrass* benutzen, wie ich sie im zweiten Paragraphen meiner Abhandlung „Auflösung der Gleichungen fünften Grades" (dieses Journal Bd. 87 S. 118) citirt habe. In dieser Abhandlung spielte die Grösse

$$f = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)} = e^{-\frac{2\eta\omega}{5}} \sigma\left(\frac{2\omega}{5}\right) \sigma\left(\frac{4\omega}{5}\right)$$

eine grosse Rolle, indem sie den drei *Jacobi*schen Relationen genügte und eine Wurzel der Gleichung

$$f^{12} + \frac{10}{\varDelta} f^6 - \frac{12 g_2}{\varDelta^2} f^2 + \frac{5}{\varDelta^2} = 0$$

war. Ich machte schon damals (p. 120) darauf aufmerksam, dass es auch

---

*) An dieser Stelle ist M der reciproke Werth von dem, was *Jacobi* sonst unter dem Multiplicator M versteht.

für andere Werthe der Primzahl n ähnlich gebildete Grössen

$$f = e^{-\frac{\eta\omega(n^2-1)}{12n}}\sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)\dots\sigma\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)$$

giebt, welche für die Transformation n^{ten} Grades die entsprechende Bedeutung haben.

Die Einführung dieser Grössen f hat noch vor der des *Jacobi*schen Multiplicators M den Vorzug, dass die Gleichung, welcher f^2 genügt, einfacher wird als die für M. In der Gleichung für f^{-2} sind nämlich die Coefficienten sämmtlich *ganze rationale* Functionen von g_2 und g_3, während sie in der Gleichung für M *irrationale* Functionen dieser Grössen sind. Dabei ist in der Gleichung

$$f^{2n+2}+\mathfrak{g}_1 f^{2n}+\mathfrak{g}_2 f^{2n-2}+\dots+\mathfrak{g}_n f^2+\mathfrak{g}_{n+1} = 0$$

ganz allgemein

$$\mathfrak{g}_{n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}}, \quad \Delta = g_2^3-27g_3^2.$$

Die übrigen Coefficienten $\mathfrak{g}_\alpha$ kann man, wie sich zeigen wird, bis auf Zahlcoefficienten von vornherein ohne Rechnung angeben und findet, gleichfalls ohne Rechnung, dass etliche von ihnen ganz verschwinden. So kann man z. B. für $n = 11$ sofort die Gleichung

$$f^{24}+\frac{c}{\Delta^5}f^{12}+\frac{c_1 g_2}{\Delta^7}f^8+\frac{c_2 g_3}{\Delta^8}f^6+\frac{c_3 g_2^2}{\Delta^9}f^4+\frac{c_4 g_2 g_3}{\Delta^{10}}f^2-\frac{11}{\Delta^{10}} = 0$$

hinschreiben, wobei sich die Zahlcoefficienten c, c_1, c_2, c_3, c_4 sehr leicht durch Reihenentwickelungen ergeben, von denen man immer nur das erste Glied braucht.

In welcher Beziehung diese Transformationsgleichungen zur Auflösung der Gleichungen höherer Grade stehen, soll späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Hier sei nur noch hinzugefügt, dass die linearen *Jacobi*schen Relationen ebenso zwischen den Grössen

$$f^3,\ f_0^3,\ f_1^3,\ \dots\ f_{n-1}^3$$

gelten, wie sie zwischen

$$f,\ f_0,\ f_1,\ \dots\ f_{n-1}$$

selbst bestehen. Ferner führt die Darstellung von f als Quotient zweier Potenzreihen von $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ zur Auffindung allgemeinerer Grössen, die gleich-

falls die *Jacobi*schen Relationen befriedigen und in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen von Bedeutung sind. Wesentlich ist dabei, dass diese Grössen nicht nur von dem Modul der elliptischen Functionen abhängen, sondern noch einen zweiten Parameter $\wp u$ enthalten.

Es ist deshalb zu hoffen, dass diese Grössen für $n=5$ eine Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades möglich machen, die auch den von Herrn *Kronecker* gestellten Anforderungen genügt, dass nämlich nur *rationale* Functionen der Wurzeln als Hülfsgrössen benutzt werden.

§. 1. Herleitung der Grössen f.

Aus dem Additionstheorem der Functionen $\wp u$ und σu ergeben sich die Formeln

$$(1.)\qquad \wp u-\wp(2u)=\frac{3(\wp u)^4-\frac{3}{2}g_2(\wp u)^2-3g_3\wp u-\frac{1}{16}g_2^2}{4(\wp u)^3-g_2\wp u-g_3}=F(\wp u),$$

und

$$(2.)\qquad \wp u-\wp v=\frac{\sigma(v-u)\sigma(v+u)}{(\sigma u)^2(\sigma v)^2}.$$

Deshalb wird, wenn n eine Primzahl und grösser als drei ist,

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)=F\left(\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)\right)\quad=\frac{\sigma\left(\frac{6\omega}{n}\right)}{\sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)^2},$$

$$\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)-\wp\left(\frac{8\omega}{n}\right)=F\left(\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)\right)\quad=\frac{\sigma\left(\frac{12\omega}{n}\right)}{\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{8\omega}{n}\right)^2},$$

. . . .

$$\wp\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right)-\wp\left(\frac{2n-2}{n}\,\omega\right)=F\left(\wp\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right)\right)=\frac{\sigma\left(\frac{3n-3}{n}\,\omega\right)}{\sigma\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right)\sigma\left(\frac{2n-2}{n}\,\omega\right)^2}.$$

Das Product dieser Grössen

$$(3.)\quad\begin{cases} P=\prod\limits_{\alpha}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\omega}{n}\right)\right]=\prod\limits_{\alpha}F\left(\wp\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)\right)=\prod\limits_{\alpha}\frac{\sigma\left(\frac{6\alpha\omega}{n}\right)}{\sigma\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\alpha\omega}{n}\right)^2},\\ \qquad\qquad\left(\alpha=1,\ 2,\ \dots\ \frac{n-1}{2}\right),\end{cases}$$

ist daher eine *symmetrische* rationale Function der Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right),\quad \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right),\quad \dots\quad \wp\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right),$$

und deshalb die Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten *rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind. (Vergl. ***Felix Müller,*** De transformatione functionum ellipticarum, Berlin 1867.) Da nun aber P eine *ganze* rationale Function von $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$, $\wp\left(\frac{4\omega}{n}\right)$, ... $\wp\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)$ ist, so müssen die Coefficienten sogar *ganze rationale* Functionen von g_2 und g_3 sein, die in dem Sinne *homogen* sind, dass man g_2 die Dimension 2 und g_3 die Dimension 3 beilegt.

Durch passende Anwendung der Formeln

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u \quad \text{und} \quad \sigma(2\omega-u) = e^{2\eta(\omega-u)}\sigma u$$

findet man dann

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma\left(\frac{4\alpha\omega}{n}\right) = e^{\frac{\eta\omega(n^2-1)}{4n}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)$$

und

$$\prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma\left(\frac{6\alpha\omega}{n}\right) = (-1)^g e^{\frac{2\eta\omega(n^2-1)}{3n}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right),$$

wenn $n = 6g \pm 1$ ist. Setzt man dies in Gleichung (3.) ein, so wird

$$P = \frac{(-1)^g e^{\frac{\eta\omega(n^2-1)}{6n}}}{\prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)^2}.$$

Führt man also die Grösse

$$(4.) \qquad f = e^{-\frac{\eta\omega(n^2-1)}{12n}} \sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)\ldots\sigma\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)$$

ein, so ist

$$f^{-2} = (-1)^g P$$

die Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{ten}$ Grades, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

§. 2. Darstellung von f als Quotient zweier Potenzreihen von h.

Aus der Formel

$$(5.) \qquad \sigma u = \frac{2\omega}{\pi} \cdot e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{z-z^{-1}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}z^2}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu}z^{-2}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

wo $h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$, $z = e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}$ ist, folgt, wenn man $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ mit ε bezeichnet,

$$\sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right) = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\frac{2\eta\omega}{n^2}}\cdot\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-1}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

$$\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right) = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{4\cdot\frac{2\eta\omega}{n^2}}\cdot\frac{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^2}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-2}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

. . . .

$$\sigma\left(\frac{n-1}{n}\omega\right) = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\frac{2\eta\omega}{n^2}}\cdot\frac{\varepsilon^{\frac{n-1}{4}}-\varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}}{2i}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{-\frac{n-1}{2}}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

also

$$f = \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right)\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2n\nu})}{(1-h^{2\nu})^n}.$$

Da nun noch ausserdem

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right) = \sqrt{n}$$

und

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{24}}h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})$$

ist, so wird

$$(6.)\quad f = \frac{\sqrt{n}}{\Delta^{\frac{n-1}{24}}}\cdot\frac{h^{\frac{n}{12}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})}{h^{\frac{1}{12}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})} = \frac{\sqrt{n}}{\Delta^{\frac{n-1}{24}}}\cdot\frac{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}}}{\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}}.$$

Es seien nun noch $D, D_0, D_1, \ldots D_{n-1}$ die Grössen, in welche $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ bei der Transformation übergeht, dann ist

$$(7.)\quad \Delta^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) \quad\text{und}\quad D^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{n}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu}),$$

folglich ist

$$(8.)\quad f = \left(\frac{D}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{24}}.$$

§. 3. **Darstellung der übrigen Wurzeln der Transformationsgleichung.**

Die andern Wurzeln der Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades für f^2 erhält man, indem man $\frac{2\varpi}{n} = \frac{2\omega'+48r\omega}{n}$ an Stelle von $\frac{2\omega}{n}$ setzt, wobei r die Werthe 0, 1, 2, … $n-1$ annimmt. Auf diese Weise erhält man

$$f_r = e^{-\frac{\eta\varpi(n^2-1)}{12n}}\sigma\left(\frac{2\varpi}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\ldots\sigma\left(\frac{n-1}{n}\varpi\right)$$

und

$$\sigma\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{n}\right) = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\frac{2\eta(\omega'+24r\omega)^2}{n^2\omega}}\cdot\frac{h^{\frac{1}{n}}\varepsilon^{12r}-h^{-\frac{1}{n}}\varepsilon^{-12r}}{2i}$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu+\frac{2}{n}}\varepsilon^{24r}}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu-\frac{2}{n}}\varepsilon^{-24r}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

$$\sigma\left(\frac{4\omega'+96r\omega}{n}\right) = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{4\cdot\frac{2\eta(\omega'+24r\omega)^2}{n^2\omega}}\cdot\frac{h^{\frac{2}{n}}\varepsilon^{24r}-h^{-\frac{2}{n}}\varepsilon^{-24r}}{2i}$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu+\frac{4}{n}}\varepsilon^{48r}}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu-\frac{4}{n}}\varepsilon^{-48r}}{1-h^{2\nu}}\right),$$

. . . .

$$\sigma\left(\frac{(n-1)\omega'+24(n-1)r\omega}{n}\right) = \frac{2\omega}{\pi}\cdot e^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\frac{2\eta(\omega'+24r\omega)^2}{n^2\omega}}\cdot\frac{h^{\frac{n-1}{2n}}\varepsilon^{6(n-1)r}-h^{-\frac{n-1}{2n}}\varepsilon^{-6(n-1)r}}{2i}$$

$$\times\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2\nu+\frac{n-1}{n}}\varepsilon^{12(n-1)r}}{1-h^{2\nu}}\cdot\frac{1-h^{2\nu-\frac{n-1}{n}}\varepsilon^{-12(n-1)r}}{1-h^{2\nu}}\right).$$

Dies giebt nach einigen Reductionen

$$(9.)\qquad f_r = i^{\frac{n-1}{2}}\frac{\varepsilon^r h^{\frac{1}{12n}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{24r\nu})}{\varDelta^{\frac{n-1}{24}}h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})} = i^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{D_r}{\varDelta^n}\right)^{\frac{1}{24}}.$$

§. 4. Herstellung der *Jacobi*schen Relationen.

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Nenner der Grössen f, f_0, f_1, ... f_{n-1} mit

$$(10.)\qquad N = \varDelta^{\frac{n-1}{24}}h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) = \varDelta^{\frac{n-1}{24}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}},$$

so folgt

$$Nf = \sqrt{n}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}},\quad Nf_r = i^{\frac{n-1}{2}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}\varepsilon^{r(6\lambda+1)^2}h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12n}}.$$

Jetzt sei $\lambda = n\mu+\nu$, wo ν die Werthe 0, 1, 2, ... $n-1$ annimmt, dann wird $\varepsilon^{r(6\lambda+1)^2}$ gleich $\varepsilon^{r(6\nu+1)^2}$, und da unter den Zahlen

$$1,\quad 6.1+1,\quad 6.2+1,\quad \ldots\quad 6(n-1)+1$$

nur *eine* congruent 0 modulo n sein kann, nämlich für $\nu = \pm g$, wenn $n = 6g\pm1$ ist, so wird nur $\varepsilon^{r(\pm 6g+1)^2} = 1$, sobald r von Null verschieden ist.

Deshalb fallen in $\sum\limits_{r=0}^{n-1} Nf_r$ alle Glieder fort, bei denen ν von $\pm g$ verschieden ist, und man erhält

$$\sum_{r=0}^{n-1} Nf_r = i^{\frac{n-1}{2}}.n \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n\mu\pm g} h^{\frac{(6n\mu\pm 6g+1)^2}{12n}} = i^{\frac{n-1}{2}}.n.(-1)^g \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu h^{\frac{n(6\mu\pm 1)^2}{12}}.$$

Für das obere Zeichen wird unmittelbar

$$\sum_{r=0}^{n-1} Nf_r = (-1)^g i^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n} Nf,$$

und ebenso für das untere Zeichen, wenn man den Summationsbuchstaben μ mit $-\lambda$ vertauscht. Dies giebt also die Relation

$$(11.) \qquad f_0+f_1+f_2+\cdots+f_{n-1} = (-1)^g f \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}.$$

Jetzt seien $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\frac{n-1}{2}}$ die quadratischen *Nichtreste* von n, dann ist $\varepsilon^{r[(6\lambda+1)^2-\beta]}$ sicher von 1 verschieden für $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\frac{n-1}{2}}$, so lange r nicht Null ist, was auch λ sein mag, und man erhält daher

$$\sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon^{-r\beta} f_r = 0,$$

oder

$$(12.) \qquad f_0+\varepsilon^{-\beta} f_1+\varepsilon^{-2\beta} f_2+\cdots+\varepsilon^{-(n-1)\beta} f_{n-1} = 0.$$

Zwischen den Grössen $f, f_0, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ bestehen also $\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen.

Ebenso bestehen aber auch $\frac{n+1}{2}$ *lineare* Relationen zwischen den dritten Potenzen dieser Grössen, also zwischen $f^3, f_0^3, f_1^3, f_2^3, \ldots f_{n-1}^3$.

Es ist nämlich

$$N^3 f^3 = n\sqrt{n}\, h^{\frac{n}{4}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2n\nu})^3 = n\sqrt{n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda (2\lambda+1) h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}},$$

$$N^3 f_r^3 = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{3r} h^{\frac{1}{4n}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24r})^3 = (-i)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda (2\lambda+1) \varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4n}}.$$

Nur für $\lambda \equiv \frac{n-1}{2}$ modulo n wird $\varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2}$ gleich 1, sobald r von Null verschieden ist; deshalb heben sich in $\sum\limits_{r=0}^{n-1} N^3 f_r^3$ alle Glieder fort, bei denen λ nicht die Form $n\mu+\frac{n-1}{2}$ hat, und es wird

$$\sum_{r=0}^{n-1} N^3 f_r^3 = (-i)^{\frac{n-1}{2}} n \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{n\mu+\frac{n-1}{2}} (2n\mu+n) h^{\frac{(2n\mu+n)^2}{4n}}$$

$$= i^{\frac{n-1}{2}} n^2 \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu (2\mu+1) h^{\frac{n(2\mu+1)^2}{4}} = i^{\frac{n-1}{2}} N^3 f^3 \sqrt{n},$$

oder

$$(13.)\qquad f_0^3+f_1^3+f_2^3+\cdots+f_{n-1}^3 = f^3\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}.$$

Sind nun wieder $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\frac{n-1}{2}}$ die quadratischen *Nichtreste* von n, so ist $\varepsilon^{3r[(2\lambda+1)^2-\beta]}$, wenn r nicht Null ist, sicher von 1 verschieden, was auch λ sein mag, und deshalb wird

$$(14.)\qquad \sum_{r=0}^{n-1}\varepsilon^{-3r\beta}f_r^3 = 0.$$

Dies giebt also im Ganzen $\frac{n+1}{2}$ lineare Relationen zwischen

$$f^3,\ f_0^3,\ f_1^3,\ f_2^3,\ \ldots\ f_{n-1}^3.$$

Herr *Brioschi* hat in seinem soeben erschienenen Aufsatze: Sopra una classe di equazioni modulari (Annali di Matematica. Serie II. Tomo IX. p. 167 bis 172) versucht, die Coefficienten der Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades zu berechnen, wenn zwischen den $n+1$ Wurzeln $n+1$ Relationen dieser Art bestehen, und hat die Berechnung für $n=5$, 7 und theilweise auch für $n=11$ durchgeführt.

§. 5. Aufstellung der Transformationsgleichung *).

Die Grössen $f^2, f_0^2, f_1^2, \ldots f_{n-1}^2$ sind die Wurzeln einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Form man jetzt unmittelbar bestimmen kann.

Das constante Glied ist zunächst

$$f^2.f_0^2.f_1^2\ldots f_{n-1}^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{nh^{\frac{n+1}{6}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})^2\prod\limits_{\mu=1}^{\infty}{}'(1-h^{2\mu})^2\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{2n}}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}h^{\frac{n+1}{6}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{2n+2}},$$

wo der Strich bei dem mittelsten Π andeutet, dass μ nur die Werthe annehmen darf, die nicht durch n theilbar sind; desshalb ist

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})^2\prod_{\mu=1}^{\infty}{}'(1-h^{2\mu})^2 = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2,$$

also

$$(15.)\qquad f^2.f_0^2.f_1^2\ldots f_{n-1}^2 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}}.$$

---

*) Herr *Klein*, mit dem ich über meine Untersuchungen correspondirt habe, hat auf ganz anderem Wege ähnliche Resultate, wie sie dieser Paragraph enthält, gefunden, und es gebührt ihm sogar, was die praktische Ausführung für $n=5, 7, 11, 13$ betrifft, die Priorität. Die hier angegebenen Methoden habe ich selbständig gefunden, bin aber Herrn *Klein* für mehrfache Anregung zu Dank verpflichtet.

Auch die übrigen Coefficienten der Gleichung für f^2 kann man jetzt sehr leicht finden. Man weiss nämlich, dass f^{-2} einer Gleichung genügt, deren Coefficienten *ganze* rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Die Coefficienten in der Gleichung für f^2 müssen daher gleichfalls *ganze* rationale Functionen von g_2 und g_3 sein, dividirt durch eine Potenz von Δ, deren Exponent eine *ganze* Zahl ist. Diesen Exponenten kann man aber von vorn herein bestimmen, wenn man beachtet, dass

$$f^2 = \left(\frac{D}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{12}} = \frac{nh^{\frac{n}{6}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})^2}{\Delta^{\frac{n-1}{12}}h^{\frac{1}{6}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2}, \quad f_r^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{D_r}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{12}} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{2r}h^{\frac{1}{6n}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{\frac{2\nu}{n}}\varepsilon^{24r\nu})^2}{\Delta^{\frac{n-1}{12}}h^{\frac{1}{6}}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2},$$

$$(7.) \qquad \Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\pi}{\omega}\cdot h^{\frac{1}{6}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2$$

ist. Nennt man nun die Coefficienten der Gleichung für f^2

$$\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_3,\ \dots\ \mathfrak{g}_n,\ \mathfrak{g}_{n+1},$$

so ist also

$$(15^a.) \qquad \mathfrak{g}_{n+1} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}},$$

während bei dem Nenner von $\mathfrak{g}_\alpha$ der Exponent von Δ nothwendiger Weise zwischen

$$\frac{\alpha(n-1)}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha n}{12}$$

liegen muss. Da aber dieser Exponent eine *ganze* Zahl ist, so wird $\mathfrak{g}_\alpha$ gleich Null, wenn zwischen $\frac{\alpha(n-1)}{12}$ und $\frac{\alpha n}{12}$ keine ganze Zahl liegt. So sind z. B. für $n = 5$

$$\mathfrak{g}_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_2 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 = 0,$$

weil zwischen 4 und 5, 8 und 10, 16 und 20 kein Vielfaches von 12 liegt. Die Transformationsgleichung hat daher für $n = 5$ die Form

$$f^{12} + \frac{a}{\Delta}f^6 + \frac{b}{\Delta^2}f^2 + \frac{5}{\Delta^2} = 0,$$

wo a und b noch ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Ebenso einfach findet man für $n = 7$ die Form

$$f^{16} + \frac{a}{\Delta}f^{12} + \frac{b}{\Delta^2}f^8 + \frac{c}{\Delta^3}f^4 + \frac{d}{\Delta^4}f^2 - \frac{7}{\Delta^4} = 0,$$

und für $n = 11$

$$f^{24}+\frac{a}{\Delta^5}f^{12}+\frac{b}{\Delta^6}f^{10}+\frac{c}{\Delta^7}f^8+\frac{d}{\Delta^8}f^6+\frac{e}{\Delta^9}f^4+\frac{g}{\Delta^{10}}f^2-\frac{11}{\Delta^{10}} = 0,$$

wo a, b, c, d, e, g *ganze* rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Um die Zähler der Coefficienten $\mathfrak{g}_\alpha$ zu berechnen, bestimme man zunächst ihre Dimension, die unmittelbar aus

$$f^2 = \left(\frac{D}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{12}} \quad \text{und} \quad f_r^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{D_r}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{12}}$$

folgt. Sind nämlich die Grössen g_2, g_3 und $\Delta = g_2^3-27g_3^2$ bezüglich Grössen von der zweiten, dritten und sechsten Dimension, so ist f^2 von der Dimension $-\frac{n-1}{2}$ und $\mathfrak{g}_\alpha$ von der Dimension $-\alpha\cdot\frac{n-1}{2}$. Da nun aber in $\mathfrak{g}_\alpha$ die Dimension des Nenners zwischen $\alpha\cdot\frac{n-1}{2}$ und $\frac{\alpha n}{2}$ liegt, so hat der Zähler

die Dimension 0, wenn $\alpha(n-1)$ ein Vielfaches von 12 ist, $\left(\mathfrak{g}_\alpha = \frac{c}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)}{12}}}\right)$,

" " 1, " $\alpha(n-1)+2$ " " " 12 " , $(\mathfrak{g}_\alpha = 0)$,

" " 2, " $\alpha(n-1)+4$ " " " 12 " , $\left(\mathfrak{g}_\alpha = \frac{cg_2}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)+4}{12}}}\right)$,

" " 3, " $\alpha(n-1)+6$ " " " 12 " , $\left(\mathfrak{g}_\alpha = \frac{cg_3}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)+6}{12}}}\right)$,

. . . .

" " $\frac{\alpha}{2}$, " $\alpha(n-1)+\alpha = \alpha n$ ein Vielfaches von 12 ist,

wo unter c nur ein Zahlcoefficient zu verstehen ist.

Daraus folgt zunächst noch, dass alle $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ sind, für welche $\alpha(n-1)+2$ ein Vielfaches von 12 ist, weil sich die erste Dimension nicht als ganze rationale Function von g_2 und g_3 darstellen lässt.

Die Transformationsgleichungen für $n = 5, 7, 11$ sind daher bezüglich

$$f^{12}+\frac{c}{\Delta}f^6+\frac{c_1g_2}{\Delta^2}f^2+\frac{5}{\Delta^2} = 0,$$

$$f^{16}+\frac{c}{\Delta}f^{12}+\frac{c_1}{\Delta^2}f^8+\frac{c_2}{\Delta^3}f^4+\frac{c_3g_3}{\Delta^4}f^2-\frac{7}{\Delta^4} = 0,$$

$$f^{24}+\frac{c}{\Delta^5}f^{12}+\frac{c_1g_2}{\Delta^7}f^8+\frac{c_2g_3}{\Delta^8}f^6+\frac{c_3g_2^2}{\Delta^9}f^4+\frac{c_4g_2g_3}{\Delta^{10}}f^2-\frac{11}{\Delta^{10}} = 0,$$

wo also die Grössen c nur Zahlcoefficienten sind.

In dieser Weise kann man die Form der Transformationsgleichungen fast ganz ohne Rechnung finden, und es bleibt nur noch die Bestimmung der Zahlcoefficienten c übrig, die aber auch sehr leicht ausgeführt werden kann. Es hat nämlich

$$s_\alpha = f^{2\alpha} + f_0^{2\alpha} + f_1^{2\alpha} + \cdots + f_{n-1}^{2\alpha} = \Sigma f^{2\alpha}$$

denselben Nenner wie $\mathfrak{g}_\alpha$, während sich der Zähler nach Potenzen von h entwickeln lässt. Von dieser Entwickelung braucht man im Allgemeinen nur das erste Glied, denn der Zähler von $\mathfrak{g}_\alpha$ lässt sich gleichfalls nach Potenzen von h entwickeln, weil

$$(16.)\quad \begin{cases} g_2 = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20(h^2 + 9h^4 + 28h^6 + 73h^8 + 126h^{10} + 252h^{12} + 344h^{14} + \cdots)\right], \\ g_3 = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^6 \left[\frac{1}{216} + \frac{7}{3}(-h^2 - 33h^4 - 244h^6 - 1057h^8 \right. \\ \qquad\qquad \left. - 3126h^{10} - 8052h^{12} - 16808h^{14} - \cdots)\right], \\ \Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\pi}{\omega} \cdot h^{\frac{1}{6}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu})^2 = \frac{\pi}{\omega} \cdot h^{\frac{1}{6}} (1 - h^2 - h^4 + h^{10} + h^{14} - h^{24} - h^{30} + h^{44} + h^{52} - \cdots)^2 \end{cases}$$

ist. Durch Vergleichung der *ersten* Glieder findet man dann successive die Zahlcoefficienten c. Nur wenn zwischen $\alpha(n-1)$ und αn mehr als *ein* Vielfaches von 12 liegt, braucht man auch mehr Glieder der Entwickelung. Dieser Fall kann aber nur eintreten, wenn $\alpha \gtreqless 12$ ist.

Für $n = 5$ hat man z. B.

$$s_3 = -\frac{3c}{\Delta}, \quad s_5 = -\frac{5c_1 g_2}{\Delta^2}.$$

Bildet man nun die Summe der Zähler von

$$f^6 = \frac{5^3 h^{\frac{5}{2}} \Pi(1-h^{10\nu})^6}{\Delta h^{\frac{1}{2}} \Pi(1-h^{2\nu})^6} \quad \text{und} \quad f_r^6 = \frac{\varepsilon^{6r} h^{\frac{1}{10}} \Pi(1-h^{\frac{2\nu}{5}} \varepsilon^{24r\nu})^6}{\Delta h^{\frac{1}{2}} \Pi(1-h^{2\nu})^6},$$

so muss diese offenbar durch $h^{\frac{1}{2}} \Pi(1-h^{2\nu})^6$ theilbar sein und beginnt mit $-30h^{\frac{1}{2}}$, folglich ist

$$-3c = -30 \quad \text{und} \quad c = 10.$$

Ebenso muss die Summe der Zähler von den Grössen f^{10} durch $h^{\frac{1}{6}} \Pi(1-h^{2\nu})^2$ theilbar sein und beginnt mit $5h^{\frac{1}{6}}$, während die Entwickelung von $-5c_1 g_2$ mit $-5c_1\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4 \frac{1}{12}$ beginnt, folglich ist

$$c_1 = -12$$

und die Transformationsgleichung für $n = 5$ wird

$$(17.)\qquad f^{12}+\frac{10}{\Delta}f^{6}-\frac{12g_2}{\Delta^2}f^{2}+\frac{5}{\Delta^2} = 0.$$

Für $n = 7$ ist

$$f^{16}+\frac{c}{\Delta}f^{12}+\frac{c_1}{\Delta^2}f^{8}+\frac{c_2}{\Delta^3}f^{4}+\frac{c_3g_3}{\Delta^4}f^{2}-\frac{7}{\Delta^4} = 0.$$

Hier wird also

$$s_2 = -\frac{2c}{\Delta},\quad s_4 = -\frac{c}{\Delta}s_2-\frac{4c_1}{\Delta^2};\quad s_6 = -\frac{c}{\Delta}s_4-\frac{c_1}{\Delta^2}s_2-\frac{6c_2}{\Delta^3},\quad s_7 = -\frac{7c_3g_3}{\Delta^4}.$$

Die Zählersumme in s_2 muss durch $h^{\frac{1}{3}}\Pi(1-h^{2\nu})^4$ theilbar sein und beginnt mit $-28h^{\frac{1}{3}}$, folglich ist

$$c = 14,\quad s_2 = -\frac{28}{\Delta}.$$

Die Zählersumme in s_4 muss theilbar sein durch $h^{\frac{2}{3}}\Pi(1-h^{2\nu})^8$ und beginnt mit $140h^{\frac{2}{3}}$, also ist

$$140 = 14.28-4c_1\quad\text{oder}\quad c_1 = 7.9,\quad s_4 = \frac{140}{\Delta^2}.$$

Die Zählersumme in s_6 muss theilbar sein durch $h\Pi(1-h^{2\nu})^{12}$ und beginnt mit $-7.88h$, also ist

$$-7.88 = -7.280+7.252-6c_2\quad\text{oder}\quad c_2 = 7.10.$$

Die Zählersumme in s_7 endlich muss theilbar sein durch $h^{\frac{1}{6}}\Pi(1-h^{2\nu})^2$ und beginnt mit $-7h^{\frac{1}{6}}$, während die Entwickelung von $-7c_3g_3$ mit $-7c_3\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^6\cdot\frac{1}{216}$ beginnt, folglich ist

$$c_3 = 216$$

und die Transformationsgleichung für $n = 7$ wird

$$(18.)\qquad f^{16}+\frac{14}{\Delta}f^{12}+\frac{63}{\Delta^2}f^{8}+\frac{70}{\Delta^3}f^{4}+\frac{216g_3}{\Delta^4}f^{2}-\frac{7}{\Delta^4} = 0.$$

Ganz ebenso einfach gestaltet sich die Rechnung für $n = 11$ mit dem einzigen Unterschiede, dass da nicht vier sondern fünf Zahlcoefficienten zu berechnen sind. So findet man dann

$$(19.)\qquad \begin{cases} f^{24}+11\left[-\frac{90}{\Delta^5}f^{12}+\frac{40.12g_2}{\Delta^7}f^{8}+\frac{15.216g_3}{\Delta^8}f^{6}\right. \\ \left.+\frac{2.(12g_2)^2}{\Delta^9}f^{4}\right]+\frac{12g_2.216g_3}{\Delta^{10}}f^{2}-\frac{11}{\Delta^{10}} = 0. \end{cases}$$

§. 6. **Bildung anderer Grössen, welche den *Jacobi*schen Relationen genügen.**

Es war

$$\Delta^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}.$$

Die Ausdrücke, welche hieraus durch Transformation n^{ten} Grades entstehen, nämlich

$$D^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}}, \quad D_r^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12n}}$$

genügen den *Jacobi*schen Relationen, wie sich unmittelbar aus der Form dieser Summen ergab. Es liegt nahe, ähnliche Summen zu bilden, und zu untersuchen, ob sie nach ausgeführter Transformation $n+1$ Grössen liefern, welche gleichfalls die *Jacobi*schen Relationen befriedigen. Dies ist in der That der Fall bei den Grössen

$$(20.)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{e_2-e_3} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} h^{\frac{\lambda^2}{4}}, \quad \sqrt[4]{e_1-e_3} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} h^{\lambda^2}, \\ \sqrt[4]{e_1-e_2} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\lambda^2}. \end{cases}$$

Diese Beispiele haben besonderes Interesse, weil gerade diese Ausdrücke häufig vorkommen, und weil die Verbindungen wie

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} + \sqrt[4]{e_1-e_2} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} h^{(2\lambda)^2} \text{ und } \sqrt[4]{e_1-e_3} - \sqrt[4]{e_1-e_2} = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} h^{(2\lambda+1)^2}$$

noch dieselbe Eigenschaft behalten.

Auch der *Jacobi*sche Multiplicator M gehört hierher, denn es ist

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{[\sin\operatorname{coam} 2\omega . \sin\operatorname{coam} 4\omega \ldots \sin\operatorname{coam}(n-1)\omega]^2}{[\sin\operatorname{am} 2\omega . \sin\operatorname{am} 4\omega \ldots \sin\operatorname{am}(n-1)\omega]^2},$$

wo $\omega = \frac{K}{n}$ sein möge. Durch Anwendung der Productformeln findet man dann

$$\frac{\sin\operatorname{coam} u}{\sin\operatorname{am} u} = \frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}} i \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2\nu}z^2)(1+h^{2\nu}z^{-2})(1-h^{2\nu-1}z^2)(1-h^{2\nu-1}z^{-2})}{(1-h^{2\nu}z^2)(1-h^{2\nu}z^{-2})(1+h^{2\nu-1}z^2)(1+h^{2\nu-1}z^{-2})},$$

also

$$M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1+h^{2n\nu})^2(1-h^{(2\nu-1)n})^2(1-h^{2\nu})^2(1+h^{2\nu-1})^2}{(1+h^{2\nu})^2(1-h^{2\nu-1})^2(1-h^{2n\nu})^2(1+h^{(2\nu-1)n})^2}.$$

Da nun aber

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+h^{2\nu})(1-h^{2\nu-1})(1+h^{2\nu-1}) = 1,$$

so wird

$$(21.)\qquad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2\nu})^2(1+h^{2\nu-1})^4}{(1-h^{2n\nu})^2(1+h^{n(2\nu-1)})^4}.$$

Nun ist noch

$$\sqrt[4]{e_1-e_3} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu-1})^2$$

und

$$\sqrt[4]{\bar{e}_1-\bar{e}_3} = \left(\frac{n\pi}{2\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})(1+h^{n(2\nu-1)})^2,$$

wo $\bar{e}_1$ und $\bar{e}_3$ zu der transformirten Function gehören, also ist

$$(22.)\qquad i^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sqrt[4]{\bar{e}_1-\bar{e}_3}}{\sqrt[4]{e_1-e_3}} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2n\nu})(1+h^{n(2\nu-1)})^2}{(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

die Grösse, für welche *Jacobi* zuerst seine Behauptung ausgesprochen hat.

Man kann aber fragen, welches die allgemeinste Form sei von einer solchen Potenzsumme der Grösse h, damit die Potenzsummen, die aus ihr durch Transformation hergeleitet werden können, den *Jacobi*schen Relationen genügen. Zunächst sei

$$(23.)\qquad \Phi = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}h^{\frac{(a\lambda+b)^2}{c}}$$

und

$$(24.)\qquad F = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}h^{\frac{n(a\lambda+b)^2}{c}},\qquad F_r = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}\varepsilon^{r(a\lambda+b)^2}h^{\frac{(a\lambda+b)^2}{cn}}$$

$$(r = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n-1).$$

Hierbei sind a und c ganz beliebige Zahlen, während man b so bestimmen muss, dass $bn = ag\pm b$ ist, dann wird nämlich

$$\sum_{r=0}^{n-1}F_r = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.n\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}h^{\frac{(an\mu\pm ag+b)^2}{cn}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}n\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}h^{\frac{n(\pm a\mu+b)^2}{c}}$$

also

$$(25.)\qquad F_0+F_1+F_2+\dots+F_{n-1} = F\sqrt{n},$$

und

$$(26.)\qquad F_0+\varepsilon^{-\beta}F_1+\varepsilon^{-2\beta}F_2+\dots+\varepsilon^{-(n-1)\beta}F_{n-1} = 0.$$

Dies ist aber noch nicht die allgemeinste Form einer solchen Potenzsumme Φ, sondern man kann die einzelnen Glieder noch mit passenden Coefficienten multipliciren, wie es auch in den bisher angeführten Beispielen bereits geschehen ist, wo die Factoren $(-1)^\lambda$ oder $(-1)^\lambda(a\lambda+b)$ hinzutraten. Man kann darin aber noch viel weiter gehen, und kann die einzelnen Glieder

jener Summe sogar mit passend gewählten Functionen eines neuen Parameters u multipliciren. Einige Beispiele werden darüber die beste Auskunft geben.

Es war

$$\Delta^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}, \quad D^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}}, \quad f = \left(\frac{D}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{24}}.$$

Dem entsprechend sei

$$(27.) \qquad \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos(6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega},$$

$$(28.) \qquad \begin{cases} F(u) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{n(6\lambda+1)^2}{12}} \cos(6\lambda+1)\frac{nu\pi}{2\omega}, \\ F_r(u) = i^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} \varepsilon^{r(6\lambda+1)^2} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12n}} \cos(6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \end{cases}$$

wobei noch

$$\Phi(0) = \Delta^{\frac{1}{24}}, \quad F(0) = D^{\frac{1}{24}}, \quad F_r(0) = i^{\frac{n-1}{2}} D_r^{\frac{1}{24}}.$$

Jetzt kann man aber wie früher beweisen, dass

$$(29.) \qquad \sum_{r=0}^{n-1} F_r(u) = F(u)\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n} \quad \text{und} \quad \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon^{-r\beta} F_r(u) = 0.$$

Setzt man nun noch

$$(30.) \qquad f(u) = \frac{F(u)}{\Phi(u)^n}, \quad f_r(u) = \frac{F_r(u)}{\Phi(u)^n},$$

so bleiben diese Relationen bestehen, und es werden $f(u)$, $f_0(u)$, ... $f_{n-1}(u)$ doppeltperiodische Functionen von u, denn man findet ohne Weiteres

$$f(u+2\omega) = f(u), \quad f(u+2\omega') = f(u); \quad f_r(u+2\omega) = f_r(u), \quad f_r(u+2\omega') = f(u).$$

Aus dem Umstande, dass $\Phi(u)$ nur für

$$u \equiv \omega, \quad u \equiv \omega', \quad u \equiv \omega+\omega'$$

verschwindet, findet man dann leicht

$$(31.) \quad \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}).e^{\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1(u).\sigma_2(u).\sigma_3(u) = \Delta^{\frac{1}{24}}.e^{\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)$$

und erkennt, wie sich $f(u)$ als Function von $\wp u$ darstellen lässt.

Ein zweites Beispiel folgt aus dem Ausdruck für f^3, es war nämlich

$$\varDelta^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{4}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^3 = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{\lambda=0}^{+\infty}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)\, h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}},$$

$$D^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{\lambda=0}^{+\infty}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)\, h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}}, \quad f^3 = \left(\frac{D}{\varDelta^n}\right)^{\frac{1}{8}};\ .$$

dem entsprechend kann man bilden

$$(32.)\quad \begin{cases} \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)\, h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \cos(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \\ F(u) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)\, h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}} \cos(2\lambda+1)\frac{nu\pi}{2\omega}, \\ F_r(u) = (-i)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)\, \varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4n}} \cos(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}. \end{cases}$$

Auch hier sind

$$f(u) = \frac{F(u)}{\Phi(u)^n} \quad \text{und} \quad f_r(u) = \frac{F_r(u)}{\Phi(u)^n}$$

doppeltperiodische Functionen, die den *Jacobi*schen Relationen genügen.

Man hätte auch die einzelnen Glieder in $\varDelta^{\frac{1}{8}}$ mit $\frac{2\omega}{\pi}\cdot\frac{\sin(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}}{2\lambda+1}$ multipliciren können und hätte erhalten

$$(33.)\quad \begin{cases} \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.2\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \sin(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega} = \varDelta^{\frac{1}{8}}.e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma(u), \\ F(u) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.2\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda} h^{\frac{n(2\lambda+1)^2}{4}} \sin(2\lambda+1)\frac{nu\pi}{2\omega} = D^{\frac{1}{8}}.e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\omega}}\bar{\sigma}(u), \\ F_r(u) = (-i)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}.2\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\varepsilon^{3r(2\lambda+1)^2} h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4n}} \sin(2\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}, \end{cases}$$

wobei die Formeln (32.) aus (33.) durch Differentiation entstehen. Jetzt genügen wieder

$$(34.)\quad f(u) = \frac{F(u)}{\Phi(u)^n} \quad \text{und} \quad f_r(u) = \frac{F_r(u)}{\Phi(u)^n},$$

den *Jacobi*schen Relationen, und es wird

$$(35.)\quad f(u) = f^3.\prod_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\wp(u)-\wp\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right)\right].$$

Es ist leicht zu übersehen, wie man noch unendlich viele derartige Ausdrücke bilden kann; ich habe aber das letzte Beispiel besonders hervorgehoben, weil es für $n = 5$ mit einem Ausdruck übereinstimmt, auf den

mich Herr *Weierstrass* schon vor einigen Jahren aufmerksam machte, indem er mich sogar veranlasste, die Gleichung auszurechnen, der

$$f(u) = \frac{\left(\wp u - \wp\left(\frac{2\omega}{5}\right)\right)\left(\wp u - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)\right)}{\left(\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)\right)^2}$$

genügt. Diese Gleichung hat bekanntlich die Form

$$(36.) \qquad (x^2+a)^5(x^2+5a)+10b(x^2+a)^3+4c(x^2+a)+5b^2-4ac = 0,$$

und man erhält in diesem Falle

$$(37.) \quad \begin{cases} 4\Delta a = \wp' u \wp''' u - (\wp'' u)^2, \quad \Delta^3 . b = (\wp' u)^8 - \Delta a (\wp' u)^4 \wp'' u, \\ 4\Delta^6 c = -(216\wp'^{16}+\wp'^{12}\wp''')\wp''+(774\wp'^{12}+2\wp'^8\wp''^3)\Delta a \wp''^2 \\ \qquad -(81\wp'^{12}+1030\wp'^8\wp''^3+\wp'^4\wp''^6)\Delta^2 a^2+(160\wp'^8+600\wp'^4\wp''^3)\Delta^3 a^3 \wp'' \\ \qquad -(80\wp'^4+128\wp''^3)\Delta^4 a^4 \wp''^2. \end{cases}$$

Herr *Weierstrass* hoffte, diese Resolvente zur Auflösung der *allgemeinen* Gleichungen fünften Grades verwenden zu können, es scheint dabei aber die Auflösung einer Hülfs-Gleichung vierten Grades unvermeidlich zu sein, wenn man jenes Ziel erreichen will.

Vielleicht ist eine der andern Functionen $f(u)$ zu diesem Zwecke besser zu gebrauchen.

Darmstadt, im Januar 1879.

Während des Druckes habe ich die angegebenen Methoden benutzt, um noch die Transformationsgleichungen für $n = 13$, 17 und 19 zu berechnen. Sie lauten

für $n = 13$

$$\begin{gathered} \Delta^{14} f^{28}+13[2\Delta^{13} f^{26}+25\Delta^{12} f^{24}+196\Delta^{11} f^{22}+1064\Delta^{10} f^{20}+4180\Delta^9 f^{18}+12086\Delta^8 f^{16} \\ +25660\Delta^7 f^{14}+39182\Delta^6 f^{12}+41140\Delta^5 f^{10}+27272\Delta^4 f^8+9604\Delta^3 f^6+1165\Delta^2 f^4] \\ +\{(-12g_2)^3+746\Delta\} f^2+13 = 0, \end{gathered}$$

für $n = 17$

$$\begin{gathered} \Delta^{24} f^{36}+17[10\Delta^{20} f^{30}+2.12g_2\Delta^{17} f^{26}+751\Delta^{16} f^{24}+184.12g_2\Delta^{13} f^{20}+25740\Delta^{12} f^{18} \\ +17.(12g_2)^2\Delta^{10} f^{16}+8780.12g_2\Delta^9 f^{14}+323903\Delta^8 f^{12}-1474.(12g_2)^2\Delta^6 f^{10} \\ +99128.12g_2\Delta^5 f^8+\{20(12g_2)^3-592310\Delta\}\Delta^3 f^6+481.(12g_2)^2\Delta^2 f^4] \\ +\{-(12g_2)^4+994.12g_2\Delta\} f^2+17 = 0, \end{gathered}$$

und für $n = 19$

$$\begin{aligned}
&\Delta^{30} f^{40} + 19[-4\Delta^{27} f^{36} + 138\Delta^{24} f^{32} - 2926\Delta^{21} f^{28} - 2.216 g_3 \Delta^{19} f^{26} + 41035\Delta^{18} f^{24} \\
&+ 237.216 g_3 \Delta^{16} f^{22} - 359820\Delta^{15} f^{20} - 7410.216 g_3 \Delta^{13} f^{18} + 1743935\Delta^{12} f^{16} \\
&+ 85414.216 g_3 \Delta^{10} f^{14} + \{13.(216 g_3)^2 - 4798430\Delta\}\Delta^8 f^{12} - 317802.216 g_3 \Delta^7 f^{10} \\
&+ \{306(216 g_3)^2 + 16921266\Delta\}\Delta^5 f^8 + 148629.216 g_3 \Delta^4 f^6 \\
&+ \{185.(216 g_3)^2 + 422140\Delta\}\Delta^2 f^4] + \{(216 g_3)^3 + 1474.216 g_3 \Delta\} f^2 - 19 = 0.
\end{aligned}$$

Wie sich diese Gleichungen für singuläre Moduln in Factoren zerlegen lassen, soll in einer späteren Abhandlung gezeigt werden.

Darmstadt, im Februar 1879.

Note sur une propriété des équations dont toutes les racines sont réelles.

(Par M. *J. J. Sylvester* à Baltimore.)

---

1. Soit f une forme binaire $(a, b, c, \dots l \between x, y)^l$, φ un covariant de f de l'ordre ε et $F(a, b, c, \dots l)$ le coefficient de x^ε dans φ. Supposons que si dans la forme f on remplace y par $y - \frac{Y}{X} x$, les coefficients $a, b, c, \dots l$ se changent en $a', b', c', \dots l'$. Cela posé, si dans le covariant φ on remplace y, x par Y, X, on sait que φ se change en $X^\varepsilon F(a', b', c', \dots l')$.

2. Soit $(a_0, a_1, \dots a_{2\varepsilon} \between x, y)^{2\varepsilon}$ une forme binaire qui a toutes ses racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\varepsilon}$ (c. à. d. les valeurs de $\frac{y}{x}$, qui font évanouir la forme) réelles, et soit

$$(1.)\qquad (-1)^\varepsilon \left\{ a_0 a_{2\varepsilon} - 2\varepsilon . a_1 a_{2\varepsilon-1} + \frac{2\varepsilon(2\varepsilon-1)}{2} a_2 a_{2\varepsilon-2} - \cdots \right\}$$

son invariant quadratique dont le signe est fixé de sorte que son dernier terme proportional à a_ε^2 ait le signe positif. Cet invariant divisé par le carré de $a_{2\varepsilon}$ peut d'ailleurs, comme on sait, être présenté (à un facteur numérique près) sous la forme d'une somme de produits tels que

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \dots (\alpha_{2\varepsilon-1} - \alpha_{2\varepsilon})^2,$$

par conséquent cet invariant est positif pour les formes à racines réelles.

Considérons à present la forme binaire $(a_0, a_1, \dots a_{2\varepsilon} \dots a_{2\varepsilon+\eta} \between x, y)^{2\varepsilon+\eta}$ de l'ordre $2\varepsilon + \eta$, qui ait également toutes ses racines réelles, alors l'expression (1.) formée par rapport aux coefficients de la nouvelle forme gardera son signe positif, car en différentiant η fois de suite la nouvelle forme on retombe sur la forme binaire de l'ordre 2ε d'où l'on est parti.

3. Remplaçons dans f la variable y par $y - \frac{Y}{X} x$ et supposons que Y, X soient des quantités réelles. Cette substitution ne changera en rien

le caractère de la forme f relatif à la réalité de ses racines. Donc en combinant les deux observations précédentes on en conclut le résultat suivant:

Soit f une forme binaire qui a toutes ses racines réelles et φ un de ses covariants du second degré dans les coefficients, φ sera d'un signe invariable, c. à. d. ***si toutes les racines de f sont réelles, toutes les racines de tous les quadricovariants*** (c. à. d. des covariants du second degré) ***de f sont imaginaires.***

Baltimore, décembre 1878.

Postscriptum.

M. *Schramm*, dans un mémoire inséré dans les „Annali di Matematica“ année 1867, avait déjà remarqué la propriété démontrée plus haut pour le cas du *Hessien* en se servant des fonctions covariantives en x, y, qu'il a démontré pouvoir remplacer les fonctions de *Sturm* en ce qui regarde la détermination du ***nombre total*** des racines réelles d'une équation.

M. *Schramm* a obtenu ces formules par une certaine transformation opérée sur celles qui portent mon nom; mais on peut les obtenir immédiatement en se servant de la loi d'inertie pour les formes quadratiques.

En supposant que $f(x) = 0$ est une équation algébrique dont les racines sont e_1, e_2, ... e_n, en écrivant

$$\Phi = \sum_{i=n}^{i=1} (\varphi_1 e_i u_0 + \varphi_2 e_i u_1 + \cdots + \varphi_n e_i u_n)^2$$

où φ_1, φ_2, ... φ_n sont des fonctions rationnelles quelconques, on voit très facilement que l'inertie de Φ est égale à $n-2\nu$, ν étant le nombre de ***paires*** de racines imaginaires. Si l'on pose

$$\varphi_1 e = 1,\ \varphi_2 e = e,\ \ldots\ \varphi_n e = e^{n-1},$$

la fonction quadratique Φ aura pour déterminant l'expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_n & {}_1 s_{n-2} & s_{n-3} & \ldots s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

De plus en considérant les mineurs successifs

$$s_0 \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \Delta$$

on sait que le nombre de permanences de signes dans cette série exprimera l'inertie de φ, c. à. d. sera égal à $n-2\nu$.

Comme on a d'ailleurs

$$s_0 = n, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \Sigma(e_1-e_2)^2, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \Sigma(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2, \quad \ldots$$

on déduit immédiatement de là la règle de *Sturm* pour le nombre total des racines réelles et imaginaires.

Si au lieu de poser $\varphi_i e = e^{i-1}$ on posait $\varphi_i e = \frac{1}{(\lambda-e)^{i-1}}$, λ étant une constante réelle quelconque, on obtiendrait de même une série de termes où le nombre de permanences serait encore égal à $n-2\nu$.

En multipliant ces termes respectivement par des puissances paires d'un degré convenable de $(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)\ldots(\lambda-e_n)$, c. à. d. par des quantités réelles et positives, on obtient les fonctions de *Schramm* avec cette seule différence que x et y s'y trouvent remplacées par λ et 1. Mais on fera disparaître cette différence en posant $\frac{x}{y}$ à la place de λ et en multipliant par la puissance paire de y qui rend l'expression entière.

Baltimore, avril 1879.

Observation relative à l'article de M. *Sourander*.

(Vol. 85 de ce Journal.)

(Par M. *Souillart* à Lille.)

Dans un article inséré au vol. 85 de ce Journal, relatif aux sections circulaires d'une surface du second ordre, M. *Sourander*, après avoir mis sous la forme d'une somme de deux carrés le discriminant qui se présente dans la question, affirme que ces carrés sont plus simples que ceux fournis par les méthodes précédentes: la vérité est qu'ils sont identiques à ceux que l'on déduit d'un calcul de *Poisson*, par le moyen que j'ai indiqué au vol. 65 (p. 330). Pour s'en assurer, il suffit d'effectuer les substitutions dont j'ai donné tous les éléments, et de développer, d'autre part, les deux fonctions P_b, Q_b de M. *Sourander*, en y exprimant les quantités α_{11}, α_{22}, α_{33} en fonction des seules quantités α_{23}, α_{13}, α_{12}. Cette observation faite, je m'empresse de reconnaître tout le mérite de la méthode directe de M. *Sourander*.

La même décomposition peut du reste s'obtenir immédiatement, d'une manière tout aussi directe, au moyen de l'expression

$$(1.)\qquad \frac{A^2a^4+B^2b^4+C^2c^4-2BCb^2c^2-2CAc^2a^2-2ABa^2b^2}{4a^2b^2c^2},$$

que j'ai donnée (vol. 65 p. 324) du discriminant dont il s'agit. Si l'on élimine la quantité C au moyen de la relation $A+B+C=0$, le numérateur prend la forme:

$$A^2(a^2+c^2)^2+2AB[c^2(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2]+B^2(b^2+c^2)^2$$

ou la forme équivalente

$$\frac{\{A(a^2+c^2)^2+B[c^2(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2]\}^2+4B^2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+c^2)^2},$$

qui donne le résultat cherché.

J'ajouterai, puisque l'occasion s'en présente, que l'expression (1.) est identiquement celle que M. *Bauer* a obtenue quelques années plus tard (vol. 71 p. 50 formule (24.)), au moyen de considérations peu différentes. M. *Bauer* en a déduit une élégante décomposition en une somme de

6 carrés au moyen d'une remarque heureuse qui lui est propre et dont voici l'énoncé:

λ, μ, ν, P, Q, S étant des quantités assujetties à la condition

$$\lambda P + \mu Q + \nu S = 0,$$

on aura identiquement

$$(\lambda+\mu+\nu)(P^2+Q^2+S^2-2QS-2SP-2PQ)$$
$$= 3\lambda P^2+3\mu Q^2+3\nu S^2+\lambda(Q-S)^2+\mu(S-P)^2+\nu(P-Q)^2.$$

Lille, décembre 1878.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Fortsetzung; siehe Bd. 83 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Von einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Functionen als Coefficienten sei bei zwei Punkten der Constructionsebene je ein System linearunabhängiger Integrale entwickelt. Werden alsdann längs einer Linie, beständig auf einer Seite derselben, die Integrale des einen Systems aus ihrem Entwickelungsgebiete in das Entwickelungsgebiet des anderen Systems hin fortgesetzt, so geht jedes Integral des ersten Systems in eine homogene lineare Verbindung der Integrale des zweiten Systems mit constanten Coefficienten über. Die Aufgabe, ***diese constanten Coefficienten zu ermitteln,*** wird in nachstehender Abhandlung behandelt, und zwar besonders rücksichtlich solcher Differentialgleichungen, in denen normale Differentialausdrücke oder Systeme solcher (s. die Abh. des Verfassers Bd. 83 dieses Journals No. 1) gleich Null gesetzt sind. Die zu dem Zwecke in den Nrn. 1, 5 und 6 in den allgemeineren Grundsätzen aufgestellte Methode ist überhaupt auf homogene lineare Differentialgleichungen mit allenthalben einwerthigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte anwendbar. Bei der Darstellung der Integrale kommen ***allgemeine Eigenschaften von homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten*** zur Anwendung, die in No. 7 entwickelt sind.

1.

Wenn bei einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x) = 0$$

mit rationalen Coefficienten um einen singulären Punkt im Endlichen $x=a$ als Mittelpunkt ein Kreis geschlagen wird, der bis zu dem nächsten singulären Punkte reicht, so giebt es in diesem Kreise nach Herrn ***Fuchs***

Bd. 66 dieses Journals p. 131, Bd. 68 p. 355 (vgl. die Abh. des Verfassers Bd. 75 No. 8) ein System von m linearunabhängigen Integralen der Differentialgleichung unter folgender Form:

Das System der Integrale zerfällt in eine Anzahl Gruppen. Eine Gruppe von λ ($\lambda \geqq 1$) Integralen hat die Gestalt:

$$(2.)\qquad y_{\mathfrak{a}} = (x-a)^{r_{\mathfrak{a}}} \sum_{1}^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}\, \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} (\log(x-a))^{\mathfrak{b}-1} \quad (\mathfrak{a} = 1\dots\lambda),$$

die Exponenten $r_{\mathfrak{a}}$ unterscheiden sich nur um ganze Zahlen, die Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ sind innerhalb des Kreises, abgesehen vom Mittelpunkte, einwerthige und stetige analytische Functionen, die Function $(x-a)^{r_k}\varphi_{k\mathfrak{b}}$, ($\mathfrak{b} = 2\dots k$) ist einer homogenen linearen Verbindung der Functionen

$$(x-a)^{r_{\mathfrak{a}}}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}, \begin{Bmatrix} \mathfrak{a} = 1\dots k-1 \\ \mathfrak{c} = 1\dots \mathfrak{a} \end{Bmatrix},$$

mit constanten Coefficienten gleich. Die Exponenten r von einer Gruppe zur anderen unterscheiden sich nicht um ganze Zahlen.

Jede Function $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ lässt sich durch die Summe zweier Potenzreihen darstellen, von denen die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, und die erste wenigstens innerhalb des oben angegebenen Kreises convergirt, die zweite für jeden Werth von x, ausser $x = a$.

Wird ein Integral aus den Integralen dieser Gruppen linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzt, und sind diese Integrale in der vorhin angegebenen Weise entwickelt, so erhält dasselbe eine Entwickelung einer Form, die es nur auf *eine* Weise annimmt (Abh. Bd. 74 No. 1 (5.)). Hat also ein Integral in einem Kreise um $x=a$ eine Entwickelung von solcher Form erhalten, so müssen die Potenzreihen in derselben innerhalb des oben angegebenen Kreises convergiren (die mit negativen Exponenten ausser $x=a$).

Entsprechend ist es, wenn $x = t^{-1}$ in $F_m(y, x) = 0$ eingesetzt wird und $t = 0$ singulärer Punkt ist.

Es möge das Gebiet innerhalb des um den singulären oder nichtsingulären Punkt $x = a$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises, der durch den nächsten singulären Punkt der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ geht, der zu dem Punkte $x = a$ gehörende ***Bezirk*** genannt werden. Zu dem Punkte $x = \infty$ gehört als Bezirk das Gebiet ausserhalb des um $x = 0$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises, welcher durch den von $x = 0$ entferntesten, im Endlichen liegenden, singulären Punkt hindurchgeht.

Wenn man nun zwei Punkte a und b nimmt, so dass der zu a gehörende Bezirk in den von b hineinreicht, so kann man bei jedem der beiden Punkte je ein System linearunabhängiger Integrale entwickeln und diese Entwickelungen gelten alsdann in dem gemeinschaftlichen Gebiete beider Bezirke. Ein Integral des einen Systems ist nun gleich einer homogenen linearen Verbindung der Integrale des anderen Systems mit constanten Coefficienten. Differentiirt man diese Gleichung in dem genannten gemeinschaftlichen Entwickelungsgebiete $(m-1)$mal, so erhält man im Ganzen ein System von m in Bezug auf die m unbekannten constanten Coefficienten linearen Gleichungen. Durch Auflösung dieses Systems von m linearen Gleichungen gelangt man zur Bestimmung der m Unbekannten.

Liegt aber der zu a gehörende Bezirk ausserhalb des zu b gehörenden, so kann man durch eine Substitution für x diesen Fall auf den vorigen zurückführen.

Es wird hier nun folgende Substitution angewandt.

Die singulären oder nicht singulären Punkte a und b mögen so liegen, dass durch b ein Kreis gelegt werden kann, *innerhalb* dessen Peripherie a und *ausserhalb* derselben alle übrigen singulären Punkte der Differentialgleichung (ausser etwa a oder b) liegen. Dieser Kreis werde, indem x gleich einer *rationalen Function ersten Grades* von ξ gesetzt wird, conform auf den Kreis in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 abgebildet, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $x = b$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht.

Die Bestimmung dieser rationalen Function ergiebt sich aus den bekannten Eigenschaften einer rationalen Substitution ersten Grades für x. Eine rationale Substitution ersten Grades für x hat die Form

$$(3.)\qquad x = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},$$

woraus folgt

$$(4.)\qquad \xi = \frac{\delta x-\beta}{-\gamma x+\alpha}.$$

Ist γ gleich Null und

$$\frac{\alpha}{\delta} = \operatorname{Mod}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)e^{i\theta},\qquad \frac{\beta}{\delta} = \varepsilon+i\eta,$$

ε und η reell, $ii = -1$, so hat man

$$(5.)\qquad x-\varepsilon-i\eta = u = e^{i\theta}r = e^{i\theta}\operatorname{Mod}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)\xi.$$

Die Relation $x-\varepsilon-i\eta=u$ drückt aus, dass man durch eine Verschiebung der x-Ebene um die Grösse ε parallel der Axe der reellen Werthe und um die Grösse η parallel der Axe der Coefficienten von i die u-Ebene erhält, welche so auf der x-Ebene liegt, dass entsprechende Punkte zusammenfallen. Die Relation $u=e^{i\theta}v$ stellt dar, dass eine Drehung der u-Ebene um den Ursprung des Coordinatensystems und um den Winkel θ die v-Ebene giebt, welche so auf der u-Ebene liegt, dass entsprechende Punkte zusammenfallen. Gemäss der Relation $v=\text{Mod}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)\xi$ werden alle Radienvectoren in der v-Ebene vom Ursprunge des Coordinatensystems mit dem Factor $\frac{1}{\text{Mod}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}$ multiplicirt; einer Curve in der v-Ebene entspricht eine ähnliche in der ξ-Ebene.

Ist γ von Null verschieden, so hat man

$$(6.)\qquad x=pz+q,\quad \xi=r\zeta+s,\quad z=\frac{1}{\zeta},$$

wo $p,\ q,\ r,\ s$ durch die Gleichungen

$$(7.)\qquad \gamma s+\delta=0,\quad \alpha-q\gamma=0,\quad \beta-\delta q=\gamma p r$$

gegeben sind. Setzt man $\zeta=\text{Mod}(\zeta)e^{i\theta}$, woraus $z=\frac{1}{\text{Mod}(\zeta)}e^{-i\theta}$, so ergiebt sich: Durchläuft ein Punkt in der ζ-Ebene eine sich selbst nicht schneidende, geschlossene Linie, welche ein endliches Gebiet begrenzt, das den Nullpunkt nicht enthält, in positiver Richtung, (so dass die Richtung zu der Richtung der von Innen nach Aussen gezogenen Normalen liegt, wie die Strecke $+i$ zu der Strecke $+1$), so durchläuft der entsprechende Punkt in der z-Ebene eine sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie, welche ein endliches Gebiet begrenzt, das den Nullpunkt nicht enthält, in positiver Richtung, und einem Punkte im Innern des ersteren Gebietes entspricht ein Punkt im Innern des letzteren und umgekehrt. Durchläuft ein Punkt in der ζ-Ebene eine sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie, welche ein endliches Gebiet begrenzt, das den Nullpunkt im Innern enthält, in positiver Richtung, so durchläuft der entsprechende Punkt in der z-Ebene, eine sich selbst nicht schneidende, geschlossene Linie, welche ein Gebiet begrenzt, das den Unendlichkeitspunkt enthält, in positiver Richtung und dieselbe Linie als Begrenzung eines endlichen Gebietes, welches den Nullpunkt im Innern enthält, in negativer Richtung, und einem Punkte ausserhalb letzteren Gebietes in der z-Ebene entspricht ein Punkt inner-

halb des Gebietes in der ζ-Ebene und umgekehrt. Einem Kreise in der ζ-Ebene entspricht ein Kreis in der z-Ebene. Denn ist $z = u + iv$, $\zeta = \sigma + i\tau$, wo u, v, σ, τ reell sind, so ergiebt sich aus $z = \frac{1}{\zeta}$:

$$(8.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{\sigma}{\sigma^2+\tau^2}, & v = \dfrac{-\tau}{\sigma^2+\tau^2}, \\[2mm] \sigma = \dfrac{u}{u^2+v^2}, & \tau = \dfrac{-v}{u^2+v^2}, \end{cases}$$

und aus der Gleichung eines Kreises in der ζ-Ebene

$$(9.)\quad c_0(\sigma^2+\tau^2)+c_1\sigma+c_2\tau+c_3 = 0$$

folgt die Gleichung eines Kreises in der z-Ebene

$$(10.)\quad c_0+c_1u-c_2v+c_3(u^2+v^2) = 0$$

und umgekehrt. Durchläuft also in (3.) der Punkt in der ξ-Ebene einen Kreis als Begrenzung des den Mittelpunkt enthaltenden Gebietes (Kreisfläche) in positiver Richtung, dessen Kreisfläche nicht den Punkt $s = -\frac{\delta}{\gamma}$ enthält, so durchläuft der entsprechende Punkt in der x-Ebene einen Kreis in positiver Richtung, dessen Kreisfläche nicht den Punkt $q = \frac{\alpha}{\gamma}$ enthält, und einem Punkt im Innern des einen Gebietes entspricht ein Punkt im Innern des andern. Und durchläuft ein Punkt in der ξ-Ebene einen Kreis in positiver Richtung, dessen Kreisfläche den Punkt $s = -\frac{\delta}{\gamma}$ im Innern enthält, so durchläuft der entsprechende Punkt in der x-Ebene in negativer Richtung einen Kreis, dessen Kreisfläche den Punkt $q = \frac{\alpha}{\gamma}$ im Innern enthält und einem Punkte im Innern des ersten Gebietes entspricht ein Punkt ausserhalb des zweiten und umgekehrt.

Um nun die oben angegebene conforme Abbildung zu vollziehen, sei der Mittelpunkt des durch b gelegten Kreises in der x-Ebene, in dessen Innern a liegt, c. Dann werde gesetzt:

$$(11.)\quad x = c+u,\quad b-c = \mathrm{Mod}(b-c)\,e^{i\theta},\quad u = \mathrm{Mod}(b-c)\,e^{i\theta}v,$$

so wird der betrachtete Kreis in der x-Ebene conform auf den Kreis in der v-Ebene mit $v = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1 abgebildet, so dass der Punkt $x = a$ dem innerhalb dieses Kreises in der v-Ebene liegenden Punkte $v = \frac{a-c}{b-c}$, der Punkt $x = b$ dem Punkte $v = 1$ entspricht. Nun werde

$$(12.)\quad v = \frac{\lambda\xi+\mu}{\nu\xi+\varrho}$$

gesetzt. Die drei willkürlichen Constanten in (12.) sollen so bestimmt sein, dass drei Werthen ξ mit dem Modul $=1$, drei Werthe v mit dem Modul $=1$ in übereinstimmender (positiver) Reihenfolge so zugeordnet sind, dass zugleich der Werth $\xi=0$ dem Werthe $v=\frac{a-c}{b-c}$ entspricht. Dem Werth $\xi=1$ entspricht $v=1$. $\frac{a-c}{b-c}$ sei gleich d gesetzt. Die conjugirten Grössen der complexen $v, \xi, \lambda, \mu, \nu, \varrho, d$ werden durch $v', \xi', \lambda', \mu', \nu', \varrho', d'$ bezeichnet. In (12.) muss alsdann, wenn $\xi\xi'=1$ ist, zugleich $vv'=1$ sein. Demnach hat man:

$$(13.)\qquad vv' = \frac{\lambda\xi+\mu}{\nu\xi+\varrho}\cdot\frac{\lambda'\xi'+\mu'}{\nu'\xi'+\varrho'} = \frac{\lambda\lambda'+\mu\mu'+\lambda\mu'\xi+\mu\lambda'\xi'}{\nu\nu'+\varrho\varrho'+\nu\varrho'\xi+\varrho\nu'\xi'} = 1.$$

Daraus folgt

$$(14.)\qquad \begin{cases} \lambda\lambda'+\mu\mu' = \nu\nu'+\varrho\varrho' \\ \lambda\mu'-\nu\varrho' = 0 \\ \lambda'\mu-\nu'\varrho = 0, \end{cases}$$

und hieraus ergiebt sich $(\lambda\lambda'-\mu\mu')^2 = (\nu\nu'-\varrho\varrho')^2$, und da $\frac{\mu\mu'}{\varrho\varrho'} = dd' < 1$ ist,

$$(15.)\qquad \begin{cases} \lambda\lambda' = \varrho\varrho' \\ \mu\mu' = \nu\nu'. \end{cases}$$

Demnach muss

$$(16.)\qquad \lambda = \varrho' e^{i\varepsilon},\quad \mu = \nu' e^{i\eta}$$

sein, wo ε und η reelle Grössen sind, und $\varepsilon-\eta = 2k\pi$, wo k eine ganze Zahl. Es ist mithin

$$(17.)\qquad v = \frac{e^{i\varepsilon}\varrho'\xi+\mu}{e^{i\varepsilon}\mu'\xi+\varrho}.$$

Für $\xi=0$ soll $v=d$, für $\xi=1$ $v=1$ werden, daher

$$(18.)\qquad d=\frac{\mu}{\varrho},\quad 1=\frac{e^{i\varepsilon}\varrho'+\mu}{e^{i\varepsilon}\mu'+\varrho}.$$

Aus letzterer Gleichung folgt $e^{i\varepsilon} = \frac{\varrho-\mu}{\varrho'-\mu'}$, wodurch, da $\text{Mod.}\left(\frac{\varrho-\mu}{\varrho'-\mu'}\right)=1$ ist, $e^{i\varepsilon}$ bestimmt ist. Wird $\varrho=1$ gesetzt, so wird $\varrho'=1$, $\mu=d$, $\mu'=d'$, $e^{i\varepsilon}=\frac{1-d}{1-d'}$, also

$$(19.)\qquad v = \frac{\frac{1-d}{1-d'}\xi+d}{\frac{1-d}{1-d'}d'\xi+1}.$$

Da in (19.) den Punkten ξ auf der Peripherie des Kreises in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt und dem Radius 1 die Punkte v auf der Peripherie des Kreises in der v-Ebene mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt und dem Radius 1 entsprechen, und dem Punkte $\xi = 0$ der Punkt $v = d$ im Innern des letzteren Kreises, so muss nach den obigen Entwickelungen durch die Relation (19.) der eine Kreis auf den andern conform abgebildet werden.

Die gesuchte Substitution für x ist also folgende:

$$(20.)\qquad x = c+(b-c)\frac{\frac{1-d}{1-d'}\xi+d}{\frac{1-d}{1-d'}d'\xi+1},$$

$d = \frac{a-c}{b-c}$, d' der conjugirte Ausdruck zu d.

Wird in die Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ für x eine rationale Function ersten Grades von ξ, $R(\xi)$, eingesetzt, wodurch $F_m(y, x)$ in $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-m} G_m(y, \xi)$ übergehe, so entspricht bei den Differentialgleichungen $F_m(y, x) = 0$ und $G_m(y, \xi) = 0$ einem nichtsingulären Punkte der einen ein nichtsingulärer Punkt der anderen, und die charakteristischen Indices bei irgend zwei entsprechenden Punkten sind übereinstimmend, nach Abh. Bd. 78 No. 3. Zugleich ergiebt sich aus den dort angegebenen Formeln, dass die Exponentengleichungen (determinirenden Fundamentalgleichungen) bei entsprechenden Punkten übereinstimmend sind. Einem ausserwesentlich singulären Punkte entspricht ein ausserwesentlich singulärer Punkt.

Ist nun $R(\xi)$ gleich dem Ausdrucke (20.), so müssen in der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ abgesehen von den Punkten $\xi = 0$ und $\xi = 1$ (die singulär sind, wenn a bez. b singuläre Punkte von $F_m(y, x) = 0$ sind) alle übrigen singulären Punkte *ausserhalb* der Peripherie des Kreises in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt und dem Radius 1 liegen.

Wird aber $x-a = R(\xi)-a$ entwickelt in $\sum_1^\infty b_\lambda \xi^\lambda$ und diese Entwickelung in das Integral y_λ in (2.) (in dieser allgemeinen Entwickelungsform ist zugleich die Darstellung bei einem nichtsingulären Punkte enthalten) eingesetzt, so kann man, indem man nach Potenzen von ξ ordnet, dem Integral y_λ eine von ξ abhängende Entwickelung geben, die dieselbe Form hat, wie die Form der Darstellung (2.) ist, wenn an Stelle von $x-a$ ξ tritt (vgl. No. 2.). Entsprechend ist es, wenn in die Entwickelung von

y bei $x = b$ $x-b = R(\xi)-b = \sum_1^\infty b'_\alpha(\xi-1)^\alpha$ eingesetzt wird. Andererseits ist die Entwickelung von y_α durch ein System linearunabhängiger Integrale von $G_m(y,\xi) = 0$ bei $\xi = 0$, die eine der Form (2.) entsprechende Form haben, linear mit constanten Coefficienten darstellbar. Es müssen also in dieser von ξ abhängenden Entwickelung von y_α die Potenzreihen, ***wenigstens solange*** $Mod(\xi) < 1$ ***ist,*** convergiren (die mit negativen Exponenten abgesehen von $\xi = 0$), wenn aber $x = b$ und $\xi = 1$ kein singulärer Punkt ist, in einem Kreise mit einem ***grösseren Radius, als*** 1.

Sollen die linearen Beziehungen eines Integralsystems von $F_m(y,x) = 0$ bei $x = \infty$ zu einem Integralsystem bei einem Punkte x_1 im Endlichen ermittelt werden, durch welchen ein Kreis gelegt werden kann, innerhalb dessen Peripherie alle übrigen singulären Punkte der Differentialgleichung und der Punkt $x = 0$ liegen, so setze man $x = \frac{1}{t}$ in die Differentialgleichung ein, dann verhalten sich die Punkte $t = 0$ und $t = \frac{1}{x_1}$ in Bezug auf ihre Lage wie die vorhin betrachteten Punkte a und b. Sollen die linearen Beziehungen des Integralsystems von $F_m(y,x) = 0$ bei $x = \infty$ zu einem Integralsystem bei $x = x_1$ ermittelt werden, wenn durch den Punkt $x = x_1$ ein Kreis gelegt ist, innerhalb dessen Peripherie alle übrigen singulären Punkte der Differentialgleichung liegen, während $x = 0$ beliebig liegt, so ist $x = u + x_2$ einzusetzen, wo x_2 ein Punkt innerhalb dieses Kreises ist, $u = \frac{1}{t'}$. Dann entsprechen den Punkten $x = \infty$ $\left(x = \frac{1}{t},\ t = 0\right)$ und $x = x_1$ die Punkte $t' = 0$ und $t' = \frac{1}{x_1 - x_2}$, die sich in Bezug auf ihre Lage wie die früheren Punkte a und b verhalten.

2.

Die Differentialgleichung $F_m(y,x) = 0$ in No. 1 gehe durch Substitution von $x = R(\xi)$, wo $R(\xi)$ ein rationaler Ausdruck ersten Grades von ξ ist, in $G_m(y,\xi) = 0$ über, wo $F_m(y,x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-m} G_m(y,\xi)$. Wird in die Entwickelung des Integrales y_α No. 1 (2.) für x $R(\xi)$ eingesetzt und entspricht dem Werthe $x = a$ im Endlichen der Werth $\xi = a'$ im Endlichen (auf welchen Fall jeder andere zurückgeführt wird), so dass

$$(1.)\qquad x-a = \sum_1^\infty b_\alpha(\xi-a')^\alpha,$$

wo $b_1 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'} = \frac{1}{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_{x=a}}$ von Null verschieden ist, so kann man, wenn für $x-a$ die Entwickelung (1.) eingesetzt wird, die Potenzreihen wegen ihrer unbedingten Convergenz nach Potenzen von $\xi - a'$ anordnen. Die einzelne Reihe mit positiven ganzzahligen Exponenten von $x-a$ nach Potenzen von $\xi-a'$ geordnet, convergirt wenigstens für $\operatorname{Mod}(\xi-a') < A$, wo A eine gewisse positive Zahl grösser als Null ist, und stellt die Function von ξ dar. Wird in eine Reihe mit negativen ganzzahligen Exponenten von $x-a$, die für beliebige Werthe von $\frac{1}{x-a}$ (ausgenommen $\frac{1}{x-a} = \infty$) convergirt, $\frac{1}{x-a} = \frac{1}{\xi-a'} \sum_0^\infty k_\alpha (\xi-a')^\alpha$ eingesetzt, so lässt sich dieselbe durch Anordnen nach Potenzen von $\xi-a'$ in die Summe von zwei Potenzreihen entwickeln, von denen die eine nach Potenzen von $\xi-a'$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, die für alle Werthe von $\xi-a'$ (bei der letzteren ausgenommen $\frac{1}{\xi-a'} = \infty$), für welche $\operatorname{Mod}(\xi-a') < B$, wo B eine gewisse positive Grösse grösser als Null ist, convergiren und deren Summe die Function von ξ darstellt. Was die Factoren $(\log(x-a))^\alpha$ und $(x-a)^r = e^{r\log(x-a)}$ angeht, so ist das Resultat der Substitution (1.) in $\log(x-a)$ zu betrachten. Man erhält:

$$(2.)\qquad \log(x-a) = \log(\xi-a') + \log\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'} + \log \sum_1^\infty \left(1 + \frac{b_{\alpha+1}}{b_1}(\xi-a')^\alpha\right).$$

Hier müssen die Coefficienten von i auf beiden Seiten in den entsprechenden Punkten in Uebereinstimmung gebracht werden. $\log \sum_1^\infty \left(1 + \frac{b_{\alpha+1}}{b_1}(\xi-a')^\alpha\right)$ sei für $\xi = a'$ gleich Null und nach Potenzen von $\xi-a'$ mit positiven Exponenten entwickelt. Ist

$x-a = \operatorname{Mod}(x-a)e^{i\theta}$, $\xi-a' = \operatorname{Mod}(\xi-a')e^{i\theta'}$, $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'} = \operatorname{Mod}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'} e^{i\eta}$,

und

$$\log(x-a) = \log\operatorname{Mod}(x-a) + i\theta,\ \log(\xi-a') = \log\operatorname{Mod}(\xi-a') + i\theta',$$

wo $\log\operatorname{Mod}(x-a)$, $\log\operatorname{Mod}(\xi-a')$ reell genommen sind, so muss

$$(3.)\qquad \log\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'} = \log\operatorname{Mod}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'} + i(\eta + k2\pi)$$

sein, wo $\log\operatorname{Mod}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'}$ reell und k eine bestimmte ganze Zahl ist. Lässt

man aber mit unendlich abnehmendem $\text{Mod}(x-a)$ die Grösse θ gegen einen bestimmten Werth $[\theta]$ convergiren, etwa indem x sich auf der Peripherie eines durch a gelegten Kreises dem Punkte a unendlich nähert, so convergirt θ', indem ξ sich auf der entsprechenden Curve dem Punkte a' unendlich nähert, gegen einen bestimmten Werth $[\theta']$, und man erhält k bestimmt aus der Gleichung

$$(4.)\qquad [\theta] = [\theta']+\eta+k2\pi.$$

Wird nun der Ausdruck (1.) in y_a eingesetzt und werden die Multiplicationen der Potenzreihen ausgeführt, so erhält man die Darstellung von y_a unter einer Form, wie die Form (2.) in No. 1, wenn dort $\xi-a'$ für $x-a$ gesetzt wird. Wenn dasselbe Integral y_a durch Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = a'$ linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt wird, so können nur solche Integrale von der Form, die (2.) in No. 1 entspricht, in diesen Ausdruck eingehen, in denen die Exponenten r sich von dem Exponenten r_a in y_a um ganze Zahlen unterscheiden (Abh. Bd. 74 No. 1, (5.)).

Letztere Darstellung soll nun näher untersucht werden in den Fällen, wenn in $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ der charakteristische Index gleich Null ist und wenn $F_m(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke (Abh. Bd. 83 No. 1) dargestellt ist.

I. Ein Integral der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$, die bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, bei $x = a$ sei von der Form

$$(5.)\qquad (x-a)^r\{\chi_0(x)+\chi_1(x)\log(x-a)+\cdots+\chi_q(x)(\log(x-a))^q\},$$

worin $\chi_c(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty \gamma_a(x-a)^a$ hat und nicht sämmtliche Werthe $\chi_c(a)$ verschwinden.

Durch die Substitution (1.) erhält dieses Integral die Darstellung

$$(6.)\qquad (\xi-a')^r\{\chi'_0(\xi)+\chi'_1(\xi)\log(\xi-a')+\cdots+\chi'_q(\xi)(\log(\xi-a'))^q\},$$

worin $\chi'_c(\xi)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty \gamma'_a(\xi-a')^a$ hat und nicht sämmtliche Werthe $\chi'_c(a')$ verschwinden. Sind in (5.) in der Entwickelung von $\chi_c(x)$ $(c = 0\ldots q)$ die n ersten Coefficienten von $\chi_c(a)$ an bestimmt (vgl. Abh. Bd. 83 No. 9, (20.)), so erhält man vermittelst derselben und der n ersten Coefficienten in (1.) die n ersten Coefficienten in $\chi'_c(\xi)$ $(c = 0\ldots q)$ von $\chi'_c(a)$ an.

Wenn nun in $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = a'$, wo der charakteristische Index ebenfalls Null ist, die Anzahl der Wurzeln der Exponentengleichung, die sich von dem Exponenten r in (6.) nur um ganze Zahlen (incl. 0) unter-

scheiden, λ ist und diese Wurzeln r_1, r_2 bis r_λ sind, der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden, der Ausdruck (6.) durch Y bezeichnet wird, so hat man

$$(7.)\qquad Y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \cdots + K_\lambda y_\lambda,$$

wo die K Constanten, y_1 bis y_λ λ linearunabhängige Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ von der Form (6.) sind, in denen die Exponenten sich von r in (6.) nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die Gleichung (7.) werde $\lambda-1$ mal differentiirt, so erhält man:

$$(8.)\qquad \frac{d^\alpha Y}{d\xi^\alpha} = K_1\frac{d^\alpha y_1}{d\xi^\alpha} + K_2\frac{d^\alpha y_2}{d\xi^\alpha} + \cdots + K_\lambda\frac{d^\alpha y_\lambda}{d\xi^\alpha},\quad (\alpha = 1\ldots\lambda-1).$$

Die Determinante in dem Gleichungssysteme (7.) und (8.) sei D, der Coefficient von $\frac{d^r y_s}{d\xi^r}$ in derselben sei D_{rs}. Dann erhält man durch Auflösen des Gleichungssystems

$$(9.)\qquad K_\alpha = \frac{D_{0\alpha}}{D}Y + \frac{D_{1\alpha}}{D}\frac{dY}{d\xi} + \cdots + \frac{D_{\lambda-1\alpha}}{D}\frac{d^{\lambda-1}Y}{d\xi^{\lambda-1}},\quad (\alpha = 1\ldots\lambda).$$

Werden die linearunabhängigen Functionen $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ auf die Form gebracht

$$(10.)\qquad \mu_1,\quad \mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2\,dx,\quad \ldots,\quad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int\mu_{\lambda-1}^{-1}\mu_\lambda\,dx,$$

so ist die Determinante $D = \mu_1\mu_2\ldots\mu_\lambda$ (siehe No. 7 III*b*). Werden aber diese λ Functionen durch λ andere linearunabhängige Integrale, deren Determinante D' ist, linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt, wo Δ die von Null verschiedene Determinante der Substitutionscoefficienten ist, so hat man $D = \Delta D'$. Nun bestehen λ Integrale unter der Form (10.), wo

$$(11.)\qquad \mu_\alpha = (\xi-a')^{r_\alpha-\alpha+1}\psi_\alpha(\xi)$$

ist, $\psi_\alpha(\xi)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c_\alpha(\xi-a')^\alpha$ hat, c_0 von Null verschieden ist. Daher muss die Entwickelung der Determinante D bei $\xi = a'$ die Form haben

$$(12.)\qquad (\xi-a')^{\sum_1^\lambda r_\alpha - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}\sum_0^\infty k_\alpha(\xi-a')^\alpha,$$

wo $k_0 = K$ von Null verschieden ist. Diese Constante K ist unmittelbar aus der Determinante D, in deren Elementen die Logarithmen mit ihren Factoren weggelassen sind, zu bestimmen.

Multiplicirt man nun die Gleichung (9.) mit

$$(\xi-a')^{-\sum_1^\lambda r_\alpha + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}\frac{D}{K},$$

so erhält man rechts:

$$(13.)\quad (\xi-a')^{-\sum\limits_1^\lambda r_\alpha+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}\left\{\frac{D_{0\alpha}}{K}Y+\frac{D_{1\alpha}}{K}\frac{dY}{d\xi}+\cdots+\frac{D_{\lambda-1\alpha}}{K}\frac{d^{\lambda-1}Y}{d\xi^{\lambda-1}}\right\}.$$

Wenn die Werthe von $\log(\xi-a')$ in Y einerseits und in den Integralen y_1 bis y_λ andererseits im imaginären Theile nicht übereinstimmen, so ist für den Werth von $\log(\xi-a')$ in Y der von $\log(\xi-a')$ in den Integralen y_1 bis y_λ, zu welchem ein bestimmtes ganzzahliges Vielfache von $2\pi i$ addirt ist, einzusetzen. Auf dieselbe Weise sind die Logarithmen in $(\xi-a')^{r_\alpha}=e^{r_\alpha\log(\xi-a')}$ in den Integralen y_1 bis y_λ und $(\xi-a')^r=e^{r\log(\xi-a')}$ in (6.) in Uebereinstimmung zu bringen.

Geht alsdann in dem von den Potenzen von $\log(\xi-a')$ freien Theile von (13.) ξ in a' über, so erhält man aus dem constanten Gliede K_α. Die Constante K_α wird auf diese Weise erhalten als *rationale* Function von Constanten, die in den Entwickelungen von Y und y_1 bis y_λ vorkommen, mit rationalen Zahlen als Coefficienten. Es genügt hierzu, wenn die Integrale y_1 bis y_λ bezüglich zu den Exponenten r_1 bis r_λ gehören (s. die Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 66 dieses Journals p. 155) (auf welchen Fall man jeden anderen zurückführen kann), in der Entwickelung von $\chi'_c(\xi)$ $(c=0\dots q)$ von $\chi'_c(a')$ an r_1-r+1 Anfangscoefficienten zu bestimmen (der reelle Theil von r kann nicht grösser sein, als der von r_1, weil $(\xi-a')^r\chi'_c(\xi)$ der Differentialgleichung $G_m=0$ genügt), und wenn in der Entwickelung von y_b die den χ' in (6.) entsprechenden Functionen durch $\varrho_c^{(b)}(\xi)$ bezeichnet werden, in den Entwickelungen dieser Functionen r_1-r+1 Anfangscoefficienten von $\varrho_c^{(b)}(a')$ an zu ermitteln.

Wenn irgend ein Integral von $G_m(y,\xi)=0$, dessen Entwickelung bei $\xi=a'$ gegeben ist, durch ein System linearunabhängiger Integrale ausgedrückt werden soll, die zu den Wurzeln der Exponentengleichung gehören, so hat man auf die einzelnen Theile des Integrales, in denen die Exponenten von $\xi-a'$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, das vorige Verfahren anzuwenden. Hat man dann durch dasselbe System linearunabhängiger Integrale irgend ein anderes System linearunabhängiger Integrale bei $\xi=a'$ ausgedrückt und kehrt dieses Gleichungssystem um, so kann man vermittelst letzteren Integralsystems jedes Integral ausdrücken.

II. $F_m(y,x)$ sei gleich einem Systeme homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten

$$(14.)\quad f_{\alpha_0}(y,x)=y_1,\quad f_{\alpha_1}(y_1,x)=y_2,\quad \dots\quad f_{\alpha_l}(y_l,x)=F_{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_l}(y,x),$$

wo $f_{\mathfrak{a}_k}$ $(k=0\dots l)$ ein homogener linearer Differentialausdruck $\mathfrak{a}_k^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich Eins ist. Wird $x=R(\xi)$ gesetzt und

$$(15.)\qquad f_{\mathfrak{a}_k}(y_k, x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_k} g_{\mathfrak{a}_k}(y_k, \xi),$$

so geht der Ausdruck (14.) über in

$$(16.)\quad \begin{cases} \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_0} g_{\mathfrak{a}_0}(y, \xi) = y_1,\ \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_1} g_{\mathfrak{a}_1}(y_1, \xi) = y_2,\ \dots\ \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_l} g_{\mathfrak{a}_l}(y_l, \xi) \\ \qquad = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_l} G_{\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_l}(y, \xi) = F_{\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_l}(y, x). \end{cases}$$

Hieraus entsteht, wenn

$$(17.)\quad \begin{cases} g_{\mathfrak{a}_k}\left(\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_{k-1}} y_k,\ \xi\right) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_0-\dots-\mathfrak{a}_{k-1}} q_{\mathfrak{a}_k}(y_k, \xi), \\ \qquad (k=1\dots l),\quad g_{\mathfrak{a}_0}(y, \xi) = q_{\mathfrak{a}_0}(y, \xi) \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(18.)\quad q_{\mathfrak{a}_0}(y, \xi) = u_1,\quad q_{\mathfrak{a}_1}(u_1, \xi) = u_2,\quad \dots\quad q_{\mathfrak{a}_l}(u_l, \xi) = G_{\mathfrak{a}_0+\dots+\mathfrak{a}_l}(y, \xi).$$

Die charakteristischen Indices in $f_{\mathfrak{a}_k}(y, x)=0$ und $g_{\mathfrak{a}_k}(y, \xi)=0$ sind in entsprechenden Punkten übereinstimmend, ebenso in $g_{\mathfrak{a}_k}(y, \xi)=0$ und $q_{\mathfrak{a}_k}(y, \xi)=0$.

$f_{\mathfrak{a}_k}(y, x)$ sei nun ein *normaler* Differentialausdruck und gleich $\Omega_k \bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\Omega_k^{-1} y, x)$, wo Ω_k der determinirende Factor, $\bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, x)$ der reguläre Differentialausdruck. $\Omega_k = e^{W_k(x)}$; in den rationalen Ausdruck $W_k(x)$ wird $x=R(\xi)$ eingesetzt, alsdann in dem in Partialbrüche zerlegten Ausdruck $W_k(R\xi)$ das constante Glied annullirt, wodurch $W'_k(\xi)$ erhalten werde, und nun $e^{W'_k(\xi)} = \Omega'_k(\xi)$ gebildet. Nun sei

$$(19.)\quad \begin{cases} \bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_k} \bar{g}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, \xi), \\ \bar{g}_{\mathfrak{a}_k}\left(\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_0\dots-\mathfrak{a}_{k-1}} \bar{u}_k, \xi\right) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_0\dots-\mathfrak{a}_{k-1}} \bar{q}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{u}_k, \xi),\quad \bar{g}_{\mathfrak{a}_0}(\bar{u}, \xi) = q_{\mathfrak{a}_0}(\bar{u}, \xi), \end{cases}$$

so wird

$$(20.)\quad \begin{cases} f_{\mathfrak{a}_k}(y_k, x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\mathfrak{a}_k} \Omega'_k(\xi) \bar{g}_{\mathfrak{a}_k}((\Omega'_k(\xi))^{-1} y_k, \xi), \\ q_{\mathfrak{a}_k}(u_k, \xi) = \Omega'_k(\xi) \bar{q}_{\mathfrak{a}_k}((\Omega'_k(\xi))^{-1} u_k, \xi), \end{cases}$$

so dass $q_{\mathfrak{a}_k}(u_k, \xi)$ ein normaler Differentialausdruck mit $\Omega'_k(\xi)$ als determinirendem Factor und $\bar{q}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{u}_k, \xi)$ als regulärem Ausdrucke ist. In $\bar{f}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{y}_k, x)=0$ und $\bar{q}_{\mathfrak{a}_k}(\bar{u}_k, \xi)=0$ stimmen bei den entsprechenden Punkten $x=a$ und $\xi=a'$

die Exponentengleichungen überein, da die Punkte a und a' im Endlichen liegen sollen und daher $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)_{\xi=a'}$ nicht Null und unendlich ist.

In dem Systeme (14.) werden diejenigen auf einander folgenden Bestandtheile, in denen die in Partialbrüche zerlegten rationalen Functionen W der determinirenden Factoren e^W die Glieder, in welchen sie für $x=a$ unendlich werden, übereinstimmend haben, zusammengefasst, so dass

$$(21.)\quad F_{a_0}(y,x)=y'_1,\quad F_{a_1}(y'_1,x)=y'_2,\quad \ldots\quad F_{a_\lambda}(y'_\lambda,x)=F_{a_0+a_1+\dots+a_l}(y,x)$$

entsteht, wo der Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung

$$F_{a_k}(y_k,x)=e^{w_k}\bar{F}_{a_k}(e^{-w_k}y_k,x)\quad (k=0\ldots\lambda),$$

ist, $w_k(k=0\ldots\lambda)$ von der Form $\sum\limits_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ oder gleich Null ist, und je zwei auf einander folgende Grössen w_k von einander verschieden sind, der charakteristische Index in $\bar{F}_{a_k}(\bar{y}_k,x)=0$ bei $x=a$ gleich Null ist. ***Und zwar wird vorausgesetzt, dass der Differentialausdruck $F_{a_0+\dots+a_l}(y,x)$ durch ein solches System* (21.) *dargestellt werden kann,*** dass jede beliebige Wurzel der Exponentengleichung von $\bar{F}_{a_g}(\bar{y}_g,x)=0$ bei $x=a$ sich von jeder beliebigen Wurzel der Exponentengleichung von $\bar{F}_{a_k}(\bar{y}_k,x)=0$ bei $x=a$, wo $g\gtrless k$, $(g,k=0\ldots\lambda)$ nicht um eine ganze Zahl unterscheidet.

Ebenso werden in dem Systeme (18.) diejenigen auf einander folgenden Bestandtheile, in denen die in Partialbrüche zerlegten rationalen Functionen $W'(\xi)$ die Glieder, in welchen sie für $\xi=a'$ unendlich werden, übereinstimmend haben, zusammengefasst, wodurch

$$(22.)\quad Q_{a_0}(y,\xi)=u'_1,\quad Q_{a_1}(u'_1,\xi)=u'_2,\quad \ldots\quad Q_{a_\lambda}(u'_\lambda,\xi)=G_{a_0+a_1+\dots+a_l}(y,\xi)$$

entsteht, wo der Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung

$$Q_{a_k}(u_k,\xi)\;=\;e^{w'_k(\xi)}\bar{Q}_{a_k}(e^{-w'_k(\xi)}u_k,\xi)\quad (k=0\ldots\lambda),$$

ist, $w'_k(\xi)$ dadurch erhalten wird, dass in w_k für $x-a$ die Entwickelung (1.) eingesetzt und die Summe der Potenzen von $\xi-a'$ mit negativen Exponenten herausgenommen wird, der charakteristische Index in $\bar{Q}_{a_k}(\bar{u}_k,\xi)=0$ bei $\xi=a'$ gleich Null ist, die Exponentengleichung von $\bar{Q}_{a_k}(\bar{u}_k,\xi)=0$ bei $\xi=a'$ mit der von $\bar{F}_{a_k}(\bar{y}_k,x)=0$ bei $x=a$ übereinstimmt. (Vgl. Abh. Bd. 83 dieses Journals No. 9 II (19.)).

Die Integrale der Differentialgleichung $F_{a_0+\dots+a_l}(y,x)=0$ bei $x=a$, wenn $F_{a_0+\dots+a_l}(y,x)$ durch das System (21.) gegeben ist, werden nun unter

folgender Form aufgestellt. (Vgl. hierbei Abh. Bd. 83 dieses Journals No. 9, I und II.)

Die Exponentengleichung von $\bar{F}_{\alpha_k}(\bar{y}_k, x) = 0$ $(k = 0 \dots \lambda)$ bei $x = a$ habe die Wurzeln:

$$(23.)\quad r_{k\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

und diese seien so angeordnet, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen und unter letzteren die vorhergehende einen reellen Theil habe, der nicht kleiner sei, als der der folgenden.

Die Integrale von $\bar{F}_{\alpha_k}(\bar{y}_k, x) = 0$ treten alsdann unter der Form auf:

$$(24.)\quad \nu_{k1}\int dx\, \nu_{k1}^{-1}\nu_{k2} \dots \int \nu_{k\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{k\mathfrak{b}}\, dx, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

wo $\nu_{k\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_{k\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\psi_{k\mathfrak{b}}(x)$ ist, $\psi_{k\mathfrak{b}}(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ hat, worin c_0 von Null verschieden, die in einem gewissen Kreise mit $x = a$ als Mittelpunkt und von Null verschiedenem Radius convergirt. Bei Ausführung der Integrationen durch Integration der einzelnen Glieder soll jedesmal das constante Glied in den Entwickelungen (Integrationsconstante) annullirt werden. Die Integrale von $F_{\alpha_k}(y_k, x) = e^{w_k}\bar{F}_{\alpha_k}(e^{-w_k}y_k, x) = 0$ sind:

$$(25.)\quad \mu_{k1}\int dx\, \mu_{k1}^{-1}\mu_{k2} \dots \int \mu_{k\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{k\mathfrak{b}}\, dx, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

wo $\mu_{k\mathfrak{b}} = e^{w_k}\nu_{k\mathfrak{b}}$, also, wenn noch $w_k = w_{k\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$ gesetzt wird,

$$(26.)\quad \mu_{k\mathfrak{b}} = e^{w_{k\mathfrak{b}}}(x-a)^{r_{k\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\psi_{k\mathfrak{b}}(x), \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k).$$

Die Integrale von $F_{\alpha_0+\dots+\alpha_\lambda}(y, x) = 0$ sind alsdann:

$$(27.)\quad y_{0\mathfrak{b}} = \mu_{01}\int dx\, \mu_{01}^{-1}\mu_{02} \dots \int \mu_{0\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{0\mathfrak{b}}\, dx, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_\lambda)$$

wo in den Grössen μ der Zeiger

$$(28.)\quad 0\,\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} + \mathfrak{c} = k\,\mathfrak{c} \quad \left\{\begin{matrix} k = 1 \dots \lambda \\ \mathfrak{c} = 1 \dots \alpha_k \end{matrix}\right\}$$

zu setzen ist, und die Werthe der Grössen μ aus (26.) für $k = 0 \dots \lambda$ zu nehmen sind. Bei Ausführung der Integrationen soll das constante Glied in den Entwickelungen jedesmal annullirt werden.

Entsprechend sind die Integrale von $\bar{Q}_{\alpha_k}(\bar{u}_k, \xi) = 0$,

$$(29.)\quad \nu'_{k1}\int d\xi\, (\nu'_{k1})^{-1}\nu'_{k2} \dots \int (\nu'_{k\mathfrak{b}-1})^{-1}\nu'_{k\mathfrak{b}}\, d\xi, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

wo $\nu'_{k\mathfrak{b}} = (\xi - a')^{r_{k\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\psi'_{k\mathfrak{b}}(\xi)$, $\psi'_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c'_\mathfrak{a}(\xi-a')^\mathfrak{a}$ hat, worin c'_0 von Null verschieden, die in einem gewissen Kreise mit $\xi = a'$

als Mittelpunkt und von Null verschiedenem Radius convergirt. Wird dann

$$(30.)\quad \mu'_{k\mathfrak{b}} = e^{w'_{k\mathfrak{b}}(\xi)}(\xi-a')^{r_{k\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\psi'_{k\mathfrak{b}}(\xi),\quad (\mathfrak{b}=1\dots\alpha_k),\quad w'_{k\mathfrak{b}}(\xi)=w'_k(\xi)$$

gesetzt, so werden die Integrale von $G_{\alpha_0+\dots+\alpha_l}(y,\xi)=0$:

$$(31.)\quad Y_{0\mathfrak{b}} = \mu'_{01}\int d\xi(\mu'_{01})^{-1}\mu'_{02}\dots\int(\mu'_{0\mathfrak{b}-1})^{-1}\mu'_{0\mathfrak{b}}d\xi,\quad (\mathfrak{b}=1\dots\alpha_0+\dots+\alpha_\lambda)$$

wo in Betreff der Zeiger in μ' die Bestimmung (28.) gilt, die Werthe der Grössen μ' aus (30.) für $k=0\dots\lambda$ zu nehmen sind. Die jedesmalige Integrationsconstante in den Entwickelungen soll annullirt werden.

Man habe nun ein Integral von $\bar{F}_{\alpha_k}(\bar{y}_k,x)=0$ unter der Form

$$(32.)\quad \bar{y}_k = (x-a)^r\{\chi_0(x)+\chi_1(x)\log(x-a)+\dots+\chi_q(x)(\log(x-a))^q\}$$

aufgestellt, wo $\chi_\mathfrak{b}(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty\gamma_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ hat. Alsdann werden aus (24.) diejenigen Integrale, deren Exponenten sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, unter einer Form wie (32.) entwickelt. (In Betreff dieser Entwickelung s. Abh. Bd. 83 dieses Journals No. 9 II nach (21.)). Vermittelst dieser Integrale kann man das Integral $\bar{y}_k$ (32.) nach I dieser Nummer Gl. (7.) etc. ausdrücken. Wenn die Integrale (24.) durch $\bar{y}_{k\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}=1\dots\alpha_k)$ bezeichnet werden, so erhält man

$$(33.)\quad \bar{y}_k = K_1\bar{y}_{k1}+K_2\bar{y}_{k2}+\dots+K_{\alpha_k}\bar{y}_{k\alpha_k},$$

wo diejenigen Constanten K Null sind, bei denen als Factoren Integrale $\bar{y}_{k\mathfrak{b}}$ stehen, deren Exponenten sich von r nicht um ganze Zahlen unterscheiden, die übrigen Constanten K rationale Functionen von Constanten in den Entwickelungen von $\bar{y}_k$ und $\bar{y}_{k\mathfrak{b}}$ sind. Dann wird das Integral von $F_{\alpha_0+\dots+\alpha_l}(y,x)=0$

$$(34.)\quad \mu_{01}\int dx\,\mu_{01}^{-1}\mu_{02}\dots\int\mu^{-1}_{0\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}e^{w_k}\bar{y}_k dx,$$

in welchem die Integrationsconstanten annullirt werden, gleich

$$(35.)\quad K_1 y_{0\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+1}+K_2 y_{0\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+2}+\dots+K_{\alpha_k}y_{0\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{k-1}+\alpha_k},$$

wo die Constanten K die aus (33.) sind.

Entsprechend ist es bei $G_{\alpha_0+\dots+\alpha_l}(y,\xi)=0$.

Es soll *jetzt in ein Integral von* $F_{\alpha_0+\dots+\alpha_l}(y,x)=0$ *unter einer Form, wie* (34.), $x=R(\xi)$ *eingesetzt werden.* Dadurch geht das Integral (34.) über in

$$(36.)\quad \mu_{01}\int d\xi\,\mu_{01}^{-1}\mu_{02}\frac{dx}{d\xi}\int d\xi\,\mu_{02}^{-1}\mu_{03}\frac{dx}{d\xi}\dots\int\mu^{-1}_{0\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}(e^{w_k}\bar{y}_k)_{x=R(\xi)}\frac{dx}{d\xi}d\xi.$$

Die Integrationsconstanten sind hier in den Entwickelungen zu annulliren, weil die Exponenten $r_{0\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}$, in Betreff der Zeiger $0\mathfrak{b}$ gilt die Bestimmung (28.)) sich von r in (32.) nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Nun geht die Differentialgleichung

$$(37.)\quad F_{\alpha_0}(y, x) = y_1', \quad F_{\alpha_1}(y_1', x) = y_2', \quad \dots \quad F_{\alpha_{k-1}}(y_{k-1}', x) = e^{w_k}\bar{y}_k$$

durch Substitution von $x = R(\xi)$ über in

$$(38.)\quad Q_{\alpha_0}(y, \xi) = u_1', \quad Q_{\alpha_1}(u_1', \xi) = u_2', \quad \dots \quad Q_{\alpha_{k-1}}(u_{k-1}', \xi) = s,$$

wo $s = (e^{w_k}\bar{y}_k)_{x=R(\xi)}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}$ ist. Dieser Differentialgleichung (38.) genügt also als Integral (36.). Derselben Differentialgleichung (38.) genügt aber das Integral

$$(39.)\quad \mu_{011}'\int d\xi(\mu_{011}')^{-1}\mu_{012}'\int d\xi(\mu_{012}')^{-1}\mu_{013}' \dots \int(\mu_{0\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}')^{-1}(e^{w_k}\bar{y}_k)_{x=R(\xi)}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}} d\xi,$$

worin die Integrationsconstanten annullirt werden.

Es könnten sich demnach die Grössen (36.) und (39.) nur um Integrale der Differentialgleichung (38.), in welcher $s = 0$ gesetzt ist, unterscheiden. Da nun in beiden Integralen (36.) und (39.) die Integrationsconstanten annullirt werden, so erhält man bei Ausführung der Integrationen Ausdrücke von einer Form wie (2.) in No. 1, wo an Stelle von $x - a$ eintritt $\xi - a'$ und worin die Exponenten sich von r in (32.) nur um ganze Zahlen unterscheiden. Weil aber die Exponenten $r_{0\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}$) sich von r in (32.) nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so kann durch einen Ausdruck der linear mit constanten von Null verschiedenen Coefficienten zusammengesetzt ist aus Integralen der Differentialgleichung (38.), worin $s = 0$ ist, welche die Form (31.) haben, der Unterschied zwischen den Grössen (36.) und (39.) nicht dargestellt werden. Dieser Unterschied muss demnach Null sein.

Nun erfüllt

$$(e^{w_k}\bar{y}_k)_{x=R(\xi)}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}$$

die Differentialgleichung $Q_{\alpha_k}(u_k, \xi) = 0$, und

$$e^{-w_k'(\xi)}(e^{w_k}\bar{y}_k)_{x=R(\xi)}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}$$

die Differentialgleichung $\bar{Q}_{\alpha_k}(\bar{u}_k, \xi) = 0$. Werden die Integrale (29.) durch $\bar{u}_{k\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k$) bezeichnet, so erhält man nach I dieser No.

$$(40.)\quad e^{-w_k'(\xi)}(e^{w_k}\bar{y}_k)_{x=R(\xi)}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}} = K_1'\bar{u}_{k1} + K_2'\bar{u}_{k2} + \dots + K_{\alpha_k}'\bar{u}_{k\alpha_k}.$$

Dann wird (39.) gleich (vgl. (32.) bis (35.))

$$(41.)\quad K_1' Y_{0\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+1} + K_2' Y_{0\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+2} + \cdots + K_{\alpha_k}' Y_{0\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}+\alpha_k}.$$

Man erhält also auf diese Weise die Integrale (27.) durch die Integrale (31.) linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt. Diese constanten Coefficienten werden *rationale* Functionen von Constanten, die in den Grössen w_k, ν_{kb} (24.), ν_{kb}' (29.) und $R(\xi)$ vorkommen, mit rationalen Zahlen als Coefficienten.

Die Determinante der Integrale (27.) ist (s. No. 7 IIIb.)

$$\mu_{01}\,\mu_{02}\ldots\mu_{0\alpha_0+\cdots+\alpha_\lambda}.$$

Ebenso die Determinante der Integrale (31.) $\mu_{01}'\,\mu_{02}'\ldots\mu_{0\alpha_0+\cdots+\alpha_\lambda}'$.

Wenn ein Integralsystem von $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, x) = 0$ bei $x = \infty$ mit einem solchen bei einem Punkte im Endlichen in Beziehung gesetzt werden soll, so hat man nach den Forderungen von No. 1 (Schluss) $x = t^{-1}$ in $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, x) = 0$ einzusetzen, wodurch

$$F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, x) = (-t^2)^{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l} F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}'(y, t)$$

wird, alsdann ist auf die Differentialgleichung $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}'(y, t) = 0$ eine rationale Substitution ersten Grades $t = R(\xi)$ anzuwenden, in welcher dem Punkte $t = 0$ ein Punkt ξ im Endlichen entspricht. Ist $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke gegeben, so wird nach Abhandlung Bd. 83 No. 9 (12.) (oder diese No. (20.)) $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}'(y, t)$ ebenfalls durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt. Wird nun vorausgesetzt, dass, wenn der charakteristische Index in $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}'(y, t) = 0$ bei $t = 0$ grösser als Null ist, der Differentialausdruck $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}'(y, t)$ sich durch ein solches System normaler Differentialausdrücke darstellen lasse, welches bei $t = 0$ die Beschaffenheit hat, die von dem System (21.) in Bezug auf die Wurzeln der Exponentengleichungen angenommen ist, so kommt man auf das Vorhergehende zurück.

Ueberhaupt soll von dem Differentialausdrucke $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, x)$ *vorausgesetzt werden, dass derselbe bei jedem Punkte, wo der charakteristische Index in* $F_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, x) = 0$ *grösser als Null ist, sich durch ein solches System normaler Differentialausdrücke darstellen lasse, welches, wenn es in ein System wie* (21.) *übergeführt ist, die dort in Bezug auf die Exponentengleichungen gemachte Annahme erfüllt.* Der Differentialausdruck $G_{\mathfrak{a}_0+\cdots+\mathfrak{a}_l}(y, \xi)$ hat dann

dieselbe Eigenschaft. Dieses ist für den Fall, dass die entsprechenden Punkte x und ξ beide im Endlichen liegen, durch die Beziehungen zwischen den Systemen (21.) und (22.) gegeben, und auf diesen Fall kommen vermittelst der Substitutionen $x = \frac{1}{t}$, $\xi = \frac{1}{t'}$ diejenigen Fälle zurück, wo einer der entsprechenden Punkte x und ξ oder beide im Unendlichen liegen.

3.

Wenn man nun bei der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ in No. 1 die Punkte $x = a$ und $x = b$ so angenommen hat, dass durch b ein Kreis gelegt ist, innerhalb dessen Peripherie a liegt und ausserhalb dessen Peripherie alle übrigen singulären Punkte der Differentialgleichung (ausser etwa a oder b) liegén, so wird zu dem Zwecke, die linearen Beziehungen eines Integralsystems bei a zu einem bei b aufzusuchen, nach No. 1 auf die Differentialgleichung die rationale Substitution ersten Grades (20.) angewandt, durch welche der betrachtete Kreis in der x-Ebene conform auf den Kreis in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 so abgebildet wird, dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$ und dem Punkte $x = b$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht. Die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ geht durch diese Substitution in $G_m(y, \xi) = 0$ über, wo

$$F_m(y, x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-m} G_m(y, \xi)$$

ist. Die singulären Punkte der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ liegen abgesehen etwa von $\xi = 0$ und $\xi = 1$ ausserhalb der Peripherie des Kreises in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1.

Es sei jetzt bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ je ein System linearunabhängiger Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ entwickelt. Das System bei $\xi = 0$ soll durch das System bei $\xi = 1$ ausgedrückt werden, wenn beide Systeme im Innern des Gebietes angenommen werden, welches von dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 und von einem Kreise mit dem Punkte $\xi = 1$ als Mittelpunkt und einem Radius < 1 begrenzt wird.

Zunächst werde der Fall betrachtet, wo in $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ und $x = b$ und daher in $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ der charakteristische Index gleich Null ist.

Das System bei $\xi = 0$ sei $y_{01}, y_{02}, \ldots y_{0m}$, das System bei $\xi = 1$

sei $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}$. Dann hat man

$$(1.)\quad y_{0k} = C_{k1}y_{11}+C_{k2}y_{12}+\cdots+C_{km}y_{1m}\quad (k=1\ldots m),$$

wo C Constanten, die zu ermitteln sind.

Aus (1.) erhält man durch Differentiation

$$(2.)\quad \frac{d^{\mathfrak{a}}y_{0k}}{d\xi^{\mathfrak{a}}} = C_{k1}\frac{d^{\mathfrak{a}}y_{11}}{d\xi^{\mathfrak{a}}}+C_{k2}\frac{d^{\mathfrak{a}}y_{12}}{d\xi^{\mathfrak{a}}}+\cdots+C_{km}\frac{d^{\mathfrak{a}}y_{1m}}{d\xi^{\mathfrak{a}}}\quad (\mathfrak{a}=1\ldots m-1).$$

Die Determinante des Gleichungssystems (1.) und (2.) bei einem und demselben Werthe k sei D, der Coefficient von $\frac{d^r y_{1s}}{d\xi^r}$ in derselben sei D_{rs}. Dann erhält man durch Auflösen des Gleichungssystemes:

$$(3.)\quad C_{k\mathfrak{b}} = \frac{D_{0\mathfrak{b}}}{D}y_{0k}+\frac{D_{1\mathfrak{b}}}{D}\frac{dy_{0k}}{d\xi}+\cdots+\frac{D_{m-1\,\mathfrak{b}}}{D}\frac{d^{m-1}y_{0k}}{d\xi^{m-1}}\quad (\mathfrak{b}=1\ldots m).$$

Die Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m(y,\xi)=0$ bei $\xi=1$ seien

$$(4.)\quad r_1,\; r_2,\; \ldots\; r_m.$$

Die Entwickelung der Determinante D bei $\xi=1$ hat nun die Form (s. No. 2, (10.), (24.)):

$$(5.)\quad (\xi-1)^{\sum_1^m r_{\mathfrak{a}}-\frac{m(m-1)}{2}}\sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}}(\xi-1)^{\mathfrak{a}},$$

wo c_0 von Null verschieden ist. Diese Constante $c_0 = C$ ist unmittelbar aus der Determinante D, in deren Elementen die Logarithmen mit ihren Factoren weggelassen sind, zu bestimmen.

Es soll nun das Verhalten der Grössen auf der rechten Seite der Gleichung* (3.) *bei unendlicher Annäherung von* ξ *an* 1 *untersucht werden.

Da, wenn $\sum_1^m r_{\mathfrak{a}}-\frac{m(m-1)}{2}=R$ gesetzt wird, $\lim_{\xi=1}\frac{(\xi-1)^{-R}D}{C}=1$ und daher $\lim_{\xi=1}\frac{(\xi-1)^{-R}D}{C}C_{k\mathfrak{b}}=C_{k\mathfrak{b}}$, so ist

$$(6.)\quad \begin{cases} C_{k\mathfrak{b}} = \lim_{\xi=1}\left\{\frac{(\xi-1)^{-R}D_{0\mathfrak{b}}}{C}y_{0k}+\frac{(\xi-1)^{-R}D_{1\mathfrak{b}}}{C}\frac{dy_{0k}}{d\xi}+\cdots+\frac{(\xi-1)^{-R}D_{m-1\,\mathfrak{b}}}{C}\frac{d^{m-1}y_{0k}}{d\xi^{m-1}}\right\}. \\ \qquad (\mathfrak{b}=1\ldots m). \end{cases}$$

Der (algebraisch) kleinste der reellen Theile der Grössen $r_1, r_2, \ldots r_m$ ***sei*** ϱ. Die Integrale y_{1k} $(k=1\ldots m)$ sind linear mit constanten Coefficienten aus solchen Integralen zusammengesetzt, die bezüglich zu den Exponenten r_1 bis r_m gehören (s. d. Abh. des Herrn ***Fuchs*** Bd. 66 dieses Journals p. 155). Da

$$(7.)\quad \lim_{u=0}u^{\varepsilon+i\eta}(\log u)^n = \lim_{u=0}e^{\varepsilon\log\mathrm{Mod}\,u-\eta\theta+i(\varepsilon\theta+\eta\log\mathrm{Mod}\,u)}(\log\mathrm{Mod}\,u)^n\left(1+\frac{i\theta}{\log\mathrm{Mod}\,u}\right)^n = 0,$$

wenn ε reell und > 0, η reell, $u = \text{Mod}\, u e^{i\theta}$, n ganzzahlig $\geqq 0$ ist, so folgt aus (1.), dass $\lim\limits_{\xi=1} y_{(1)k} (\xi-1)^{-\varrho+\varepsilon} = 0$, und aus (2.), dass $\lim\limits_{\xi=1} \frac{d^{\alpha} y_{(1)k}}{d\xi^{\alpha}} (\xi-1)^{-\varrho+\alpha+\varepsilon} = 0$. wo ε reell und > 0 ist.

Ist aber ϱ ganzzahlig und $0 \leqq \varrho < \alpha$, ist der Exponent $r_1, r_2, \ldots r_m$, in welchem ϱ als reeller Theil vorkommt, reell und ϱ eine einfache Wurzel der Exponentengleichung, so ist schon $\lim\limits_{\xi=1} \frac{d^{\alpha} y_{(1)k}}{d\xi^{\alpha}} (\xi-1)^{-\varrho+\alpha-\varepsilon'} = 0$, wo ε' reell und $0 < \varepsilon' < \varepsilon_1$, ε_1 aus der Reihe, welche die Differenzen zwischen den von ϱ verschiedenen reellen Theilen der Grössen $r_1, r_2, \ldots r_m$ einerseits und zwischen ϱ andererseits und welche die Zahl 1 enthält, der kleinste Werth ist. Dieses folgt daraus, dass in der Entwickelung eines Integrales bei $\xi = 1$, welches zu ϱ gehört, eine Potenzreihe mit dem Anfangsgliede $(\xi-1)^{\varrho}$ (mit von Null verschiedenem Coefficienten) nicht mit $(\log(\xi-1))^n$, $n \geqq 1$, multiplicirt sein kann, weil ϱ einfache Wurzel der Exponentengleichung ist. Um dieses nachzuweisen ist Folgendes zu bemerken.

Ist Y ein von $x-a$ abhängender Ausdruck von der Entwickelungsform eines regulären Integrales, der zu dem Exponenten r gehört, und ist die n^{te} $(n \geqq 0)$ Potenz des $\log(x-a)$ die höchste von denen, deren Factoren zu r gehören, so ist in dem Ausdrucke $\int Y dx$, wo die Integrationsconstante annullirt wird, wenn r von -1 verschieden ist, ebenfalls die n^{te} Potenz des $\log(x-a)$ die höchste von denen, deren Factoren zu $r+1$ gehören, zu welchem Exponenten der Gesammtausdruck gehört; ist aber $r = -1$, so hat die $(n+1)^{\text{te}}$ Potenz diese Eigenschaft. Wendet man dieses auf die Entwickelung der Integrale einer Gruppe, in welcher die Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, unter der Form (10.) und (11.) No. 2 an, wo die Integrationsconstanten annullirt werden, so ergiebt sich in Bezug auf die erhaltenen Entwickelungen Nachstehendes: Gehört ein Integral zu einer einfachen Wurzel der Exponentengleichung, so gehört in der Entwickelung desselben nur das von Logarithmen freie Glied zu diesem Exponenten. Bei einer s-fachen Wurzel der Exponentengleichung ist unter den s aufeinanderfolgenden Entwickelungen, die zu dieser Wurzel als Exponenten gehören, in der l^{ten} $(l = 1 \ldots s)$ die $(l-1)^{\text{te}}$ Potenz des $\log(x-a)$ die höchste von denjenigen Potenzen in dieser Entwickelung, deren Factoren zu diesem Exponenten gehören. Wird nun aus Integralen dieser Gruppe linear mit constanten (von Null verschiedenen) Coefficienten ein Integral zusammen-

gesetzt und ist unter den Exponenten, zu denen diese Integrale gehören, r derjenige mit dem kleinsten reellen Theile, so muss das zusammengesetzte zu dem Exponenten r gehören, der also Wurzel der Exponentengleichung ist, und wenn diese eine einfache Wurzel ist, so kann nur das von Logarithmen freie Glied in dem zusammengesetzten Integrale zu diesem Exponenten gehören. (Vgl. d. Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 68 dieses Journals p. 365.)

In der Entwickelung von $(\xi-1)^{-R}D_{\mathfrak{ab}}$ $(\mathfrak{a}=0\ldots m-1)$ muss daher jeder Ausdruck der Form $(\xi-1)^{\eta}\sum_{1}^{\infty}c_{\lambda}(\xi-1)^{\lambda}(\log(\xi-1))^{\kappa}$, in welchem der reelle Theil von η grösser als $-\varrho+\mathfrak{a}$ ist, mit $\frac{d^{\mathfrak{a}}y_{lk}}{d\xi^{\mathfrak{a}}}$ multiplicirt, ein Product geben, welches für $\xi=1$ verschwindet.

Es sind daher in der Entwickelung von $(\xi-1)^{-R}D_{\mathfrak{ab}}(\mathfrak{a}=0\ldots m-1)$ in (6.) diejenigen Glieder in den Potenzreihen wegzulassen, in denen der reelle Theil des Exponenten *grösser* als $-\varrho+\mathfrak{a}$ ist. Ist aber ϱ ganzzahlig und $0\leqq\varrho<\mathfrak{a}$, ist der Exponent $r_1, r_2, \ldots r_m$, in welchem ϱ als reeller Theil vorkommt, reell und ϱ einfache Wurzel der Exponentengleichung, so sind in den Potenzreihen, die in der Entwickelung von $(\xi-1)^{-R}D_{\mathfrak{ab}}$ in (6.) vorkommen, die Glieder wegzulassen, in denen der reelle Theil des Exponenten *gleich oder grösser* als $-\varrho+\mathfrak{a}$ ist.

Der beibehaltene Theil von $(\xi-1)^{-R}D_{\mathfrak{ab}}$ *werde durch* $F_{\mathfrak{ab}}$ *bezeichnet.*

Wenn die Integrale $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}$ bezüglich zu den Exponenten $r_1, r_2, \ldots r_m$ gehören, wo r_1 der Exponent mit dem grössten reellen Theile, r_m mit ϱ als reellem Theile (auf welchen Fall man nach No. 2 I jeden anderen zurückführen kann), so enthält $D_{\mathfrak{ab}}(\xi-1)^{-R+r_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{a}}$ nur Potenzen von $\xi-1$ mit positiven ganzzahligen Exponenten (incl. 0), also auch $F_{\mathfrak{ab}}(\xi-1)^{r_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{a}}$, so dass $\lim_{\xi=1}F_{\mathfrak{ab}}(\xi-1)^{r_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{a}+\varepsilon}=0$, wo ε reell und >0. Zur Bildung von $F_{\mathfrak{ab}}$ und C genügt es in diesem Falle in den Potenzreihen der Entwickelung von $y_{1\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}=1\ldots m)$ die $q+1$ Glieder von $(\xi-1)^{r_{\mathfrak{b}}}$ an gerechnet zu ermitteln, wo die ganze Zahl q so beschaffen ist, dass, wenn der reelle Theil von r_1-r_m durch $\Re(r_1-r_m)$ bezeichnet wird, $q\leqq\Re(r_1-r_m)<q+1$. (In Betreff dieser Entwickelung vgl. Abh. Bd. 83 dieses Journals No. 9 nach (21.))

Nun können Functionen der Form $(\xi-1)^{r}$ und $(\log(\xi-1))^{\kappa}$ durch Potenzreihen der Form $\sum_{0}^{\infty}c_{\lambda}\xi^{\lambda}$ entwickelt werden, die innerhalb des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 convergiren. Daher haben die Functionen $F_{\mathfrak{ab}}$ ebenfalls solche Entwickelungen. Aus (6.) geht

nun hervor

$$(8.)\quad C_{k\mathfrak{b}} = \lim_{\xi=1}\left\{\frac{F_{0\mathfrak{b}}}{C}y_{0k} + \frac{F_{1\mathfrak{b}}}{C}\frac{dy_{0k}}{d\xi} + \cdots + \frac{F_{m-1\mathfrak{b}}}{C}\frac{d^{m-1}y_{0k}}{d\xi^{m-1}}\right\},\quad (\mathfrak{b} = 1\dots m).$$

wo für y_{0k} seine in dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 geltende Entwickelung einzusetzen ist. (Vgl. die Abhandlung des Herrn ***Fuchs*** Bd. 75 dieses Journals p. 211 und 212.)

Was aber die Entwickelung von y_{0k} angeht, so setzt sich dieses Integral linear mit constanten Coefficienten zusammen aus Integralen der Form (2.) in No. 1, die so beschaffen sind, dass zwischen den Grössen $\xi^r\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi)$ einer Gruppe die Relationen bestehen, dass $\xi^r\varphi_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 2\dots l)$ sich linear mit constanten Coefficienten aus den Grössen $\xi^r\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}$ $(\mathfrak{a} = 1\dots l-1)$ zusammensetzt. Diese Beschaffenheit haben die Integrale, die aus der Form (10.) (11.) in No. 2 hervorgehen, wo die Integrationsconstanten annullirt werden, wie sich ergiebt, wenn man mittels der Ausdrücke No. 2 (10.) in den Integralen den Umgang um $x = a$ macht, die erhaltenen Werthe durch die ursprünglichen Integrale ausdrückt und in diese Gleichungen die Entwickelungen einsetzt. (Vgl. Abh. Bd. 83 No. 9 (25.) etc.). Man bezeichne die m linearunabhängigen Integrale dieser Beschaffenheit, vermittelst welcher y_{0k} dargestellt wird, durch $y'_{01}, y'_{02}, \dots y'_{0m}$. Diese Integrale lassen sich durch y_{11} bis y_{1m} linear mit constanten Coefficienten ausdrücken, woraus sich ergiebt $\lim\limits_{\xi=1} y'_{0k}(\xi-1)^{-\varrho+\varepsilon} = 0$, $\lim\limits_{\xi=1}\frac{d^{\mathfrak{a}}y'_{0k}}{d\xi^{\mathfrak{a}}}(\xi-1)^{-\varrho+\mathfrak{a}+\varepsilon} = 0$, wo ε reell und > 0. Aus letzteren Gleichungen und den genannten linearen Relationen zwischen den Grössen $\xi^r\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi)$ folgt nun $\lim\limits_{\xi=1}\xi^r\varphi_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}(\xi)(\xi-1)^{-\varrho+\varepsilon} = 0$ und $\lim\limits_{\xi=1}\frac{d^{\mathfrak{a}}\xi^r\varphi_{\mathfrak{f}\mathfrak{b}}(\xi)}{d\xi^{\mathfrak{a}}}(\xi-1)^{-\varrho+\mathfrak{a}+\varepsilon} = 0$, wo ε reell und >0 (successive für $\mathfrak{a}=1,2\dots$). Daraus folgt, wenn man in der Entwickelung von y_{0k} den Coefficienten irgend einer Potenz des $\log\xi$ durch $f(\xi)$ bezeichnet, $\lim\limits_{\xi=1} f(\xi)(\xi-1)^{-\varrho+\varepsilon} = 0$ und $\lim\limits_{\xi=1}\frac{d^{\mathfrak{a}}f(\xi)}{d\xi^{\mathfrak{a}}}(\xi-1)^{-\varrho+\mathfrak{a}+\varepsilon} = 0$, wo ε reell und > 0.

Nun werde in y_{0k} die Grösse $(\log\xi)^{\mathfrak{r}} = (\log(1+\xi-1))^{\mathfrak{r}}$ nach Potenzen von $\xi-1$ entwickelt. Es soll ferner ***eine Grösse*** $\varrho_{\mathfrak{b}}$ so angenommen werden, dass in $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi-1)^{\varrho_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{a}}$ die reellen Theile der Exponenten von $\xi-1 \geqq 0$ sind, so dass $\lim\limits_{\xi=1} F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi-1)^{\varrho_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{a}+\varepsilon}=0$, ε reell und >0, wo $\varrho_{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{a}$ unabhängig sein soll. Wenn die Integrale y_{11} bis y_{1m} bezüglich zu den Exponenten r_1 bis r_m gehören, ***so ist*** $\varrho_{\mathfrak{b}} = r_{\mathfrak{b}}$ ***zu setzen.*** In der Entwickelung von $(\log(1+\xi-1))^{\mathfrak{r}}$

muss ein Ausdruck der Form $(\xi-1)^{\eta}\sum_0^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(\xi-1)^{\mathfrak{a}} = Z$, worin η grösser als der reelle Theil von $\varrho_{\mathfrak{b}}-\varrho$ ist, so beschaffen sein, dass $\frac{d^{\mathfrak{a}-l}Z}{d\xi^{\mathfrak{a}-l}} (l = 0 \dots \mathfrak{a})$ mit $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \frac{d^l f(\xi)}{d\xi^l}$ multiplicirt, ein Product giebt, welches für $\xi = 1$ verschwindet.

Daher sind in y_{0k} *in* (8.) *in der Entwickelung von* $(\log(1+\xi-1))^n$ *nach Potenzen von* $\xi-1$ *diejenigen Glieder, deren Exponenten grösser als der reelle Theil von* $\varrho_{\mathfrak{b}}-\varrho$ *sind, wegzulassen, und der übrige Theil von* y_{0k} *ist statt* y_{0k} *in* $\frac{d^{\mathfrak{a}} y_{0k}}{d\xi^{\mathfrak{a}}} (\mathfrak{a} = 0 \dots m-1)$ *in* (8.) *einzusetzen.*

Es werde nun von den Integralen $y_{0k}(k = 1 \dots m)$ *vorausgesetzt, dass die Exponenten der Potenzen von* ξ *innerhalb der Entwickelung eines jeden Integrales* y_{0k} *sich nur um ganze Zahlen unterscheiden* (auf welchen Fall man nach No. 2, I jeden anderen zurückführen kann). Dann tritt an die Stelle der Grösse auf der rechten Seite von (8.) ein Ausdruck der Form $\xi^r \sum_0^{\infty} c_{\mathfrak{a}} \xi^{\mathfrak{a}}$. Nun ist $\lim_{\xi=1} (\xi^r) = e^{rk2\pi i}$, wo k eine bestimmte ganze Zahl ist, daher

$$C_{k\mathfrak{b}} = \lim_{\xi=1} \left\{ e^{rk2\pi i} \sum_0^{\infty} c_{\mathfrak{a}} \xi^{\mathfrak{a}} \right\}.$$

Man hat also

$$(9.) \qquad C_{k\mathfrak{b}} = \lim_{\xi=1} \mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi), \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots m)$$

wo $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ *eine nach Potenzen von* ξ *mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreitende Reihe ist, die innerhalb des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius* 1 *convergirt, die man nach dem Vorhergehenden zusammensetzen kann und deren Coefficienten rationale Functionen von Constanten sind, die in den Entwickelungen von* $\frac{F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{C} (\mathfrak{a} = 0 \dots m-1)$, y_{0k}, *vorkommen, und der Constanten* πi, $e^{r\log 1} = \lim_{\xi=1} (\xi^r)$, *wo* ξ^r *in der Entwickelung von* y_{0k} *vorkommt, mit rationalen Zahlen als Coefficienten.*

Wenn die Integrale $y_{1\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 1 \dots m)$ *bezüglich zu den Exponenten* $r_{1\mathfrak{b}}(\mathfrak{b} = 1 \dots m)$ *gehören, so ist* $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi) = e^{r\log 1 - r_{\mathfrak{b}}\log(-1)} \mathfrak{P}'_{k\mathfrak{b}}(\xi)$, *wo die Coefficienten der Potenzreihe* $\mathfrak{P}'_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ *rationale Functionen von Constanten sind, die in den Entwickelungen von* $y_{1\mathfrak{b}}(\mathfrak{b} = 1 \dots m)$ *und* y_{0k} *vorkommen, und von* πi *mit rationalen Zahlen als Coefficienten.* Ueber die zur Darstellung von $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ nothwendige Entwickelung von y_{0k} in dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 folgen weitere Untersuchungen in No. 7.

Die Functionen $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} = 0 \dots m-1)$ lassen sich über die Peripherie des um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1 geschlagenen

Kreises hinaus in einem solchen endlichen Ebenenstreifen, der den Punkt $\xi = 1$ nicht enthält, einwerthig und stetig fortsetzen. Dasselbe gilt, weil auf der Peripherie des genannten Kreises, abgesehen etwa von $\xi = 1$, *kein singulärer* Punkt der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ liegt, von den oben angegebenen Integralen $y'_{(\lambda)}$ und daher von den Functionen $\xi^r \varphi_{\lambda b}(\xi)$, vermöge der zwischen letzteren bestehenden linearen Relationen, demnach auch von jedem Factor einer Grösse $(\log \xi)^\kappa$ in der Entwickelung von $y_{(k)}$.

Die Function, welche innerhalb des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 *durch die Potenzreihe* $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ *gegeben ist, hat daher die Eigenschaft, dass sie innerhalb des Gebietes einwerthig und stetig bleibt, welches begrenzt wird von dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, welcher durch den dem Nullpunkt nächsten singulären Punkt* a *der Differentialgleichung* $G_m(y, \xi) = 0$, *bei dem* $\text{Mod}\, a > 1$ *ist, gelegt ist, und von einer beliebigen, sich selbst nicht schneidenden Linie, welche von irgend einem Punkte der Peripherie dieses Kreises aus ausserhalb des concentrischen Kreises mit dem Radius* 1 *zu dem Punkte* $\xi = 1$ *gezogen ist.*

Es soll jetzt die unendliche Annäherung von $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ an C_{kb}, wenn ξ sich dem Werthe 1 unbegrenzt nähert, weiter erörtert werden.

Innerhalb des eben genannten Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius > 1 werde um den Punkt $\xi = 1$ als Mittelpunkt ein Kreis mit dem Radius σ_1 und zu demselben concentrisch ein Kreis mit dem Radius σ_2 geschlagen, so dass $1 > \sigma_1 > \sigma_2$ ist, und es werden diese beiden Peripherien durch die zwischen ihnen liegende Strecke auf der Axe der reellen Grössen zwischen $+1$ und $+\infty$, mit einander verbunden. Dann bildet diese Strecke, doppelt gerechnet, mit den beiden Peripherien eine einzige geschlossene Linie. Das von dieser Linie umgrenzte Gebiet, die Begrenzung einbegriffen, sei S. Die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ ist in S einwerthig und stetig. Die unendliche Annäherung von $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ an C_{kb}, wenn ξ gegen 1 convergirt, findet nun in der Weise statt, *dass, wenn man eine beliebig kleine reelle Grösse* $\delta > 0$ *vorschreibt, es immer ein solches Gebiet* S *giebt, in welchem der Radius* σ_1 *constant bleibt,* σ_2 *beliebig klein wird, so dass der Werth von* $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ *für jeden Punkt* ξ *in dem Gebiete* S *sich von* C_{kb} *um eine Grösse unterscheidet, deren Modul kleiner als* δ *ist.*

Um dieses zu zeigen, möge zur Abkürzung eine Function von ξ, für die es jedesmal ein Gebiet S, in welchem σ_1 constant bleibt, σ_2 unendlich klein wird, giebt von der Art, dass in demselben der Modul der in S ein-

werthigen und stetigen Function kleiner bleibt als δ', wo δ' eine beliebig klein gewählte vorgeschriebene reelle Grösse > 0 ist, durch T bezeichnet werden.

Nun gilt zunächst die Gleichung (3.). Dieselbe wird multiplicirt mit $\frac{(\xi-1)^{-R}D}{C} = 1+\gamma$, wo γ die Beschaffenheit von T hat. $C_{kb}+C_{kb}\gamma$ ist gleich der Grösse auf der rechten Seite von (6.). $C_{kb}\gamma$ hat die Beschaffenheit von T, daher hat die Grösse auf der rechten Seite von (6.) die in dem zu beweisenden Satze von $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ ausgesagte Eigenschaft. Dasjenige, was auf der rechten Seite von (6.) weggelassen wird, um den Ausdruck auf der rechten Seite von (8.) zu erhalten, hat die Beschaffenheit von T, ebenso was auf der rechten Seite von (8.) weggelassen wird, um den Ausdruck $\xi^r(\lim_{\xi=1}\xi^r)^{-1}\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ zu erhalten. Daher hat dieser Ausdruck die in dem zu beweisenden Satze von $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ behauptete Eigenschaft. $\xi^{-r}\lim_{\xi=1}(\xi^r) = 1+\gamma'$, wo γ' die Beschaffenheit von T hat; dieselbe Beschaffenheit hat $\gamma'\xi^r(\lim_{\xi=1}\xi^r)^{-1}\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$, daher muss $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ die zu beweisende Eigenschaft besitzen.

4.

Es ist nach (9.) der vorigen Nummer in Bezug auf die Constante C_{kb} ermittelt worden, dass

$$(1.) \qquad C_{kb} = \lim_{\xi=1}\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$$

ist, wo die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ innerhalb des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 durch eine nach Potenzen von ξ mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreitende Reihe gegeben ist, und in Betreff der Fortsetzung über die Peripherie dieses Kreises und des Verhaltens bei unendlicher Annäherung von ξ an 1 die in voriger Nummer angegebenen Eigenschaften besitzt. *Nun ist zu untersuchen erstens, ob die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ noch für $\xi = 1$ convergirt und zweitens, ob alsdann $\mathfrak{P}_{kb}$ (1.) gleich C_{kb} ist.*

Die zweite Frage ist immer zu bejahen, sobald $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ noch für $\xi = 1$ convergirt. Denn wenn die Potenzreihe $\sum_0^\infty c_\alpha\xi^\alpha$ für $\xi = 1$ convergirt, so convergirt dieselbe für alle reellen Werthe ξ, $0 \leq \xi \leq 1$, und ist für dieses Gebiet eine endliche und stetige Function von ξ. Damit eine Reihe $\sum_0^\infty u_\alpha$ convergirt, ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass wenn ε eine beliebig kleine vorgeschriebene reelle Grösse > 0 ist, es einen Stellenzeiger ν giebt, so dass $\operatorname{Mod}\sum_\nu^{\nu+\varrho} u_\alpha < \varepsilon$ ist, wo ϱ beliebig wachsen kann. Ist jede der Grössen u_α in einem für alle u_α übereinstimmenden Bereiche von x die

Begrenzung einbegriffen, eine endliche für die Werthe x in diesem Bereiche (dem Modul nach unterhalb einer endlichen Grenze A liegende) Function von x, soll die Reihe für jeden einzelnen Werth von x convergiren und zwar so, dass der Unterschied zwischen $\sum_0^{\mu+\varrho} u_\alpha$ ($\varrho = 1, 2, \dots \infty$) und der Grenze dem Modul nach kleiner ist, als eine beliebig kleine *fixirte* reelle Grösse > 0, wenn *derselbe* Stellenzeiger μ überschritten ist bei *beliebigen* Werthen von x in dem betreffenden Bereiche, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass, wenn ε eine beliebig kleine vorgeschriebene reelle Grösse > 0 ist, es einen Stellenzeiger ν giebt, so dass bei fixirtem ν $\text{Mod} \sum_\nu^{\nu+\varrho} u_\alpha < \varepsilon$, wo ϱ beliebig wachsen kann, während x in jenem Bereiche beliebig bleibt. Diese Convergenz nennt man (nach Herrn *Weierstrass*) *Convergenz in gleichem Grade*. Aus derselben folgt, wenn die Functionen u_α stetig sind, dass die Reihe eine endliche und stetige Function von x ist. Dass die Potenzreihe $\sum_0^\infty c_\alpha \xi^\alpha$, wenn sie für $\xi = 1$ convergirt, für $0 \leqq \xi \leqq 1$ die Bedingung der Convergenz in gleichem Grade erfüllt und dass hieraus die Stetigkeit der Reihe folgt, hat für den Fall reeller Coefficienten *Abel* bewiesen (Recherche sur la série $1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \cdots$, Beweis des théorème IV; vgl. auch dort die Anmerkung). Der Fall c_α complex gleich $g_\alpha + h_\alpha i$ kommt auf den vorigen zurück, indem die Reihe in $\sum_0^\infty g_\alpha \xi^\alpha + i \sum_0^\infty h_\alpha \xi^\alpha$ zerfällt. (Ueber die Convergenz in gleichem Grade vgl. die Abh. des Herrn *Seidel*, baier. Acad. 1848.) Convergirt also die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ noch für $\xi = 1$, so folgt aus dem Vorhergehenden und (1.), dass

$$(2.) \qquad C_{kb} = (\mathfrak{P}_{kb}(\xi))_{\xi=1}.$$

Es bleibt demnach zu untersuchen, ob die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi) = \sum_0^\infty c_\alpha \xi^\alpha$ noch für $\xi = 1$ convergirt. Man hat

$$(3.) \qquad c_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mathfrak{P}_{kb}(\xi_1)}{\xi_1^{\alpha+1}} d\xi_1 = \frac{1}{2\pi \varrho^\alpha} \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_{kb}(\varrho e^{i\theta_1}) e^{-i\alpha\theta_1} d\theta_1,$$

wenn $\xi_1 = \varrho e^{i\theta_1}$ und der Radius $\varrho < 1$ genommen wird. $\mathfrak{P}_{kb}(\varrho e^{i\theta_1})$ habe zum reellen Theile $u(\varrho, \theta_1)$ und zum Coefficienten von i $v(\varrho, \theta_1)$. Nun folgt aus

$$(4.) \qquad \int \mathfrak{P}_{kb}(\xi_1) \xi_1^{\alpha-1} d\xi_1 = 0, \quad (\alpha = 1 \dots \infty)$$

wo über die Peripherie des Kreises mit dem Radius ϱ integrirt wird,

$$(5.) \qquad \varrho^\alpha i \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_{kb}(\varrho e^{i\theta_1}) e^{i\alpha\theta_1} d\theta_1 = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$(6.)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} (u(\varrho, \theta_1) \cos \mathfrak{a}\theta_1 - v(\varrho, \theta_1) \sin \mathfrak{a}\theta_1) d\theta_1 = 0, \\ \int_0^{2\pi} (u(\varrho, \theta_1) \sin \mathfrak{a}\theta_1 + v(\varrho, \theta_1) \cos \mathfrak{a}\theta_1) d\theta_1 = 0. \end{cases}$$

Gemäss (3.) ist

$$(7.)\quad \begin{cases} c_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{2\pi\varrho^{\mathfrak{a}}} \Big\{ \int_0^{2\pi} (u(\varrho, \theta_1) \cos \mathfrak{a}\theta_1 + v(\varrho, \theta_1) \sin \mathfrak{a}\theta_1) d\theta_1 \\ \qquad - i \int_0^{2\pi} (u(\varrho, \theta_1) \sin \mathfrak{a}\theta_1 - v(\varrho, \theta_1) \cos \mathfrak{a}\theta_1) d\theta_1 \Big\}, \quad (\mathfrak{a} = 0 \dots \infty) \end{cases}$$

Setzt man

$$(8.)\quad \xi = \varrho e^{i\theta}, \quad (\theta = 0 \dots 2\pi),$$

so erhält man mittels (6.) und (7.)

$$(9.)\quad \begin{cases} c_{\mathfrak{a}} \xi^{\mathfrak{a}} = \frac{1}{\pi} \Big\{ \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta_1) \cos \mathfrak{a}\theta_1 \, d\theta_1 \cos \mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta_1) \sin \mathfrak{a}\theta_1 \, d\theta_1 \sin \mathfrak{a}\theta \Big\} \\ \qquad + \frac{i}{\pi} \Big\{ \int_0^{2\pi} v(\varrho, \theta_1) \cos \mathfrak{a}\theta_1 \, d\theta_1 \cos \mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} v(\varrho, \theta_1) \sin \mathfrak{a}\theta_1 \, d\theta_1 \sin \mathfrak{a}\theta \Big\} \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a} = 1 \dots \infty) \end{cases}$$

und aus (7.)

$$(10.)\quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \Big\{ \int_0^{2\pi} u(\varrho, \theta_1) d\theta_1 + i \int_0^{2\pi} v(\varrho, \theta_1) d\theta_1 \Big\}.$$

Es nimmt demnach, wie bekannt, der reelle Theil und der Coefficient von i in dem allgemeinen Gliede der Potenzreihe die Form des allgemeinen Gliedes in der Darstellung von $u(\varrho, \theta)$ bezüglich $v(\varrho, \theta)$ durch die *Fourier*sche Reihe an. Nun hat nach No. 3 die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ die Eigenschaft, dass sie für die Werthe ξ auf der ganzen Fläche des Kreises um den Nullpunkt der ξ-Ebene als Mittelpunkt mit dem Radius 1, die Peripherie einbegriffen, dem Modul nach unterhalb einer endlichen Grenze liegt und eine stetige Function von ξ ist, die für $\xi = 1$ den Werth der Constante C_{kb} hat. Wird auf der Peripherie der reelle Theil derselben durch $u(1, \theta)$, der Coefficient von i durch $v(1, \theta)$ bezeichnet, so sind daher für $\theta = 0 \dots 2\pi$ die Functionen $u(1, \theta)$ und $v(1, \theta)$ dem absoluten Werthe nach kleiner als eine endliche Grenze A und stetige Functionen von θ, $u(1, 0) = u(1, 2\pi)$, $v(1, 0) = v(1, 2\pi)$.

Es ergiebt sich ferner, dass, wenn ε eine beliebig kleine vorgeschriebene reelle Grösse > 0 ist, es immer einen Radius aus dem Nullpunkte $\varrho_1 < 1$ giebt, so dass bei fixirtem ϱ_1, wenn ϱ_2 die Bedingung $\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq 1$ erfüllt, für alle Werthe θ, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ der absolute Werth

von $u(1,\theta)-u(\varrho_2,\theta)$ kleiner als ε und ebenso der absolute Werth von $v(1,\theta)-v(\varrho_2,\theta)$ kleiner als ε ist.

Denn nach No. 3 kann man um jeden auf der Peripherie des Kreises C mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 gelegenen Punkt a_α als Mittelpunkt einen Kreis K_α mit von Null verschiedenem Radius schlagen, so dass für Punkte ξ in dem gemeinschaftlichen Gebiete beider Kreise, die Punkte auf der Begrenzung mitgerechnet,

$$\text{Mod}(\mathfrak{P}_{kb}(\xi)-\mathfrak{P}_{kb}(a_\alpha))<\frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Man lasse nun von einem Punkt a_1 aus, um welchen der Kreis K_1 geschlagen ist, einen Punkt die Peripherie von C, ohne seine Richtung umzukehren, durchlaufen. Um den hierbei erreichten Durchschnittspunkt der Peripherie von K_1 und der des Kreises C a_2 schlage man einen Kreis K_2, um den hierauf erreichten Durchschnittspunkt von K_2 und C a_3 schlage man einen Kreis K_3 u. s. w.

Die Summe der Kreisbogen von a_1 zu a_2, von a_2 zu a_3 etc. soll kleiner oder gleich der Peripherie von C sein: wenn der Punkt a_α auf dem ersten Halbkreise von C, von a_1 aus, liegt, so ist der Bogen von a_α zu $a_{\alpha+1}$ höchstens gleich einem Halbkreise von C. Es muss nun ein System von Kreisen K dieser Art existiren, durch welches der Punkt a_1 selbst wieder erreicht wird, so dass der letzte Kreis durch a_1 hindurchgeht. Denn entweder man kann jeden vorhergehenden Punkt durch irgend ein solches Verfahren erreichen oder überschreiten, und dann ergiebt sich mittels der Eigenschaften eines Kreises K_1, wobei $\frac{\varepsilon}{4}$ statt $\frac{\varepsilon}{2}$ genommen wird, dass auch a_1 erreicht werden kann, oder es muss ein vorhergehender Punkt existiren, der die Eigenschaft hat, dass man ihn, welches derartige Verfahren man auch anwendet, nicht erreichen und nicht überschreiten kann. Wäre ein solcher Punkt a_γ vorhanden, so hätte auch jeder folgende Punkt dieselbe Eigenschaft; und wird ein Punkt a_β erreicht oder überschritten, so auch jeder vorhergehende Punkt. Nimmt man nun zwei solche Punkte a_β und a_γ, von denen der erstere erreicht oder überschritten werden könnte und demnach auch die vorhergehenden, und von denen der zweite nicht erreicht oder überschritten werden könnte und demnach auch die folgenden nicht, und schiebt in das zwischen ihnen liegende Kreisbogenintervall einen neuen Punkt a_δ ein, so tritt dieser an Stelle eines der Punkte a_β oder a_γ

mit der genannten Eigenschaft dieses Punktes; in dieses Intervall schiebt man einen weiteren Punkt ein u. s. w., so dass jedes folgende Intervall in dem vorhergehenden liegt und dabei die Intervalle unendlich klein werden, etwa indem man die Bogen fortwährend halbirt. Auf diese Weise ergiebt sich, dass ein Grenzpunkt a_x existiren müsste, so dass jeder folgende Punkt nicht zu erreichen oder überschreiten wäre, jeder vorhergehende erreicht oder überschritten wird. Dann könnte man aber mittels der Eigenschaften eines Kreises K_x, wobei $\frac{\varepsilon}{4}$ statt $\frac{\varepsilon}{2}$ genommen wird, zeigen, dass auch a_x zu erreichen wäre und auf a_x folgende Punkte überschritten werden könnten, entgegengesetzt der vorhergehenden aus der Annahme gezogenen Folgerung.

Es sei nun das genannte System der Kreise K, das von K_1 um a_1 als Mittelpunkt ausgeht und zu einem Kreise K durch a_1 zurückführt, aufgestellt. Zu den Punkten a_1, a_2, etc. seien die Radien R_1, R_2, etc. von dem Nullpunkte aus gezogen. Innerhalb des Kreises K_1 werde die Strecke, welche auf R_2 liegt, innerhalb des Kreises K_2, die Strecke auf R_3 etc. genommen, die kleinste dieser Strecken sei σ. Dann kann der gesuchte Werth des Radius ϱ_1 gleich $1-\tau$ gesetzt werden, wo $\sigma \geqq \tau > 0$ ist. Der Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius ϱ_1 sei C_1. Nimmt man nun die Stücke der Peripherie von C und C_1 zwischen den Radien R_1 und R_2, so liegt das von diesen beiden Bogenstücken und den Radien R_1 und R_2 eingeschlossene Gebiet ganz in K_1, und es ist, weil in diesem Kreise K_1 $\text{Mod}(\mathfrak{P}_{kb}(\xi)-\mathfrak{P}_{kb}(a_1)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, für jeden Werth θ in dem Kreissector zwischen R_1 und R_2 $\text{Mod}(u(1,\theta)+iv(1,\theta)-u(\varrho_2,\theta)-iv(\varrho_2,\theta)) < \varepsilon$. Entsprechend wenn man die Werthe θ in dem Kreissector zwischen R_2 und R_3 nimmt, wo der Kreis K_2 in Betracht kommt, u. s. w. Die oben aufgestellte Behauptung über die absoluten Werthe von $u(1,\theta)-u(\varrho_2,\theta)$ und $v(1,\theta)-v(\varrho_2,\theta)$ ist damit bewiesen. Convergirt nun in (9.) und (10.) ϱ gegen 1, so wird:

$$(11.)\quad \begin{cases} c_\mathfrak{a} e^{i\mathfrak{a}\theta} = \dfrac{1}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} u(1,\theta_1)\cos\mathfrak{a}\theta_1 d\theta_1 \cos\mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} u(1,\theta_1)\sin\mathfrak{a}\theta_1 d\theta_1 \sin\mathfrak{a}\theta\right\} \\ \qquad + \dfrac{i}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} v(1,\theta_1)\cos\mathfrak{a}\theta_1 d\theta_1 \cos\mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} v(1,\theta_1)\sin\mathfrak{a}\theta_1 d\theta_1 \sin\mathfrak{a}\theta\right\}. \\ \qquad\qquad (\mathfrak{a} = 1\ldots\infty) \end{cases}$$

$$(12.)\quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} u(1,\theta_1)\,d\theta_1 + i\int_0^{2\pi} v(1,\theta_1)\,d\theta_1\right\}.$$

Es ist jetzt zu untersuchen, ob die *Fourier*schen Reihen

$$(13.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\theta_1)\,d\theta_1 + \sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\Big\{\int_0^{2\pi} u(1,\theta_1)\cos\mathfrak{a}\theta_1\,d\theta_1\cos\mathfrak{a}\theta \\ \qquad + \int_0^{2\pi} u(1,\theta_1)\sin\mathfrak{a}\theta_1\,d\theta_1\sin\mathfrak{a}\theta\Big\}, \end{cases}$$

$$(14.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(1,\theta_1)\,d\theta_1 + \sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\Big\{\int_0^{2\pi} v(1,\theta_1)\cos\mathfrak{a}\theta_1\,d\theta_1\cos\mathfrak{a}\theta \\ \qquad + \int_0^{2\pi} v(1,\theta_1)\sin\mathfrak{a}\theta_1\,d\theta_1\sin\mathfrak{a}\theta\Big\} \end{cases}$$

convergiren und zwar in Rücksicht auf den hier vorliegenden Zweck speciell für $\theta = 0$.

Die Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ sind also für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ dem absoluten Werthe nach kleiner als eine endliche Grenze und stetige Functionen von θ, $u(1,0) = u(1,2\pi)$, $v(1,0) = v(1,2\pi)$. Wenn für eine dieser Functionen das Intervall von θ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ sich in eine endliche Anzahl Theile theilen lässt, so dass in jedem einzelnen Theile die Function mit wachsendem θ fortwährend entweder wächst, oder abnimmt, oder constant bleibt, so convergirt die bezügliche Reihe (13.) oder (14.) für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ und zwar gegen die betreffende Function als Grenze nach den bekannten Untersuchungen *Dirichlet*s im 4. Bd. dieses Journals p. 157.

Bewegt sich θ zwischen den Grenzen θ' und θ'', so dass

$$0 < \theta' \leqq \theta \leqq \theta'' < 2\pi$$

ist, so hat für die Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ dieses Intervall von θ die Eigenschaft, dass es in eine endliche Anzahl Theile zerfällt, so dass in jedem Theile die Function mit wachsendem θ fortwährend wächst oder abnimmt oder constant bleibt. Dieses ergiebt sich daraus, dass nach No. 3 die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ sich über den Theil der Peripherie des Kreises C mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 von θ' bis θ'' hinaus als einwerthige und stetige analytische Function fortsetzen lässt. Wird $\xi = \eta + i\zeta$ gesetzt, wo η und ζ reell sind und ein Punkt $a = \eta_0 + i\zeta_0$ auf der betrachteten Strecke der Peripherie von C genommen, so hat die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ innerhalb eines Kreises mit von Null verschiedenem Radius und a als Mittelpunkt eine Entwickelung der Form

$$\sum_0^\infty k_{\mathfrak{a}}(\xi - a)^{\mathfrak{a}} = \sum_0^\infty k_{\mathfrak{a}}(\eta - \eta_0 + i(\zeta - \zeta_0))^{\mathfrak{a}}.$$

Für die Punkte der betrachteten Curve ist $\eta^2+\zeta^2 = 1$, daraus folgt

$$(\eta-\eta_0)^2+(\zeta-\zeta_0)^2+2\eta_0(\eta-\eta_0)+2\zeta_0(\zeta-\zeta_0) = 0,$$

demnach wenn ζ mit ζ_0 im Vorzeichen übereinstimmt:

$$(15.)\quad \zeta = \zeta_0\left\{1-\frac{2\eta_0(\eta-\eta_0)}{\zeta_0^2}-\frac{(\eta-\eta_0)^2}{\zeta_0^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ebenso, wenn η mit η_0 im Vorzeichen übereinstimmt:

$$(16.)\quad \eta = \eta_0\left\{1-\frac{2\zeta_0(\zeta-\zeta_0)}{\eta_0^2}-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{\eta_0^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergeben sich die Entwickelungen

$$(17.)\quad \zeta-\zeta_0 = \sum_1^\infty \alpha_a(\eta-\eta_0)^a,$$

wenn ζ_0 von Null verschieden ist, und

$$(18.)\quad \eta-\eta_0 = \sum_1^\infty \beta_a(\zeta-\zeta_0)^a,$$

wenn η_0 von Null verschieden ist. Ist nun bei dem Punkte a ζ_0 von Null verschieden, so ist die Entwickelung (17.) anwendbar, sonst (18.). Wird in

$$\sum_0^\infty k_a(\eta-\eta_0+i(\zeta-\zeta_0))^a$$

die Entwickelung (17.) eingesetzt, so kann man, weil die Potenzreihe unbedingt convergirt (d. h. die Reihe der Moduln convergirt), nach aufsteigenden Potenzen von $\eta-\eta_0$ ordnen und erhält

$$(19.)\quad \mathfrak{P}_{kb}(\xi) = \sum_0^\infty l_a(\eta-\eta_0)^a,$$

wo die Reihe der rechten Seite, wenigstens solange der absolute Werth von $\eta-\eta_0$ kleiner als A ist, wo A eine gewisse von Null verschiedene positive Grösse, convergirt und die Gleichung (19.) erfüllt. Ist $l_a = g_a+ih_a$, g_a und h_a reell, so folgt aus (19.)

$$(20.)\quad \mathfrak{P}_{kb}(\xi) = \sum_0^\infty g_a(\eta-\eta_0)^a+i\sum_0^\infty h_a(\eta-\eta_0)^a.$$

Wenn die reellen Constanten g_a $(a>0)$ nicht alle gleich Null sind, so liefert $\frac{d}{d\eta}\sum_0^\infty g_a(\eta-\eta_0)^a$ multiplicirt mit $(\eta-\eta_0)^k$, wo k Null oder eine gewisse negative ganze Zahl ist, ein Product, welches für $\eta=\eta_0$ von Null verschieden ist, woraus folgt, dass für ein gewisses Intervall von η,

$$\eta_0+\varkappa \leqq \eta \leqq \eta_0+\lambda,\quad 0<\varkappa<\lambda,$$

wo $\varkappa$ bei constantem λ unendlich klein werden kann, $\frac{d}{d\eta}\sum_0^\infty g_a(\eta-\eta_0)^a$ sein Vorzeichen nicht wechselt und nicht verschwindet. Daher muss in diesem

Intervalle $\sum\limits_0^\infty g_\mathfrak{a}(\eta-\eta_0)^\mathfrak{a}$ mit wachsendem η fortwährend entweder wachsen oder abnehmen. Hieraus und aus der Stetigkeit von $\sum\limits_0^\infty g_\mathfrak{a}(\eta-\eta_0)^\mathfrak{a}$ folgt, dass diese Function mit wachsendem η von η_0 bis $\eta_0+\lambda$ fortwährend entweder wachsen oder abnehmen muss. Entsprechend ist es für ein Intervall von η_0 bis $\eta_0-\lambda'$, wo λ' reell und grösser als Null. Sind die Constanten $g_\mathfrak{a}(\mathfrak{a}>0)$ alle gleich Null, so ist $\sum\limits_0^\infty g_\mathfrak{a}(\eta-\eta_0)^\mathfrak{a}$ constant. Entsprechendes gilt für die Reihe $\sum\limits_0^\infty h_\mathfrak{a}(\eta-\eta_0)^\mathfrak{a}$. Ist bei dem Punkte a $\zeta_0=0$, so hat man in derselben Weise die Entwickelung (18.) anzuwenden.

Daraus folgt nun, wenn $a=e^{i\theta_0}$ ist, dass wenn θ von θ_0 bis $\theta_0+\theta_0'$ wächst, wo θ_0' eine gewisse reelle Grösse grösser als Null ist, $u(1,\theta)$ fortwährend entweder wächst, oder abnimmt, oder constant bleibt und dass, wenn θ von θ_0 bis $\theta_0-\theta_0'$ abnimmt, $u(1,\theta)$ fortwährend entweder wächst, oder abnimmt oder constant bleibt. Entsprechend bei $v(1,\theta)$.

Aus diesem Satze ergiebt sich durch Anwendung der oben zwischen (10.) und (11.) auseinandergesetzten Schlussweise der zu beweisende Satz.

Es ist jetzt das Verhalten der Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ in der Nähe von $\theta=0$ und $\theta=2\pi$ zu untersuchen.

Wenn die Exponentengleichung der Differentialgleichung $G_m(y,\xi)=0$ in No. 3 bei $\xi=1$ nur reelle Wurzeln besitzt, so kann man bei $\theta=0$ und $\theta=2\pi$ je ein Gebiet für θ abgrenzen, $0\leqq\theta\leqq\theta_1$, $2\pi\geqq\theta\geqq\theta_2$, so dass in einem solchen Gebiete jede der Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ mit wachsendem θ entweder nur wächst, oder nur abnimmt, oder constant bleibt.

Man hat, um dieses zu zeigen, den Ausdruck der Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ für Werthe ξ in der Nähe von $\xi=1$ aufzustellen. In dem Ausdrucke (8.) in No. 3 hat die Grösse $\frac{F_{\mathfrak{ab}}}{C}$ $(\mathfrak{a}=0\dots m-1)$ die Form

$$(\xi-1)^{\alpha_1}A_1+(\xi-1)^{\alpha_2}A_2\log(\xi-1)+\dots+(\xi-1)^{\alpha_n}A_n(\log(\xi-1))^n,$$

wo die Ausdrücke A ganze rationale Functionen von $\xi-1$ sind, die Exponenten α lineare homogene oder nicht homogene Functionen der Exponenten r_1 bis r_m (4.) in No. 3 mit ganzzahligen Coefficienten. Wenn die Integrale $y_{11}, y_{12}, \dots y_{1m}$ bezüglich zu den Exponenten r_1 bis r_m gehören, so werden die Exponenten α in $\frac{F_{\mathfrak{ab}}}{C}$ gleich $-r_\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$. Die Grösse, die statt y_{0k} in $\frac{d^\mathfrak{a}y_{0k}}{d\xi^\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=0\dots m-1)$ No. 3 (8.) einzusetzen ist, stellt sich dar

als eine Summe von ganzen rationalen Functionen von $\xi-1$ in endlicher Anzahl, jede multiplicirt mit einer homogenen linearen Verbindung, in welcher die Coefficienten constant sind, von den dort genannten Functionen $\xi^r\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi)$. Eine solche Function $\xi^r\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi)$ ist aber mittels der in No. 3 erwähnten linearen Relationen zwischen diesen Functionen ausdrückbar unter der Form $\sum\limits_0^m c_\mathfrak{a} y'_{0\mathfrak{a}}(\log\xi)^{\beta_\mathfrak{a}}$, wo $y'_{0\mathfrak{a}}$ die Integrale aus No. 3, $\beta_\mathfrak{a}$ positive ganze Zahlen (incl. 0), $c_\mathfrak{a}$ Constanten, die theilweise Null sein können. Hier sind nun für die Integrale $y'_{0\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}=1\dots m)$ ihre Ausdrücke durch $y_{1\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}=1\dots m)$, und für letztere Integrale ihre Entwickelungen bei $\xi=1$ einzusetzen, für

$$\log(\xi)=\log(1+\xi-1)$$

ist die Entwickelung nach Potenzen von $\xi-1$ einzusetzen. Alsdann ist der auf diese Weise aus (8.) in No. 3 hervorgehende Ausdruck noch mit $\xi^{-r}e^{rk2\pi i}=(1+\xi-1)^{-r}e^{rk2\pi i}$, welches nach Potenzen von $\xi-1$ entwickelt wird, zu multipliciren.

Daraus ergiebt sich, dass die Entwickelung von $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ in der Nähe von $\xi=1$ die Form annimmt:

$$(21.)\qquad \mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)=\Sigma(\xi-1)^{\gamma_\mathfrak{a}}[\chi_{0\mathfrak{a}}+\chi_{1\mathfrak{a}}\log(\xi-1)+\dots+\chi_{n_\mathfrak{a}\mathfrak{a}}(\log(\xi-1))^{n_\mathfrak{a}}],$$

wo die Exponenten $\gamma_\mathfrak{a}$ lineare homogene oder nicht homogene Functionen der Exponenten r_1 bis r_m mit ganzzahligen Coefficienten sind, die Functionen χ Entwickelungen der Form $\sum\limits_0^\infty c_\mathfrak{a}(\xi-1)^\mathfrak{a}$ haben, die Potenzen des $\log(\xi-1)$ mit positiven ganzzahligen Exponenten (incl. 0) in endlicher Anzahl vorkommen. Wenn die Integrale y_{11} bis y_{1m} bezüglich zu den Exponenten r_1 bis r_m gehören, so gehen die Exponenten $\gamma_\mathfrak{a}$ aus den Differenzen $r_\mathfrak{c}-r_\mathfrak{b}(\mathfrak{c}=1\dots m)$, zu welchen ganze Zahlen addirt sind, hervor.

Setzt man nun in (21.) für $\xi-1$ ein $\eta-1+i\zeta$ und für $\eta-1$ die Entwickelung (18.), worin $\eta_0=1$, $\zeta_0=0$, so wird

$$(\xi-1)^{\gamma_\mathfrak{a}}=(\eta-1+i\zeta)^{\gamma_\mathfrak{a}}=\zeta^{\gamma_\mathfrak{a}}\sum_0^\infty g_\mathfrak{a}\zeta^\mathfrak{a}.$$

Es wird eine Reihe der Form

$$\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(\xi-1)^\mathfrak{a}=\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(\eta-1+i\zeta)^\mathfrak{a}=\sum_0^\infty h_\mathfrak{a}\zeta^\mathfrak{a},$$

$$\log(\xi-1)=\log(\eta-1+i\zeta)=q\log\zeta+\sum_0^\infty k_\mathfrak{a}\zeta^\mathfrak{a},$$

wo die positive ganze Zahl $q=1$ wird. Daher geht (21.) über in

$$(22.)\qquad \mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)=\Sigma\zeta^{\gamma_\mathfrak{a}}(\psi_{0\mathfrak{a}}+\psi_{1\mathfrak{a}}\log\zeta+\dots+\psi_{n_\mathfrak{a}\mathfrak{a}}(\log\zeta)^{n_\mathfrak{a}}),$$

wo die Functionen ψ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty l_a \zeta^a$ haben. Durch Trennung des Reellen vom Imaginären folgt, da die Exponenten γ_a der Voraussetzung gemäss reell sind: wenn $\zeta > 0$ ist,

$$(23.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{kb}(\xi) = \Sigma \zeta^{\gamma_a}(\varrho_{0a} + \varrho_{1a}\log\zeta + \cdots + \varrho_{n_a a}(\log\zeta)^{n_a}) \\ \qquad + i\Sigma\zeta^{\gamma_a}(\omega_{0a} + \cdots + \omega_{n_a a}(\log\zeta)^{n_a}) \end{cases}$$

und wenn $\zeta = -\zeta'$, $\zeta' > 0$ ist,

$$(24.)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{kb}(\xi) = \Sigma \zeta'^{\gamma_a}(\varrho'_{0a} + \varrho'_{1a}\log\zeta' + \cdots + \varrho'_{n_a a}(\log\zeta')^{n_a}) \\ \qquad + i\Sigma\zeta'^{\gamma_a}(\omega'_{0a} + \cdots + \omega'_{n_a a}(\log\zeta')^{n_a}), \end{cases}$$

wo die Functionen ϱ, ω, ϱ', ω' Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty q_a \zeta^a$ haben und die Coefficienten q_a reell sind.

Man betrachte nun die Function

$$(25.)\quad f(\zeta) = \Sigma\zeta^{\gamma_a}(\varrho_{0a} + \varrho_{1a}\log\zeta + \cdots + \varrho_{n_a a}(\log\zeta)^{n_a}).$$

Aus derselben ergiebt sich

$$(26.)\quad \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = \Sigma\zeta^{\gamma_a + k_a}(\bar\varrho_{0a} + \bar\varrho_{1a}\log\zeta + \cdots + \bar\varrho_{n_a a}(\log\zeta)^{n_a}),$$

wo die Grössen k_a ganze Zahlen sind, die Functionen $\bar\varrho$ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty \bar q_c \zeta^c$ haben, und bei demselben Werthe a für $\zeta = 0$ nicht alle verschwinden, wenn sie nicht constant verschwinden, nachdem je zwei der Exponenten $\gamma_a + k_a$ in (26.) nicht um ganze Zahlen verschieden gemacht sind. Die kleinste der reellen Grössen $\gamma_a + k_a$ in (26.) sei $\bar\gamma$. Dann muss $\zeta^{-\bar\gamma}\frac{df(\zeta)}{d\zeta}$ für $\zeta = 0$ entweder endlich und von Null verschieden werden, oder unendlich, wie ein Ausdruck

$$a_0 + a_1\log\zeta + \cdots + a_s(\log\zeta)^s,$$

wo die a Constanten. Der Factor $\zeta^{\bar\gamma}$ wird, solange ζ endlich und von Null verschieden ist, nicht Null oder unendlich. Es muss also eine positive Grösse ζ_2 geben, so dass, wenn ζ die Bedingung $0 < \zeta_1 \leqq \zeta \leqq \zeta_2$ erfüllt, $\frac{df(\zeta)}{d\zeta}$ eine endliche und stetige Function von ζ ist, die das Vorzeichen nicht wechselt und nicht verschwindet, wobei ζ_1 der Null beliebig nahe kommen kann, oder es muss $\frac{df(\zeta)}{d\zeta}$ constant verschwinden. Daher muss $f(\zeta)$ auf dieser Strecke von ζ mit wachsendem ζ fortwährend entweder wachsen oder abnehmen oder constant bleiben. Demnach muss die Function $u(1, \theta)$ auf einer Strecke von θ, $0 < \theta' \leqq \theta \leqq \theta_1$, wobei θ' unendlich klein

werden kann, mit wachsendem θ fortwährend entweder wachsen oder abnehmen oder constant bleiben. Wegen der Stetigkeit von $u(1,\theta)$ muss dieses auch auf der Strecke $0 \leqq \theta \leqq \theta_1$ stattfinden. Dasselbe gilt und wird in derselben Weise bewiesen für die Function $u(1,\theta)$ auf einer Strecke von θ, $2\pi \geqq \theta \geqq \theta_2$.

Ebenso für die Function $v(1,\theta)$.

Das Resultat ist also dieses: Wenn die Exponentengleichung der Differentialgleichung $G_m(y,\xi) = 0$ in No. 3 bei $\xi = 1$ nur reelle Wurzeln besitzt, so convergirt die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ für $\xi = 1$ und stellt für diesen Werth von ξ die Constante C_{kb} dar.

Dasselbe findet auch noch statt, wenn die Exponentengleichung von $G_m(y,\xi) = 0$ bei $\xi = 1$ Wurzeln besitzt, die alle denselben imaginären Theil haben und die Integrale y_{11} bis y_{1m} bezüglich zu den Exponenten r_1 bis r_m gehören, da alsdann die Exponenten γ_a in (21.) durch die Differenzen $r_c - r_b$, zu denen ganze Zahlen addirt sind, gegeben werden, demnach wieder reell sind.

Was nun den Fall angeht, wo die Exponentengleichung von $G_m(y,\xi) = 0$ bei $\xi = 1$ irgend welche complexe Wurzeln besitzt, so kann man allgemeinere Beispiele aufstellen (s. No. 9), bei welchen die Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ nicht die Eigenschaft haben, in der Nähe von $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ mit wachsendem θ fortwährend zu wachsen oder abzunehmen oder constant zu bleiben. Wenn sich in solchen Fällen die Convergenz der Reihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ für $\xi = 1$ nicht nachweisen lässt, so kann man zusehen, ob die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ sich durch einen anderen analytischen Ausdruck darstellen lässt, in welchem der Uebergang zu $\xi = 1$ gemacht werden kann, oder ob für den Fall, dass, wenn die Wurzeln r_1 bis r_m der Exponentengleichung von $G_m(y,\xi) = 0$ bei $\xi = 1$, sowie Constanten in den Coefficienten der Differentialgleichung reell vorausgesetzt sind, eine analytische Function dieser Grössen $(\mathfrak{P}_{kb}(\xi))_{\xi=1}$ darstellt, und man nun in dieser Function den Uebergang von reellen Werthen der genannten Grössen zu complexen machen kann, wie bei der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (s. No. 8). Sonst ist das allgemeine Verfahren der No. 5 einzuschlagen.

5.

I. In der Differentialgleichung $F_m(y,x) = 0$ der No. 3 (Anfang) seien jetzt bei den Punkten a und b die charakteristischen Indices beliebig.

Um nun in dem durch b gelegten Kreise, innerhalb dessen Peripherie a und ausserhalb derselben alle übrigen singulären Punkte (ausser etwa a und b) der Differentialgleichung liegen, den Uebergang von einem Integralsysteme bei a zu einem bei b zu vollziehen, kann man in folgender Weise verfahren.

Es werde in dem genannten Kreise ein Punkt α genommen, von a und b verschieden und so gelegen, dass man einen Kreis construiren kann, in dem die Punkte a und α eine Lage haben, wie die Punkte a und b, die in No. 1 (vor (3.)) betrachtet sind, und einen Kreis, in dem die Punkte b und α, die Lage wie die Punkte a und b in No. 1 haben. Der Punkt α ist ein nicht singulärer, und es werde bei demselben ein System linear-unabhängiger Integrale der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ entwickelt. Dann wird das Integralsystem bei a in das Gebiet dessen bei α übergeführt und durch letzteres System ausgedrückt. Durch Umkehrung des dadurch erhaltenen Gleichungssystemes erhält man das Integralsystem bei α auf dem umgekehrten Wege in das Gebiet dessen bei a übergeführt und durch letzteres System ausgedrückt. Dasselbe kann man in Bezug auf die Punkte b und α vornehmen und erhält durch Zusammensetzung beider Resultate das System bei a in das Gebiet dessen bei b übergeführt und durch letzteres System ausgedrückt. Weiteres hierüber folgt in No. 6.

Es kommt diese Untersuchung demnach auf die Betrachtung des Falles zurück, wo bei dem Punkte a der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ der No. 3 der charakteristische Index beliebig ist und wo b kein singulärer Punkt dieser Differentialgleichung ist. Bei jedem dieser Punkte sei nun ein System linear-unabhängiger Integrale entwickelt und das System bei a soll in dem dort genannten Kreise in das Gebiet des bei b entwickelten Systemes übergeführt und durch letzteres System ausgedrückt werden.

Hier wird, wenn nicht b schon innerhalb des Bezirkes von a liegt, wieder die rationale Substitution ersten Grades (20.) der No. 1 angewandt, wodurch

$$F_m(y,x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-m} G_m(y,\xi)$$

wird. In der Differentialgleichung $G_m(y,\xi)=0$ ist nun bei $\xi=0$ der charakteristische Index derselbe, wie in $F_m(y,x)=0$ bei $x=a$. $\xi=1$ ist nicht singulärer Punkt und alle übrigen singulären Punkte (abgesehen etwa von $\xi=0$) liegen ausserhalb der Peripherie des Kreises mit dem Punkte

$\xi = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1. Es wird nun in die Entwickelung der Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ die Entwickelung von $x - a = R(\xi) - a$ nach Potenzen von ξ eingesetzt, wenn durch $R(\xi)$ die Substitution (20.) der No. 1 bezeichnet wird, und es werden diese Entwickelungen nach No. 2 durch ein System linearunabhängiger Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = 0$ y_{01} bis y_{0m} ausgedrückt und umgekehrt diese Integrale durch jene. Die Entwickelungen von y_{01} bis y_{0m} gelten nach No. 1 (2.) etc. in einem Bezirke, der über den Kreis mit dem Punkte $\xi = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1 hinausgeht, *also speciell auch in dem Punkte* $\xi = 1$.

Das System der Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = b$ geht durch die rationale Substitution (20.) der No. 1 in ein System linearunabhängiger Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = 1$ über. Nun ist bei $\xi = 1$ als nichtsingulärem Punkte ein Integral in der Umgebung dieses Punktes, dieser Punkt eingerechnet, einwerthig und stetig und durch seinen Werth und die Werthe seiner $m-1$ ersten Ableitungen im Punkte $\xi = 1$ bestimmt. Es genügt daher bei diesem Punkte folgendes specielle System von Integralen von $G_m(y, \xi) = 0$ zu nehmen, indem man durch dieses jedes andere System und umgekehrt jenes durch letzteres ohne Weiteres ausdrücken kann. Bei diesem Punkte werde das System y_{11} bis y_{1m} gewählt, welches folgende Bedingungen erfüllt und dessen Integrale diesen Bedingungen zufolge linearunabhängig sind,

$$(1.)\quad \begin{cases} (y_{11})_{\xi=1} = 1, & \left(\frac{dy_{11}}{d\xi}\right)_{\xi=1} = 0, & \left(\frac{d^2y_{11}}{d\xi^2}\right)_{\xi=1} = 0, & \ldots \left(\frac{d^{m-1}y_{11}}{d\xi^{m-1}}\right)_{\xi=1} = 0, \\ (y_{12})_{\xi=1} = 0, & \left(\frac{dy_{12}}{d\xi}\right)_{\xi=1} = 1, & \left(\frac{d^2y_{12}}{d\xi^2}\right)_{\xi=1} = 0, & \ldots \left(\frac{d^{m-1}y_{12}}{d\xi^{m-1}}\right)_{\xi=1} = 0, \\ \vdots & & & \\ (y_{1m})_{\xi=1} = 0, & \left(\frac{dy_{1m}}{d\xi}\right)_{\xi=1} = 0, & \left(\frac{d^2y_{1m}}{d\xi^2}\right)_{\xi=1} = 0, & \ldots \left(\frac{d^{m-1}y_{1m}}{d\xi^{m-1}}\right)_{\xi=1} = 1. \end{cases}$$

Werden nun die Integrale y_{01} bis y_{0m} durch die Integrale y_{11} bis y_{1m} ausgedrückt, so erhält man

$$(2.)\quad y_{0k} = C_{k1}y_{11} + C_{k2}y_{12} + \cdots + C_{km}y_{1m}, \quad (k = 1 \ldots m),$$

wo die C Constanten. Aus (1.) folgt dann

$$(3.)\quad C_{kb} = \left(\frac{d^{b-1}y_{0k}}{d\xi^{b-1}}\right)_{\xi=1}, \quad \left(\begin{matrix} k = 1 \ldots m \\ b = 1 \ldots m \end{matrix}\right).$$

Es ist ferner das Gleichungssystem

$$(4.)\quad y_{0k} = (y_{0k})_{\xi=1}y_{11} + \left(\frac{dy_{0k}}{d\xi}\right)_{\xi=1}y_{12} + \cdots + \left(\frac{d^{m-1}y_{0k}}{d\xi^{m-1}}\right)_{\xi=1}y_{1m}, \quad (k = 1 \ldots m)$$

umzukehren und zu dem Zwecke die Determinante desselben

$$\left(\Sigma \pm y_{01} \frac{dy_{02}}{d\xi} \cdots \frac{d^{m-1}y_{0m}}{d\xi^{m-1}}\right)_{\xi=1}$$

zu untersuchen. Die Determinante

$$(5.) \qquad \Sigma \pm y_{01} \frac{dy_{02}}{d\xi} \cdots \frac{d^{m-1}y_{0m}}{d\xi^{m-1}}$$

der linearunabhängigen Integrale y_{01} bis y_{0m} ist im Punkte $\xi = 1$ von Null verschieden als Determinante des Gleichungssystemes (4.). Da man bei jedem, im Endlichen liegenden nichtsingulären Punkte ein Integralsystem von der Beschaffenheit (1.) in $\xi = 1$ aufstellen kann, so ergiebt sich durch dieselben Betrachtungen, dass die Determinante (5.) in jedem, im Endlichen liegenden, nichtsingulären Punkte von $G_m(y, \xi) = 0$ von Null verschieden ist. Wird der Coefficient von $\frac{d^{m-1}y}{d\xi^{m-1}}$ in $G_m(y, \xi) = 0$ durch P_1 bezeichnet, so ist diese Determinante bekanntlich gleich

$$(6.) \qquad ce^{-\int P_1 d\xi},$$

wo c eine Constante. Werden die Integrale y_{01} bis y_{0m} auf die Form

$$(7.) \quad y_{01} = \mu_1, \quad y_{02} = \mu_1 \int \mu_1^{-1} \mu_2 d\xi, \ \ldots \ y_{0m} = \mu_1 \int d\xi \mu_1^{-1} \mu_2 \ldots \int \mu_{m-1}^{-1} \mu_m d\xi$$

gebracht, so ist die Determinante (5.) gleich (No. 7 III*b*)

$$(8.) \qquad \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m.$$

Setzt man in den m linearunabhängigen Integralen y_1 bis y_m der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ für x irgend eine rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ und wird $y_k(R\xi) = Y_k(\xi)$, $(k = 1 \ldots m)$ gesetzt, so entsteht

$$(9.) \quad \frac{d^\alpha Y_k(\xi)}{d\xi^\alpha} = \frac{d^\alpha y_k}{dx^\alpha}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^\alpha + \frac{d^{\alpha-1}y_k}{dx^{\alpha-1}} L_1(\xi) + \cdots + \frac{dy_k}{dx} L_{\alpha-1}(\xi),$$

wo die Functionen $L(\xi)$, unabhängig von y_k, ganze rationale Functionen von $\frac{dx}{d\xi}$ und seinen Ableitungen nach ξ sind. Daher ist

$$(10.) \quad \Sigma \pm Y_1 \frac{dY_2}{d\xi} \cdots \frac{d^{m-1}Y_m}{d\xi^{m-1}} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{dx} \cdots \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}.$$

Es ist ferner

$$(11.) \quad \Sigma \pm y_1 \frac{dy_2}{dx} \cdots \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} = ke^{-\int p_1 dx},$$

wo k eine Constante, daher

$$(12.) \quad \Sigma \pm Y_1 \frac{dY_2}{d\xi} \cdots \frac{d^{m-1}Y_m}{d\xi^{m-1}} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} ke^{-\int p_1 dx}.$$

Es werden nun die beiden Fälle näher untersucht, erstens, wo in $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ der charakteristische Index gleich Null ist, und zweitens, wo $F_m(y, x)$ ein System normaler Differentialausdrücke ist.

Wenn bei $x = a$ der charakteristische Index in $F_m(y, x) = 0$ gleich Null ist und die Wurzeln der Exponentengleichung r_1 bis r_m sind, so ist bei $\xi = 0$ in $G_m(y, \xi) = 0$ der charakteristische Index ebenfalls gleich Null und die Wurzeln der Exponentengleichung sind dieselben. Dann ist gemäss der Exponentengleichung

$$(\xi P_1)_{\xi=0} = \frac{m(m-1)}{2} - (r_1 + r_2 + \cdots + r_m).$$

Die singulären Punkte von $G_m(y, \xi) = 0$ entsprechen der rationalen Substitution ersten Grades gemäss denen von $F_m(y, x) = 0$, und wenn die im Endlichen liegenden singulären Punkte von $G_m(y, \xi) = 0$, welche von $\xi = 0$ (dieser Punkt kann singulär oder nicht singulär sein) verschieden sind, durch a'_1 bis $a'_{\varkappa-1}$ bezeichnet werden, so ergiebt sich

$$(13.) \quad e^{-\int P_1 d\xi} = \xi^{\varrho_0}(\xi - a'_1)^{\varrho_1} \dots (\xi - a'_{\varkappa-1})^{\varrho_{\varkappa-1}} e^{U(\xi)},$$

wo $\varrho_0 = r_1 + \cdots + r_m - \frac{m(m-1)}{2}$, $U(\xi)$ eine rationale Function von (ξ) (bezüglich constant) ist, die für $\xi = 0$ nicht unendlich wird. Durch Multiplication mit einem constanten Factor erhält man aus (13.)

$$(14.) \quad \xi^{\varrho_0}\left(1 - \frac{\xi}{a'_1}\right)^{\varrho_1} \cdots \left(1 - \frac{\xi}{a'_{\varkappa-1}}\right)^{\varrho_{\varkappa-1}} e^{U(\xi) - U(0)},$$

wo die Factoren, abgesehen von ξ^{ϱ_0}, für $\xi = 0$ den Anfangswerth 1 annehmen sollen. Die Integrale y_{01} bis y_{0m} kann man linear mit constanten Coefficienten durch Integrale folgender Form ausdrücken. Die Wurzeln der Exponentengleichung r_1 bis r_m seien so geordnet, dass diejenigen, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen und unter letzteren die vorhergehende einen reellen Theil habe, der nicht kleiner, als der der folgenden sei. Dann werden die Integrale aufgestellt

$$(15.) \quad \nu_1 \int d\xi \nu_1^{-1} \nu_2 \dots \int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \nu_{\mathfrak{b}} d\xi, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots m),$$

$\nu_{\mathfrak{b}} = \xi^{r_{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b} + 1} \psi_{\mathfrak{b}}(\xi)$, wo die Grössen $\psi_{\mathfrak{b}}$ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}} \xi^{\mathfrak{a}}$ haben, in denen c_0 gleich 1 gesetzt ist, die Integrationsconstanten annullirt werden. Werden die Integrale y_{01} bis y_{0m} durch die Integrale (15.) nach No. 2 I linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt, so erhält man diese constanten Coefficienten als *rationale* Functionen von Constanten, die

in den Entwickelungen vorkommen mit rationalen Zahlen als Coefficienten; demnach auch die von Null verschiedene Determinante derselben Coefficienten als eine *solche rationale Function, dieselbe sei* $\varDelta$. Die Entwickelung der Determinante der Integrale (15.) hat nach (8.) die Form $\xi^{e_0}\sum_0^\infty k_\alpha \xi^\alpha$, $k_0 = 1$; daher die Entwickelung der Determinante (5.) die Form $\varDelta\xi^{e_0}\sum_0^\infty k_\alpha\xi^\alpha$, $k_0 = 1$. Demnach erhält man mittels (14.)

$$(16.)\quad \Sigma \pm y_{01}\frac{dy_{02}}{d\xi}\cdots\frac{d^{m-1}y_{0m}}{d\xi^{m-1}} = \varDelta\xi^{e_0}\Big(1-\frac{\xi}{a'_1}\Big)^{e_1}\cdots\Big(1-\frac{\xi}{a'_{\varkappa-1}}\Big)^{e_{\varkappa-1}}e^{U(\xi)-U(0)}.$$

Die Grösse $\varDelta$ kann man auch dadurch bestimmen, dass man die Determinante links in (16.), in welcher die Logarithmen mit ihren Factoren weggelassen sind, nach Potenzen von ξ entwickelt. In diesem Ausdrucke (16.) hat man nun auf dem Wege in dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1, auf welchem die Integrale y_{01} bis y_{0m} in das Gebiet der Integrale y_{11} bis y_{1m} übergeführt werden (vgl. No. 6 *d*), ξ in 1 überzuführen und *erhält dadurch die Determinante des Gleichungssystemes* (4.). $\text{Mod}(a'_\alpha) > 1$, $(\alpha = 1\ldots\varkappa-1)$, daher ist jeder Factor $\Big(1-\frac{\xi}{a'_\alpha}\Big)^{e_\alpha}$ in dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 einwerthig. $U(1)$ ist endlich.

Entsprechend ist das Verfahren, wenn die Determinante (11.) durch Entwickelung bei $x = a$ dargestellt wird.

Wenn nun zweitens $F_m(y, x)$ gleich einem Systeme normaler Differentialausdrücke ist und bei $x = a$ durch ein System von Differentialausdrücken, wie (21.) in No. 2 dargestellt ist, so sei ein System linearunabhängiger Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ durch die Integrale (27.) oder (34.) in No. 2 gegeben. Wird die Substitution (20.) der No. 1 auf $F_m(y, x) = 0$ angewandt, wodurch die Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ erhalten wird, und $G_m(y, \xi)$ bei $\xi = 0$ durch das System (22.) in No. 2 dargestellt, so werden die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ durch die Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ (31.) der No. 2, bei denen in den Entwickelungen der Grössen $\psi'_{kb}(\xi)$ der Anfangscoefficient gleich 1 gesetzt ist, linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt und diese Coefficienten nach No. 2 erhalten als *rationale* Functionen von Constanten, die in den Entwickelungen vorkommen, mit rationalen Zahlen als Coefficienten, ebenso also die von Null verschiedene Determinante dieser Coefficienten, die durch $\varDelta$ bezeichnet werde. Wird

$$r_{k1}+r_{k2}+\cdots+r_{k\alpha_k}-\frac{\alpha_k(\alpha_k-1)}{2}$$

gleich ϱ_{0k} gesetzt, wo die r_{kb} aus (23.) in No. 2 genommen, so nimmt die Entwickelung der Determinante (5.) bei $\xi = 0$ nach (8.) die Form

$$\varDelta \xi^{\varrho_{00}+\cdots+\varrho_{0\alpha_\lambda}} e^V \sum_0^\infty k_\alpha \xi^\alpha, \quad k_0 = 1,$$

an, wo

$$(17.) \qquad V = \alpha_0 w_0'(\xi) + \alpha_1 w_1'(\xi) + \cdots + \alpha_\lambda w_\lambda'(\xi),$$

$w_k'(\xi)$ aus (30.) in No. 2. Nun ist aber

$$(18.) \quad P_1 = -\alpha_0 \frac{dw_0'(\xi)}{d\xi} - \frac{\varrho_{00}}{\xi} - \alpha_1 \frac{dw_1'(\xi)}{d\xi} - \frac{\varrho_{01}}{\xi} - \cdots - \alpha_\lambda \frac{dw_\lambda'(\xi)}{d\xi} - \frac{\varrho_{0\lambda}}{\xi} + S,$$

wo S eine rationale Function, die für $\xi = 0$ nicht unendlich wird; daher erhält man

$$(19.) \quad e^{-\int P_1 d\xi} = \xi^{\varrho_{00}+\varrho_{01}+\cdots+\varrho_{0\alpha_\lambda}} e^V \Big(1-\frac{\xi}{a_1'}\Big)^{e_1} \Big(1-\frac{\xi}{a_2'}\Big)^{e_2} \cdots \Big(1-\frac{\xi}{a_{\varkappa-1}'}\Big)^{e_{\varkappa-1}} e^{U(\xi)-U(0)},$$

wo a_1' bis $a_{\varkappa-1}'$ die im Endlichen liegenden singulären Punkte von $G_m(y, \xi) = 0$ abgesehen von $\xi = 0$ sind, die Factoren $\Big(1-\frac{\xi}{a_b'}\Big)^{e_b}$ für $\xi = 0$ den Anfangswerth 1 annehmen sollen, $U(\xi)$ eine rationale Function ist, die für $\xi = 0$ nicht unendlich wird. Die Determinante wird also

$$(20.) \quad \varDelta \xi^{\varrho_{00}+\varrho_{01}+\cdots+\varrho_{0\alpha_\lambda}} e^V \Big(1-\frac{\xi}{a_1'}\Big)^{e_1} \Big(1-\frac{\xi}{a_2'}\Big)^{e_2} \cdots \Big(1-\frac{\xi}{a_{\varkappa-1}'}\Big)^{e_{\varkappa-1}} e^{U(\xi)-U(0)}.$$

Wird in diesem Ausdruck auf dem Wege, auf welchem die Integrale y_{01} bis y_{0m} in das Gebiet der Integrale y_{11} bis y_{1m} fortgesetzt werden, ξ in Eins übergeführt, so erhält man die ***Determinante des Gleichungssystemes*** (4.). $\text{Mod}(a_a') > 1$, $U(1)$ ist endlich.

Entsprechend ist das Verfahren zur Darstellung der Determinante (11.) durch Entwickelung bei $x = a$.

Ueber die Darstellung der Integrale von $F_m(y, x) = 0$ in dem Bezirke von $x = a$ und der Grössen (3.) dieser Nummer folgen weitere Untersuchungen in No. 7.

II. Um den Verlauf eines Integrales der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ verfolgen zu können (s. folgende Nummer), ist noch zu ermitteln, wie ein Integral bei einem Umgange um einen einzelnen singulären Punkt sich verhält. Wenn in einem Gebiete S bei dem singulären Punkte $x = a$, welches a nicht umschliesst, die Entwickelungen eines Systemes linearunabhängiger Integrale, welche in dem Bezirke von $x = a$ gelten (aus den Formeln (2.) in No. 1 sich linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen) genommen werden und man in diesen Entwickelungen einen Umgang um $x = a$ vornimmt bis in das Gebiet S zurück, so erhält man Dar-

stellungen, von denen jede eine lineare Verbindung der ursprünglichen Entwickelungen des Integralsystems ist mit constanten Coefficienten, die zu bestimmen sind. Bei $x=\infty$ ist $x=t^{-1}$ in die Formeln einzusetzen und der Umgang um $t=0$ vorzunehmen.

Es sei erstens bei $x=a$ der charakteristische Index in $F_m(y,x)=0$ gleich Null. Dann kann man in den Entwickelungen der Integrale, die sich aus Ausdrücken der Form (2.) in No. 1 linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen, den Umgang um $x=a$ vollziehen, und das Resultat nach den Vorschriften von No. 2 I durch die ursprünglichen Entwickelungen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken, wobei der Grenzübergang zu $x=a$ vorkommt. Die gesuchten constanten Coefficienten ergeben sich dabei als *rationale* Functionen von Constanten, die in den ursprünglichen Entwickelungen vorkommen und von Grössen $e^{\pm r 2\pi i}$ und $2\pi i$, wo die r Exponenten in den Potenzreihen der ursprünglichen Entwickelungen sind, mit rationalen Zahlen als Coefficienten. Oder man kann die ursprünglichen Entwickelungen zunächst durch die Integrale der verschiedenen Gruppen unter der Form (10.) (11.) in No. 2 ausdrücken nach den dort angegebenen Regeln, und in letzteren Integralen den Umgang um $x=a$ vornehmen. Ein solches Integral

$$(21.)\qquad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int\mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{\mathfrak{b}}\,dx,$$

wo die μ die Werthe No. 2 (11.) haben, die Integrationsconstanten annullirt werden, geht bei dem in positiver Richtung (No. 1 nach (7.)) gemachten Umgange in

$$(22.)\qquad K_1\mu_1+K_2\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2\,dx+\cdots+K_{\mathfrak{b}}\mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\ldots\int\mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{\mathfrak{b}}\,dx,$$

über, wo $K_{\mathfrak{b}}=e^{r_{\mathfrak{b}}2\pi i}$ ist, $K_{\mathfrak{b}-1}e^{-r_{\mathfrak{b}-1}2\pi i}$ das constante Glied ist in dem Ausdrucke, in welchen die Entwickelung von $\int\mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{\mathfrak{b}}\,dx$ bei diesem Umgange um a übergeht, $K_{\mathfrak{b}-2}e^{-r_{\mathfrak{b}-2}2\pi i}$ das constante Glied in dem Ausdrucke, in welchen die Entwickelung von

$$\int dx\,\mu_{\mathfrak{b}-2}^{-1}\mu_{\mathfrak{b}-1}\int\mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\mu_{\mathfrak{b}}\,dx$$

bei demselben Umgange übergeht, u. s. w., die Exponenten $r_{\mathfrak{b}}$, $r_{\mathfrak{b}-1}$, etc. aus (11.) in No. 2 (s. Abh. Bd. 83 No. 9 (25.)). Die Integrale der Form (21.) sind zuletzt wieder durch die ursprünglichen Integrale zu ersetzen, durch Umkehrung des Gleichungssystemes, welches letztere Integrale durch jene ausdrückte.

Ist zweitens $F_m(y, x)$ gleich einem Systeme normaler Differentialausdrücke, welches sich durch ein System von der Beschaffenheit des Systems (21.) in No. 2 bei $x = a$ darstellen lässt, so kommt man auf den eben betrachteten Fall zurück. Sind alsdann die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ unter der Form (27.) (34.) der No. 2 aufgestellt, so hat man dort in dem Integral $\bar{y}_k$ den Umgang um $x = a$ vorzunehmen, das Resultat unter der Form (33.) daselbst auszudrücken, dann giebt die Formel (35.) dort das gesuchte Resultat (s. Abh. Bd. 83 No. 9 (26.)). Die gesuchten Coefficienten werden auch hier *rationale* Functionen von Constanten, die in den Entwickelungen von $\bar{y}_k$ vorkommen und von Grössen $e^{\pm r 2\pi i}$ und $2\pi i$, wo r ein Exponent in den Potenzreihen der Entwickelung von $\bar{y}_k$ ist, mit rationalen Zahlen als Coefficienten.

6.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie bei einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten $F_m(y, x) = 0$ (1.) der No. 1 der Verlauf eines Integrales verfolgt werden kann.

Die Differentialgleichung besitze $\varkappa$ ($\varkappa \geqq 0$) singuläre Punkte im Endlichen, die, wenn $\varkappa > 0$ ist, $a_1, a_2, \ldots a_\varkappa$ seien. Ist der Punkt im Unendlichen, also nach Substitution von $x = t^{-1}$ in $F_m(y, x) = 0$, der Punkt $t = 0$ in der Differentialgleichung singulär, so sei $x = \infty$ durch $a_{\varkappa+1}$ bezeichnet.

Wenn nur *ein* singulärer Punkt $x = a$ vorhanden ist, so kann man denselben durch die rationale Substitution ersten Grades $x - a = \frac{1}{\xi}$ ins Unendliche projiciren, dann sind in der transformirten Differentialgleichung im Endlichen keine singulären Punkte vorhanden (No. 1 nach (20.)). Entwickelt man von dieser Differentialgleichung bei dem nichtsingulären Punkte $\xi = 0$ ein System von m linearunabhängigen Integralen, so bleiben dieselben allenthalben im Endlichen einwerthig und stetig, demnach auch jedes andere Integral, welches durch eine homogene lineare Verbindung jener Integrale mit constanten Coefficienten gegeben ist. Durch die umgekehrte Substitution kommt man auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurück, deren Integrale also ebenfalls allenthalben einwerthig und, abgesehen von dem singulären Punkte, stetig bleiben.

Es ist also weiter der Fall zu betrachten, wo wenigstens zwei singuläre Punkte vorhanden sind, demnach $\varkappa \geqq 1$.

a.) Durch die singulären Punkte sei eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurücklaufende Linie L gezogen. Ist $x = \infty$ singulär, so geht die Linie durch den Punkt im Unendlichen $a_{\varkappa+1}$. Ist $x = \infty$ nicht singulär, so kann die Linie ganz im Endlichen liegen. Durch diese Linie wird die Constructionsebene in zwei Theile T_1 und T_2 getheilt; im Innern eines jeden solchen Theiles bleibt ein Integral einwerthig und stetig, Abh. Bd. 74 No. 1 Anfang, (siehe *Riemann* Beiträge zur Theorie der durch die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen III.). Es soll nun bei jedem singulären Punkte $a_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa$, bez. $\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa+1$) ein System linear-unabhängiger Integrale durch Entwickelungen, die in dem Bezirke des Punktes gelten (aus Ausdrücken No. 1 (2.) linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzt sind), gegeben sein. Diese Entwickelungen bei den verschiedenen singulären Punkten werden dann in einem der beiden Theile der Constructionsebene, etwa T_1, fixirt, bei dem einzelnen singulären Punkte in dem Stücke des Bezirkes (soweit dasselbe in T_1 liegt), welches von L nach der Seite von T_1 hin abgeschnitten wird, wenn man diese Linie von dem singulären Punkte aus nach beiden Richtungen bis zur Peripherie des Bezirkes verfolgt, nämlich fixirt bei dem Punkte $a_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa$) in Bezug auf den Zweig von $\log(x - a_\mathfrak{a})$ und den von $(x - a_\mathfrak{a})^r$, wo r ein beliebiger Exponent sein kann, bei $a_{\varkappa+1}$ in Bezug auf $\log\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\left(\frac{1}{x}\right)^r$. Das Integralsystem bei $a_\mathfrak{a}$ werde durch $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots m$) bezeichnet. Durchläuft ein Punkt die Linie L, dieselbe als Begrenzung von T_1 aufgefasst, in positiver Richtung (so dass die Bewegungsrichtung zu der Richtung der aus dem Innern von T_1 nach Aussen hin erstreckten Normalen liegt wie die Strecke $+i$ zu $+1$), so soll der Punkt $a_{\mathfrak{a}+1}$ auf $a_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa$, $\varkappa + \mathfrak{s} = \mathfrak{s}$, bezüglich $\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa+1$, $\varkappa+1+\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$) folgen. Wenn man nun das Integralsystem bei $a_\mathfrak{a}$ $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots m$) in T_1, in welchem Gebiete also die Integrale einwerthig bleiben, fortsetzt bis in das Gebiet des Integralsystems bei $a_{\mathfrak{a}+1}$ und durch letztere Integrale $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a}+1)}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots m$) linear mit constanten Coefficienten ausdrückt, so werde die Substitution dieser constanten Coefficienten, die zu dem Zwecke auf das System der Integrale bei $a_{\mathfrak{a}+1}$ $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a}+1)}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots m$) anzuwenden ist, durch $A_{\mathfrak{a}+1}$ ($\mathfrak{a}+1 = 1 \dots \varkappa$, bez. $\mathfrak{a}+1 = 1 \dots \varkappa+1$) bezeichnet. Wird das Integralsystem $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a})}$ in dem Gebiete T_1 fortgesetzt bis $a_{\mathfrak{a}+2}$ und durch das System $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a}+2)}$ ausgedrückt, so erhält man das Resultat dadurch, dass man die beiden Substitutionen $A_{\mathfrak{a}+1}$ und $A_{\mathfrak{a}+2}$ zusammensetzt und die zusammengesetzte Substitution auf das Integralsystem $y_\mathfrak{b}^{(\mathfrak{a}+2)}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots m$) an-

wendet. Eine solche aus zwei anderen Substitutionen wie $A_{\mathfrak{a}+1}$ und $A_{\mathfrak{a}+2}$ in dieser Reihenfolge zusammengesetzte Substitution werde durch $A_{\mathfrak{a}+1} A_{\mathfrak{a}+2}$ bezeichnet. Wenn man nun die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ durch die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}+1)}$ ausdrückt, in diesen Ausdrücken die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}+1)}$ durch die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}+2)}$ ersetzt und in dieser Reihenfolge weiter, bis man zuletzt die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}-1)}$ einführt, so erhält man die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ in T_1 zu $a_{\mathfrak{a}-1}$ hin fortgesetzt und durch $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}-1)}$ ausgedrückt. Dieselben Ausdrücke für die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ bekommt man dadurch, dass auf die Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a}-1)}$ die inverse Substitution zu $A_{\mathfrak{a}}$ angewandt wird, dieselbe sei durch $A'_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa$ bez. $\mathfrak{a} = 1 \dots \varkappa+1$) bezeichnet. Demnach wird die inverse Substitution

$$A'_{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{a}+1} A_{\mathfrak{a}+2} \dots A_{\varkappa} A_1 \dots A_{\mathfrak{a}-1},$$

bezüglich, wenn $x = \infty$ singulär,

$$A'_{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{a}+1} A_{\mathfrak{a}+2} \dots A_{\varkappa+1} A_1 \dots A_{\mathfrak{a}-1}.$$

Wenn man daher alle Substitutionen A bis auf eine kennt, so erhält man durch Zusammensetzung der bekannten die inverse der letzten und durch deren Umkehrung die letzte Substitution, und sämmtliche inversen durch Zusammensetzung der directen Substitutionen. Es soll ferner bei jedem singulären Punkte $a_{\mathfrak{a}}$ das Integralsystem $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ längs der Begrenzung eines von singulären Punkten nur $a_{\mathfrak{a}}$ enthaltenden Gebietes in positiver Richtung um den Punkt herum bis zu dem Ausgangspunkte fortgesetzt werden. Ist $x = \infty$ singulär, so wird in den Entwickelungen bei $x = \infty$ längs der Begrenzung des zu $x = \infty$ gehörenden Bezirkes der Umgang in positiver Richtung vorgenommen, was, wenn $x = t^{-1}$ gesetzt wird, einem Umgange um $t = 0$ in positiver Richtung entspricht. Die Substitution der Coefficienten, welche bei $a_{\mathfrak{a}}$ auf das System der Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots m$) anzuwenden ist, um das Resultat des genannten Umganges von $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ um $a_{\mathfrak{a}}$ zu erhalten, werde durch $B_{\mathfrak{a}}$ bezeichnet. Die inverse Substitution zu $B_{\mathfrak{a}}$, die durch $B'_{\mathfrak{a}}$ bezeichnet werde, angewandt auf das System $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ liefert das Resultat des Umganges des Systemes $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ in umgekehrter Richtung.

b.) Zwischen den Constanten der Substitutionen A und B bestehen folgende Relationen. Das System der Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ werde in T_1 längs der Linie L von $a_{\mathfrak{a}}$ aus in positiver Richtung fortgesetzt zu $a_{\mathfrak{a}+1}$, dort auf der Begrenzung eines von singulären Punkten nur $a_{\mathfrak{a}+1}$ enthaltenden Gebietes in positiver Richtung um diesen Punkt herumgeführt, weiter in T_1 längs L in positiver Richtung zu $a_{\mathfrak{a}+2}$ fortgesetzt, dort in gleicher Weise um $a_{\mathfrak{a}+2}$ herum-

geführt u. s. w. bis dasselbe schliesslich in das ursprüngliche Gebiet zurückgeführt wird, so müssen die Integrale die ursprünglichen Werthe wieder annehmen. Denn die angegebene Fortsetzung der Integrale $y_{\mathfrak{b}}^{(\alpha)}$ kommt auf dasselbe hinaus, wie wenn man diese Integrale in dem Gebiete T_2 längs L in der Richtung, die rücksichtlich T_2 negativ ist, fortsetzt bis zu dem Ausgangspunkte zurück. Es muss daher die zusammengesetzte Substitution

$$(1.) \qquad A_2B_2A_3B_3\dots A_1B_1 = \begin{Bmatrix} 1\,0\,0\dots 0 \\ 0\,1\,0\dots 0 \\ \vdots \\ 0\,0\,0\dots 1 \end{Bmatrix}$$

sein, in welcher vor A_1B_1 steht $A_\varkappa B_\varkappa$, bezüglich (wenn $x=\infty$ singulär) $A_{\varkappa+1}B_{\varkappa+1}$. Nun ist eine der Substitutionen A, etwa A_1 gleich der inversen der zusammengesetzten $A_2A_3\dots A_\varkappa$, bezüglich $A_2A_3\dots A_{\varkappa+1}$. Es bestehen also zwischen den Coefficienten der Substitutionen $A_2, A_3, \dots A_\varkappa, B_1, B_2, \dots B_\varkappa$ bezüglich $A_2, A_3, \dots A_{\varkappa+1}, B_1, B_2, \dots B_{\varkappa+1}$ m^2 Bedingungsgleichungen (vgl. ***Riemann*** l. c. dort ist das Integralsystem von ***einem*** der singulären Punkte $x=0$ aus in positiver Richtung um diesen Punkt herumgeführt, von dem ersten $x=0$ zu dem zweiten singulären Punkte $x=\infty$ (Substitution (b)), um diesen herum, zu dem ersten zurück (inverse Substitution zu (b), $(b)^{-1}$), von dem ersten zu dem dritten $x=1$ (Substitution (c)), um diesen herum, zu dem ersten zurück (inverse Substitution zu (c), $(c)^{-1}$)). Eine Bedingungsgleichung zwischen den genannten Coefficienten erhält man aus (1.), wenn die Determinante einer Substitution durch ein vorgesetztes D bezeichnet wird, als

$$(2.) \qquad DA_2DB_2DA_3DB_3\dots DA_1DB_1 = 1.$$

Da aber A_1' gleich $A_2A_3\dots A_\varkappa$ bezüglich $A_2A_3\dots A_{\varkappa+1}$, daher A_1 gleich $A_\varkappa'\dots A_3'A_2'$ bezüglich A_1 gleich $A_{\varkappa+1}'\dots A_3'A_2'$ und $DA_\alpha DA_\alpha' = 1$ ist, so ergiebt sich

$$(3.) \qquad DB_2DB_3\dots DB_1 = 1,$$

wo vor DB_1 steht $DB_\varkappa$ bezüglich $DB_{\varkappa+1}$. Wenn bei jedem singulären Punkte a_α m linearunabhängige Integrale bestehen, deren Entwickelungen die Form

$$(x-a)^{r_{\mathfrak{b}}^{(\alpha)}}\psi_{\mathfrak{b}}^{(\alpha)}(x-a) \quad (\mathfrak{b}=1\dots m),$$

bei $x=a_{\varkappa+1}$ die Form $\left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}}\psi_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$ haben, wo die Functionen ψ in dem Bezirke des singulären Punktes, abgesehen von diesem Punkte, ein-

werthig und stetig sind, so wird

$$DB_{\mathfrak{a}} = e^{2\pi i \sum_{\mathfrak{b}=1}^{m} r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}};$$

daher muss nach (3.) $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=m} r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ bez. $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+1}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=m} r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ ganzzahlig sein. Diese Folgerung hat *Riemann* l. c. bei der von ihm untersuchten Function aus Satz (3.) gezogen. Herr *Fuchs* hat Bd. 66 dieses Journals p. 141 den Satz (3.) auf homogene lineare Differentialgleichungen mit einwerthigen Coefficienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte ausgedehnt (indem er analog dem *Riemann*schen Verfahren von *einem* der singulären Punkte aus das bei diesem entwickelte Integralsystem zu jedem singulären Punkte hin fortsetzt, um diesen herumführt und zu dem ersten zurück). Derselbe hat bei jedem singulären Punkte $a_{\mathfrak{a}}$ ein solches Integralsystem genommen, dass

$$DB_{\mathfrak{a}} = \omega_1^{(\mathfrak{a})}\omega_2^{(\mathfrak{a})}\dots\omega_m^{(\mathfrak{a})}$$

wird, wo die ω die Wurzeln der von ihm als Fundamentalgleichung bezeichneten, zum Punkte $a_{\mathfrak{a}}$ gehörenden algebraischen Gleichung sind, so dass, wenn $\omega_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})} = e^{2\pi i r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}}$ ist, $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=m} r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ bez. $\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+1}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=m} r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}$ ganzzahlig wird. Bei Differentialgleichungen mit nur regulären Integralen ergiebt sich speciell die Summe der Wurzeln sämmtlicher Exponentengleichungen bei $\varkappa(\varkappa \geqq 0)$ Punkten im Endlichen, unter denen sich die singulären befinden, und bei dem (singulären oder nicht-singulären) Punkte im Unendlichen gleich $(\varkappa-1)\frac{m(m-1)}{2}$ (*Fuchs* l. c. p. 145, 147). Ist ein System normaler Differentialausdrücke gleich Null gesetzt, und werden die regulären Ausdrücke der einzelnen Bestandtheile gleich Null gesetzt und aus den dadurch erhaltenen Differentialgleichungen bei einem singulären Punkte (im Endlichen oder Unendlichen) $a_{\mathfrak{a}}$ der ursprünglichen Differentialgleichung die Exponentengleichungen genommen, und sind die sämmtlichen Wurzeln derselben $r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}(\mathfrak{b} = 1\dots m)$, so werden die Wurzeln der Fundamentalgleichung bei diesem Punkte $\omega_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})} = e^{2\pi i r_{\mathfrak{b}}^{(\mathfrak{a})}}$ $(\mathfrak{b} = 1\dots m)$ (Abh. d. Verf. Bd. 83 No. 9 (18.)).

c.) Die oben genannten Substitutionen $A_{\mathfrak{a}}$, $B_{\mathfrak{a}}$ und ihre inversen $A'_{\mathfrak{a}}$, $B'_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a} = 1\dots\varkappa$ bez. $\mathfrak{a} = 1\dots\varkappa+1)$ seien nun aufgestellt. Dann soll ein bei einem Punkte α entwickeltes Integral längs einer vorgezeichneten Linie l immer auf einer Seite derselben zu einem Punkte β fortgesetzt und durch ein bei β entwickeltes Integralsystem ausgedrückt werden. Ist α ein nicht-

singulärer Punkt, so werde das bei α entwickelte Integral längs einer Linie l_1 zunächst zu einem singulären Punkte fortgesetzt und durch das bei diesem gegebene Integralsystem ausgedrückt. In dieser Beziehung ist Folgendes zu bemerken. Man construire einen Kreis, in dessen Innerem sich sämmtliche singulären Punkte bis auf einen befinden, letzterer liege ausserhalb der Peripherie im Endlichen oder Unendlichen; das von diesem Kreise begrenzte Gebiet, welches den Unendlichkeitspunkt enthält, sei C. Nun kann man eine endliche Anzahl Kreisflächen nehmen, so dass innerhalb der Begrenzung irgend einer höchstens ein singulärer Punkt im Endlichen liegt (ein und derselbe Punkt kann aber in mehreren Kreisen liegen), die mit C ein solches System von durch Kreise begrenzten Gebieten bilden, so dass irgend ein Punkt der Constructionsebene innerhalb der Begrenzung wenigstens eines dieser Gebiete liegt. Dieses kann z. B. auf folgende Weise geschehen. Man nehme bei je zwei sämmtlicher complexen Ausdrücke, die den singulären Punkten im Endlichen entsprechen, den Unterschied der reellen Theile und den der Coefficienten von i; diejenige dem absoluten Werthe nach kleinste dieser Grössen, die grösser als Null ist, habe den absoluten Werth δ. Dann ziehe man äquidistante Parallelen zu den Coordinatenaxen mit dem Abstand $\varrho < \frac{\delta}{2}$ und bilde ein endliches quadratisches Netz, innerhalb welches die Begrenzung von C liegt. Wenn man um jeden der in endlicher Anzahl vorhandenen Schnittpunkte dieses Netzes als Mittelpunkt mit dem Radius ϱ einen Kreis schlägt, so kann auf einer solchen Kreisfläche höchstens ein singulärer Punkt liegen, und liegt derselbe auf der Peripherie, so nehme man statt dieses Kreises einen mit demselben Mittelpunkte aber grösserer Fläche, so dass auf der Kreisfläche nur ein singulärer Punkt innerhalb der Peripherie liegt. Das System dieser Kreise und das Gebiet C ist ein System von Gebieten der verlangten Art. Kommt in einem solchen System ein Kreis K vor, der keinen singulären Punkt enthält, so schlage man um den Mittelpunkt desselben einen Kreis bis zum nächsten singulären Punkte, und man kann einen excentrischen Kreis nehmen, welcher diesen singulären Punkt und K im Innern enthält, und durch denselben den Kreis K ersetzen. Man hat dann ein System S von durch Kreise begrenzten Gebieten in endlicher Anzahl, so dass in jedem Gebiete innerhalb der Begrenzung desselben ein und nur ein singulärer Punkt liegt (derselbe Punkt kann aber in mehreren Gebieten vorkommen), und dass irgend ein Punkt der Constructionsebene in wenigstens einem solchen Gebiete innerhalb der Begrenzung desselben liegt.

Dann kann man für jeden einzelnen dieser Kreise, wenn das von ihm begrenzte Gebiet im Endlichen liegt, die rationale Substitution ersten Grades (20.) der No. 1 anwenden, worin a der singuläre Punkt innerhalb dieses Kreises, b ein beliebiger Punkt der Peripherie ist, indem man diese Substitution in das Integralsystem bei a einführt. Man erhält dadurch ein Integralsystem, dessen Entwickelung in der ξ-Ebene in dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 gilt. Ist bei einem nichtsingulären Punkt α innerhalb des ersten Kreises ein Integral entwickelt, so ist diese Entwickelung bestimmt durch den Werth des Integrales und seiner $m-1$ ersten Ableitungen in dem Punkte α. Diesem Punkte entspricht innerhalb des zweiten Kreises ein nichtsingulärer Punkt $\xi=\alpha'$, bei welchem die Entwickelung desselben Integrales aufgestellt wird. Dann hat man diese Entwickelung durch das Integralsystem bei $\xi=0$ nach No. 5 (4.) (5.) (wo statt $\xi=1$ beliebig ξ mit $\text{Mod}\,\xi \leqq 1$ eintritt) darzustellen, wo die Determinante des Gleichungssystemes nach den Angaben in No. 5 aufgestellt wird. Für das Gebiet C ist zunächst eine rationale Substitution, die in No. 1 (Schluss) angegeben ist, anzuwenden, dann das vorige Verfahren innezuhalten. Hat man diese rationalen Substitutionen ersten Grades für die Kreise des Systemes S aufgestellt und die zugehörigen Integralsysteme bei den singulären Punkten mittels derselben transformirt, so kann man vermittelst dieser transformirten Ausdrücke ein Integral von irgend einem nichtsingulären Punkte α zu einem singulären überführen.

Statt dieses Verfahrens kann man auch folgendes anwenden.

Liegt α innerhalb des zu einem singulären Punkte gehörenden Bezirkes, so kann man die ursprünglichen Entwickelungen des Integralsystems bei dem singulären Punkte anwenden, und das Integral bei α durch die Integrale bei diesem singulären Punkte ausdrücken. Auf diesen Fall kann man denjenigen, wo α nicht innerhalb eines solchen Bezirkes liegt, dadurch zurückführen, dass man das Integral bei α zunächst zu einem nichtsingulären Punkte α_1 innerhalb des Bezirkes des nächsten singulären Punktes mittels des Verfahrens No. 1 (20.) *überführt und durch ein Integralsystem bei α_1 ausdrückt.*

In gleicher Weise kann man umgekehrt, wenn bei α ein System linearunabhängiger Integrale entwickelt ist, durch dieses System die Integrale bei einem singulären Punkte ausdrücken (No. 5 (4.)). Wenn man nun das bei dem nichtsingulären Punkte α gegebene Integral längs der Linie l_1 zu einem singulären Punkte fortgesetzt und durch das bei diesem

gegebene Integralsystem ausgedrückt hat, so hat man weiter diesen Ausdruck in umgekehrter Richtung längs l_1 zu α zurückzuführen und längs der Linie l weiter fortzusetzen. Ist der Ausgangspunkt α singulär, so wird das Integral als durch das bei α gegebene Integralsystem dargestellt vorausgesetzt. In beiden Fällen kommt man also darauf zurück, von einem singulären Punkte aus ein Integral, welches durch das bei diesem Punkte gegebene Integralsystem ausgedrückt ist, fortzusetzen. Ist der Endpunkt β, bis zu welchem die Fortsetzung gemacht werden soll, nicht-singulär, so ist das bei β entwickelte Integralsystem längs einer Linie l_2 zu einem singulären Punkte überzuführen, und es ist das bei diesem Punkte gegebene Integralsystem durch die Integrale bei β auszudrücken. Dann hat man zu der Linie l, längs welcher das Integral von α aus fortgesetzt werden soll, noch l_2 zuzufügen, und die Fortsetzung bis zu dem vorhingenannten singulären Punkte vorzunehmen, und schliesslich noch von diesem aus längs l_2 zu β. Es bleibt mithin übrig zu zeigen, wie das bei einem singulären Punkte gegebene Integralsystem längs einer beliebigen Linie l, auf einer und derselben Seite, in das Gebiet des bei irgend einem singulären Punkte gegebenen Integralsystemes übergeführt und durch die Integrale letzteren Systemes ausgedrückt werden kann. Dazu ist die vorgezeichnete Linie l in Theile zu zerlegen und sind die Theillinien durch andere die Endpunkte der Theile verbindende Linien zu ersetzen unter Anwendung des Satzes, dass ein Integral innerhalb eines von einer geschlossenen sich selbst nicht schneidenden Curve begrenzten Gebietes, innerhalb dessen Begrenzung kein singulärer Punkt liegt, speciell innerhalb der Gebiete T_1 und T_2, einwerthig und stetig bleibt. Man reducirt dadurch den vorgezeichneten Weg auf einen solchen längs der Linie L, der an dem einzelnen singulären Punkte entweder auf der einen oder auf der anderen Seite von L vorüberführen und seine Richtung wechseln kann. Dieser Weg zerfällt nun in Uebergänge in T_1 von einem singulären Punkte a_λ zum folgenden $a_{\lambda+1}$ und umgekehrt, die durch die Substitutionen $A_{\lambda+1}$ und $A'_{\lambda+1}$ vermittelt werden, und in Umgänge um die einzelnen singulären Punkte a_λ in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung, die durch die Substitutionen B_λ und B'_λ gegeben werden. Durch Zusammensetzung von Substitutionen A, A', B, B' erhält man also die Substitution, die auf die Integrale bei dem singulären Punkte, der Endpunkt des Weges ist, anzuwenden ist, um das Resultat der Fortsetzung zu erhalten.

d.) Nun bleibt also übrig zu zeigen, auf welche Weise die Substitutionen A, A', B, B' ermittelt werden. Was die Substitutionen A und A' angeht, so hat man bei zwei auf einander folgenden im Endlichen liegenden singulären Punkten a_α und $a_{\alpha+1}$ zuzusehen, ob dieselben eine solche Lage haben, dass man einen Kreis construiren kann, auf dessen Fläche von singulären Punkten nur a_α und $a_{\alpha+1}$, der eine Punkt auf, der andere innerhalb der Peripherie liegen, und innerhalb dessen Peripherie das Stück der Linie L zwischen a_α und $a_{\alpha+1}$ liegt, oder eine Linie λ, die dieses Stück vertreten kann, so dass innerhalb des von beiden Linien begrenzten Gebietes ein Integral einwerthig ist. Kann man einen solchen Kreis construiren, so wird weiter nach No. 5 I verfahren. Der Uebergang des Integralsystemes von a_α zu dem bei $a_{\alpha+1}$ längs λ wird dadurch vermittelt, dass man beide Integralsysteme mit einem Integralsysteme bei einem nichtsingulären Punkte α in Beziehung bringt, der die in No. 5 I angegebene Lage hat. Bei Anwendung des Verfahrens von No. 5 I kommen rationale Substitutionen ersten Grades $x = R(\xi)$ zur Anwendung. Dem Stücke λ_1 von λ von einem singulären zu dem nichtsingulären Punkte entspricht eine Linie λ_1' in der ξ-Ebene in dem Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 von $\xi = 0$ bis zu $\xi = 1$. Durchläuft ein Punkt irgend eine Linie l, so entspricht dem Gebiete längs l auf der positiven Seitenrichtung zu seiner Richtung (diese Richtung liegt zu letzterer wie $+i$ zu $+1$) das Gebiet längs der Linie l' auf der positiven Seitenrichtung zu der Richtung des entsprechenden Punktes, der l' durchläuft; wie sich aus No. 1 (3.) und (6.) ergiebt, wenn in der ξ-Ebene eine unendliche Schaar concentrischer Kreise angenommen wird, deren Centrum, wenn No. 1 (3.) $\gamma = 0$ ist, $\xi = 0$, wenn γ von Null verschieden, der Punkt ξ, welcher $x = \infty$ entspricht, ist. Daher entspricht dem Gebiete längs der Linie λ_1 auf derjenigen Seite, auf welcher die Bereiche liegen, in denen die Integrale gegeben sind und die Fortsetzung vorgenommen werden soll, das Gebiet längs einer der beiden Seiten von λ_1', längs welcher Linie die Fortsetzung in dem Kreise in der ξ-Ebene zu machen und wobei das eine Integralsystem durch das andere auszudrücken ist. *Wenn bei den singulären Punkten a_α und $a_{\alpha+1}$ der charakteristische Index gleich Null ist, so hat man zuzusehen, ob die Untersuchungen in No. 3 und 4 Anwendung finden.* Haben die beiden auf einander folgenden Punkte a_α und $a_{\alpha+1}$ die vorhin angegebene Lage nicht, so sind zwischen beiden Punkten auf L ein oder mehrere nicht-singuläre Punkte in endlicher Anzahl anzunehmen, so dass

von diesen Punkten und den Punkten a_λ und $a_{\lambda+1}$ je zwei auf einander folgende eine solche Lage, wie die oben angegebene, haben; geht das Stück der Linie L von a_λ zu $a_{\lambda+1}$ durch den nichtsingulären Punkt im Unendlichen, so kann dasselbe durch eine Linie im Endlichen ersetzt werden. Man kommt dann auf das vorige Verfahren zurück und erhält durch Zusammensetzung mehrerer Substitutionen die verlangte Substitution. *Bei der Wahl der Linie L ist dem Vorstehenden entsprechend auf die Lage von je zwei auf einander folgenden singulären Punkten im Endlichen zu achten. Werden nicht-singuläre Punkte eingeschoben, so ist zu beachten, dass man, wenn ein solcher innerhalb des Bezirkes liegt, der zu einem singulären Punkte gehört, um ein Integral von jenem Punkte zu diesem oder umgekehrt fortzusetzen, die ursprünglichen Entwickelungen des Integralsystemes bei dem singulären Punkte anwenden kann.*

Wenn einer der beiden auf einander folgenden singulären Punkte im Unendlichen liegt $a_{\varkappa+1}$, und wenn die beiden Punkte und ihre Verbindungslinie in einem Gebiete liegen, welches von einem durch den singulären Punkt im Endlichen gehenden Kreis begrenzt wird, innerhalb dessen Peripherie die übrigen singulären Punkte liegen, so hat man zunächst eine der No. 1 (Schluss) angegebenen rationalen Substitutionen ersten Grades anzuwenden, dann weiter das vorige Verfahren einzuschlagen. Haben die beiden auf einander folgenden Punkte nicht eine solche Lage, so sind nichtsinguläre Punkte einzuschieben, so dass einer derselben und $a_{\varkappa+1}$ jene Lage haben, und man kommt im Uebrigen auf das frühere Verfahren zurück. Auf die Lage dieser singulären Punkte ist auch bei der Wahl von L zu achten. Was ferner die Substitutionen B, B' angeht, so vgl. hierüber No. 5 II. Ist in der Differentialgleichung ein normaler Ausdruck gleich Null gesetzt, oder zerfällt die Differentialgleichung, in der ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt ist, in einzelne, in denen normale Ausdrücke gleich Null gesetzt sind, so kommt man, was die vorliegenden Untersuchungen angeht, auf den Fall zurück, wo ein regulärer Ausdruck gleich Null gesetzt ist. Für diesen Fall und den, wo ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt ist, sind in No. 1 und No. 5 in Verbindung mit No. 2, und wenn bei zwei auf einander folgenden singulären Punkten die charakteristischen Indices gleich Null sind, in No. 3 und 4 die Mittel speciell auseinandergesetzt, die zur Bestimmung der Substitutionen A, A', B, B' dienen; in Betreff deren weiterer Untersuchung vgl. Schluss dieser No.

e.) Ein Integral bleibt in einem von einer geschlossenen Curve

begrenzten Gebiete einwerthig und stetig, wenn das Gebiet von singulären Punkten nur einen ausserwesentlich singulären enthält, also einen solchen, dass ein System linearunabhängiger Integrale in dem zu diesem Punkte gehörenden Bezirke allenthalben einwerthig und stetig bleibt (vgl. Abh. Bd. 81 p. 3). (Ueber das Vorkommen eines ausserwesentlich singulären Punktes s. die vorliegende Abh. No. 7 II.) Wenn daher auf der Grenze des Bezirkes eines singulären Punktes nur ausserwesentlich singuläre Punkte liegen, so müssen die Entwickelungen der Grössen φ in No. 1 (2.), gemäss den linearen Relationen zwischen diesen Grössen und der Eigenschaft der Integrale weiter gelten als im Bezirke des singulären Punktes, in dem Kreise durch den nächsten wesentlich singulären Punkt. Es dürfen daher auf der in No. 3, 4 und 5 betrachteten Kreisfläche in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 noch ausserwesentlich singuläre Punkte der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ liegen, abgesehen von $\xi = 1$, über welchen Punkt die in den betreffenden Nummern gemachten Voraussetzungen gelten, und es bleiben die dort erhaltenen Resultate weiter bestehen. Was die Untersuchungen in der vorliegenden No. 6 angeht, so genügt es, jede Substitution der Coefficienten aufzustellen, die den Uebergang in T_1 von einem wesentlich singulären Punkte zu dem nächsten wesentlich singulären vermittelt, ebenso die Substitutionen B bei den wesentlich singulären Punkten zu ermitteln. Hierzu dienen dieselben in *d.*) gemäss den Nrn. 5 bezüglich 3 und 4 betrachteten Hülfsmittel. Geht man von der Entwickelung eines Integrales bei einem ausserwesentlich singulären Punkte aus, so hat man aus derselben den Werth des Integrales und seiner $m-1$ ersten Ableitungen in einem nichtsingulären Punkte zu entnehmen, und die Entwickelung bei diesem Punkte zu bilden und kommt auf das frühere Verfahren zurück.

Man kann hier voraussetzen, dass wenigstens zwei wesentlich singuläre Punkte vorhanden sind; denn wenn nur ein solcher vorhanden wäre $x = a$, und alle anderen singulären Punkte ausserwesentlich, so könnte man den wesentlich singulären Punkt durch die rationale Substitution ersten Grades $x - a = \frac{1}{\xi}$ ins Unendliche projiciren, und es sind in der transformirten Differentialgleichung die Integrale im Endlichen allenthalben einwerthig und stetig (ebenso wenn eine Differentialgleichung nur ausserwesentlich singuläre Punkte enthielte). Führt man in die Entwickelungen der Integrale durch Potenzreihen, wenn sie bei $\xi = 0$ genommen sind, die umgekehrte Substitution ein, so erhält man die Darstellung der in der ganzen Ebene

einwerthigen und, abgesehen von $x=a$, stetigen Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung. (Vgl. den Anfang dieser No.) Sind zwei wesentlich singuläre Punkte vorhanden, so kann man einen $x=a$ durch die Substitution $x-a=\frac{1}{\xi}$ ins Unendliche projiciren, so dass man eine Differentialgleichung mit nur einem wesentlich singulären Punkte im Endlichen erhält, dann sind die in dem Bezirke dieses Punktes geltenden Entwickelungen (No. 1 (2.)) für die ganze Ebene gültig.

f.) Nach dem in dieser No. bei *c.*) und *d.*) und den vorhergehenden (No. 3 (9.), No. 5 I (3.) (11.), II) Gesagten ist die Untersuchung der homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten darauf zurückgeführt, die Darstellungen der Integrale aufzustellen, die in den Bezirken der singulären Punkte gültig sind (aus Ausdrücken No. 1 (2.) sich linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen), die Determinante dieser Integrale und die Constanten in der linearen Verbindung der Integrale, die das Resultat des Umganges um den zugehörigen singulären Punkt ausdrückt, zu bestimmen. Bei Differentialgleichungen mit nur regulären Integralen, oder bei solchen, in denen Systeme normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt sind, bleibt speciell übrig, die Darstellungen, die in den Bezirken der singulären Punkte gelten, vollständig zu geben. In Betreff dieser Fragen folgen weitere Untersuchungen in No. 7.

7.

Bei der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x)=0$$

besteht in dem zu einem singulären Punkte $x=a$ im Endlichen gehörenden Bezirke ein System linearunabhängiger Integrale, welches durch die Ausdrücke in den verschiedenen Gruppen (2.) der No. 1, oder durch Functionen, die aus diesen Ausdrücken linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzt sind, gegeben wird. ***Es soll nun hier die Frage, wie die für diesen Bezirk gültige Darstellung der in einem solchen Integrale mit den Potenzen von*** $\log(x-a)$ ***multiplicirten Functionen zu ermitteln ist, behandelt werden.***

I. In die Differentialgleichung (1.) $F_m(y,x)=0$ werde ein Integral der Form

$$(2.)\qquad y = (x-a)^r\{\chi_1(x)+\chi_2(x)\log(x-a)+\cdots+\chi_q(x)(\log(x-a))^q\},$$

in welchem die Functionen $\chi(x)$ in dem zu dem singulären Punkte a ge-

hörenden Bezirke, abgesehen von a, einwerthig und stetig sind, eingesetzt, alsdann werde nach Potenzen von $\log(x-a)$ geordnet, so muss der Coefficient jeder solcher Potenz verschwinden. Daraus ergiebt sich

$$(3.)\quad F_m((x-a)^r\chi_q(x), x) = 0,$$

$$(4.)\quad F_m((x-a)^r\chi_{\mathfrak{b}}(x), x) = f_{q-\mathfrak{b}},\quad (\mathfrak{b} = q-1, \dots 1),$$

wo $f_{q-\mathfrak{b}}$ ein homogener linearer Ausdruck von folgenden Grössen ist: $(x-a)^r\chi_{\mathfrak{b}+1}$ und seinen Ableitungen bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, $(x-a)^r\chi_{\mathfrak{b}+2}$ und seinen Ableitungen bis zur $(m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung u. s. w. bis $(x-a)^r\chi_q$ und seinen Ableitungen bis zur $(m-(q-\mathfrak{b}))^{\text{ten}}$ Ordnung (s. die Abh. des Herrn ***Fuchs*** Bd. 68 dieses Journals No. 1 II). Die Coefficienten in diesem homogenen linearen Ausdruck sind ganze rationale Functionen der Grössen $p_1, \dots p_{m-1}, \frac{1}{(x-a)^s}$, wo s gleich positiven ganzen Zahlen ist, mit ganzzahligen Coefficienten, und sind bei fixirten Werthen der ganzen Zahlen q und $\mathfrak{b}$ unabhängig von den Werthen der Functionen $(x-a)^r\chi(x)$, von denen irgend welche einzelne (darunter auch $(x-a)^r\chi_q$), oder auch alle Null sein dürfen. Da die Coefficienten p rational sind, so werden die Coefficienten in dem homogenen Ausdruck $f_{q-\mathfrak{b}}$ bekannte rationale Functionen von x mit Constanten, die sich aus den Constanten in $p_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a} = 1 \dots m-1)$ und der Constanten a rational mit rationalen Zahlcoefficienten zusammensetzen.

Wenn man nun irgend eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $\Phi_m(y, x) = 0$ hat, so erhält man die homogene lineare Differentialgleichung, welche die s^{ten} Ableitungen der Integrale von $\Phi_m(y, x) = 0$ und nur diese zu Integralen hat, indem man die Differentialgleichung $\Phi_m(y, x) = 0$ successive, und höchstens $s$mal, differentiirt, dabei aber vor jeder Differentiation durch den Coefficienten des letzten Gliedes dividirt, und zwar so oft differentiirt, bis das letzte Glied $\frac{d^sy}{dx^s}$ oder eine höhere Ableitung von s enthält. Wird dann $\frac{d^sy}{dx^s} = y_{(s)}$ gesetzt, so enthält die ermittelte Differentialgleichung für $y_{(s)}$ die s^{ten} Ableitungen der Integrale von $\Phi_m(y, x) = 0$ und nur diese zu Integralen (s. die Abh. des Herrn ***Fuchs*** Bd. 68 dieses Journals p. 383). In dieser Differentialgleichung wird der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt; die höchste Ableitung kann auch nullter Ordnung sein, so dass die Differentialgleichung $y_{(s)} = 0$ ist.

Hat man ferner eine homogene lineare Differentialgleichung $\Psi_m(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung

gleich 1 und ist $R(x)$ eine rationale Function, so genügt $R(x)y = y'$ der Differentialgleichung $R(x)\Psi_m[y'(R(x))^{-1}, x] = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1.

Wenn man aber zwei homogene lineare Differentialgleichungen $\Phi_m(y, x) = 0$ und $\Psi_n(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitungen gleich 1 hat, so kann man nach Abh. Bd. 83 No. 1 I und II aus diesen die homogene lineare Differentialgleichung herleiten, welche diejenigen Integrale beider, die unter einander linearunabhängig sind, zu Integralen hat, und rationale Coefficienten enthält; der Coefficient der höchsten Ableitung wird gleich 1 gesetzt. Und zwar erhält man diese Differentialgleichung durch Operationen, welche bei der Differentiation gegebener rationaler Functionen vorkommen. Aus diesem Satze folgt, dass wenn der ersten der genannten Differentialgleichungen eine Function y_1, der zweiten eine Function y_2 genügt, so genügt der aus diesen Differentialgleichungen hergeleiteten dritten Differentialgleichung die Summe $y_1 + y_2$.

Nun werde in (4.) $\mathfrak{b} = q-1$ gesetzt; dann soll eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 für f_1 hergeleitet werden. In f_1 kommen linear mit rationalen Coefficienten $(x-a)^r\chi_q$ und seine Ableitungen bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung vor. Nun genügt $(x-a)^r\chi_q$ der Differentialgleichung (3.), aus dieser Differentialgleichung werden diejenigen für die s^{ten} Ableitungen der Integrale $(s = 1 \dots m-1)$ hergeleitet.

Wenn der Ausdruck $(x-a)^r\chi_q$ oder eine seiner Ableitungen in f_1 einen rationalen Coefficienten hat, der nicht identisch Null ist, so wird die Differentialgleichung für dieses Product aufgestellt. Alle diese homogenen linearen Differentialgleichungen (nullter oder höherer Ordnung) haben rationale Coefficienten mit dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1. Dann werden diejenigen Integrale der Differentialgleichungen für den ersten und zweiten Summanden in f_1, welche unter einander linearunabhängig sind, in einer Differentialgleichung vereinigt, hierauf die Integrale dieser Differentialgleichung und der Differentialgleichung für den dritten Summanden in f_1, welche unter einander linearunabhängig sind, u. s. w., wodurch man schliesslich eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 erhält, welcher f_1 genügt.

Wird in diese Differentialgleichung für f_1 eingesetzt $F_m(y, x)$, so erhält man eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, welcher $(x-a)^r \chi_{q-1}$ genügt.

Nachdem man die Differentialgleichungen für $(x-a)^r \chi_q$ (3.) und für $(x-a)^r \chi_{q-1}$ kennt, wird in (4.) $\mathfrak{b} = q-2$ eingesetzt und dasselbe Verfahren angewandt, um die Differentialgleichung für $(x-a)^r \chi_{q-2}$ zu erhalten, u. s. w.

Man hat also in Bezug auf homogene lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten folgenden allgemeinen Satz:

A.) Von der homogenen linearen Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten werde das Integral genommen

$$(5.) \qquad y = (x-a)^r \{\chi_1(x) + \chi_2(x)\log(x-a) + \cdots + \chi_q(x)(\log(x-a))^{q-1}\},$$

in welchem die Functionen $\chi(x)$ innerhalb des zu dem singulären Punkte a gehörenden Bezirkes, abgesehen von $x = a$, einwerthig und stetig sind, *q eine beliebig gewählte, aber fixirte* positive ganze Zahl > 0 ist, von den Functionen $\chi(x)$ irgend welche einzelne, oder auch alle gleich Null sein dürfen. Nun werde die *Zahl* $\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{b} = q \dots 1$) *fixirt.* Dann besteht eine homogene lineare Differentialgleichung ***mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich*** 1, welcher ***der Factor von*** $(\log(x-a))^{\mathfrak{b}-1}$ ***in*** y, also die Function $(x-a)^r \chi_{\mathfrak{b}}(x)$ genügt, und zwar so beschaffen, dass ***dieser*** Differentialgleichung der Factor von $(\log(x-a))^{\mathfrak{b}-1}$ in y genügt, ***was auch die Functionen*** $(x-a)^r \chi$ ***in dem Integrale*** y (5.) ***für Werthe haben mögen. Man erhält diese Differentialgleichung nach der im Vorhergehenden auseinandergesetzten Methode aus den Differentialgleichungen*** (3.) ***und*** (4.) ***hergeleitet, ohne dass über die Werthe der Functionen*** $(x-a)^r \chi$ ***irgend etwas bekannt ist, durch keine anderen Operationen, als solche, welche bei der Differentiation gegebener rationaler Functionen vorkommen, wobei nur zu beurtheilen ist, ob Grössen, die sich aus den constanten Coefficienten in den rationalen Functionen*** $p_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots m$) ***und der Constanten a als ganze rationale Ausdrücke mit rationalen Zahlcoefficienten zusammensetzen, verschwinden.***

In einer Gruppe (2.) No. 1 von λ Integralen bei $x = a$, in welchen sich die Exponenten in den Potenzreihen nur um ganze Zahlen unterscheiden, lassen sich alle Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ durch die Grössen $(x-a)^{r_{\mathfrak{a}}} \varphi_{\mathfrak{a}1}$ ($\mathfrak{a} = 1 \dots \lambda$) linear und homogen mit constanten Coefficienten ausdrücken. Hieraus und aus Satz *A.*) folgt:

B.) In einer Gruppe von λ Integralen bei $x=a$, deren in dem Bezirke von $x=a$ geltende Entwickelungen durch die Ausdrücke (2.) in No. 1 dargestellt werden, sei *die höchste Potenz des* $\log(x-a)$, *welche mit nicht verschwindendem Factor überhaupt vorkommt, die* $(k-1)^{te}$ $(k\geqq 1)$. Wird nun in Satz *A.*) $q\geqq k$ und $\mathfrak{b}=1$ gesetzt und die dort angegebene Differentialgleichung gebildet, so genügen derselben *sämmtliche Factoren* der (nullten oder höheren) Potenzen des $\log(x-a)$ in dieser Gruppe.

Hieraus folgt:

a.) Setzt man in Satz *A.*) $q=m$ und $\mathfrak{b}=1$, oder nimmt man von den verschiedenen Zahlen k in Satz *B.*), die den verschiedenen Gruppen bei $x=a$ angehören, die grösste und setzt dieser q in Satz *A.*) gleich und $\mathfrak{b}=1$ und bildet die in *A.*) angegebene Differentialgleichung, so genügen derselben *sämmtliche Factoren* der Potenzen von $\log(x-a)$, die in der nach No. 1 (2.) etc. gebildeten Entwickelung *irgend eines Integrales bei* $x=a$ vorkommen.

Es gilt weiter der Satz:

b.) Die Zahl k in Satz *B.*) wird, wenn in $F_m(y,x)=0$ bei $x=a$ der charakteristische Index gleich Null ist, oder wenn $F_m(y,x)$ gleich einem solchen Systeme normaler Ausdrücke ist, welches sich bei $x=a$ durch ein System wie (21.) in No. 2 darstellen lässt, durch das Verfahren Abh. Bd. 83 No. 9 (21.) bestimmt.

Wenn in der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ bei $x=a$ der charakteristische Index gleich Null ist, so dass $F_m=0$ bei $x=a$ nur reguläre Integrale hat, so haben auch die Differentialgleichungen für die Ableitungen von y bei $x=a$ nur reguläre Integrale, und diese Integrale bleiben, wenn sie mit rationalen Functionen multiplicirt werden, bei $x=a$ regulär. Ebenso, wenn die linearunabhängigen Integrale zweier solcher Differentialgleichungen in einer Differentialgleichung vereinigt werden, verhalten sich die Integrale dieser bei $x=a$ regulär. Daher muss auch in der Differentialgleichung für f_1 bei $x=a$ der charakteristische Index gleich Null sein. Da dasselbe in $F_m(y,x)=0$ stattfindet, und (Abh. Bd. 76 No. 3) die Summe beider charakteristischer Indices gleich ist dem in der Differentialgleichung des Satzes *A.*) für $(x-a)^r\chi_{q-1}$, so muss der der letzteren bei $x=a$ ebenfalls gleich Null sein. Indem man diese Betrachtungen fortsetzt, ergiebt sich dasselbe für alle in Satz *A.*) genannten Differentialgleichungen.

Man hat also den Satz:

C.) Ist in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ der charakteristische Index gleich Null, so ist auch in den Differentialgleichungen, über die Satz A.) handelt, für $\mathfrak{b} = q-1, \dots 1$ der charakteristische Index bei $x = a$ gleich Null.

Hat die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ nur reguläre Integrale, so haben auch die Differentialgleichungen für die Ableitungen von y nur reguläre Integrale; bei $x = \infty$ ergiebt sich dies durch Differentiation der Entwickelungen von y, die von x abhängen. Durch dieselben Betrachtungen wie vorhin (vgl. Abh. Bd. 83 No. 3 II p. 100) ergiebt sich dann:

c.) Hat die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ nur *reguläre Integrale,* so haben auch die Differentialgleichungen des Satzes *A.*) nur *reguläre* Integrale.

d.) Ist $F_m(y, x)$ gleich einem Systeme *normaler* Differentialausdrücke, so auch jeder Differentialausdruck, der in den Differentialgleichungen des Satzes *A.*) gleich Null gesetzt ist. Dieses ergiebt sich mit Hülfe der Sätze Abh. Bd. 83 No. 7 III*c* und IV*a*. Dabei ist nur noch zu zeigen, dass, wenn ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt ist, die Differentialgleichung für die s^{ten} Ableitungen der Integrale auch wieder ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt enthält. Es genügt, dies für die erste Ableitung $y_{(1)}$ zu zeigen. Ist $F_m(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω und ist die Differentialgleichung für die erste Ableitung der Integrale von $F_m = 0$ $\Phi_n(y, x) = 0$, $(n \leqq m)$, so kann $\Omega \Phi_n(\Omega^{-1} y', x) = 0$ nur reguläre Integrale enthalten, demnach ist $\Phi_n(y, x)$ ein normaler Ausdruck mit dem determinirenden Factor Ω. Man habe ferner die Differentialgleichung $f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y'$, $\mathrm{F}_{m-\mathfrak{a}_0}(y', x) = 0$, in welcher $f_{\mathfrak{a}_0}$ ein normaler Ausdruck, $\mathrm{F}_{m-\mathfrak{a}_0}$ ein System solcher ist. Ist in $f_{\mathfrak{a}_0}$ der Coefficient von y gleich Null, so ist $\frac{dy}{dx}$ gleich $y_{(1)}$ in dem Ausdruck $f_{\mathfrak{a}_0}$ zu setzen. Ist in $f_{\mathfrak{a}_0}$ der Coefficient von y von Null verschieden gleich α, so wird

$$\alpha \frac{d}{dx} \frac{1}{\alpha} f_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = \varphi(y_{(1)}, x) = \alpha \frac{d}{dx} \frac{y'}{\alpha}, \quad \frac{dy}{dx} = y_{(1)}$$

gesetzt, und es bleibt übrig, aus der Differentialgleichung $\frac{1}{\alpha} \mathrm{F}_{m-\mathfrak{a}_0}(\alpha z, x) = 0$, in welcher wiederum ein System normaler Ausdrücke gleich Null gesetzt ist, die Differentialgleichung für $\frac{dz}{dx} = z_{(1)}$ herzuleiten. Ist dieselbe $\psi(z_{(1)}, x) = 0$, so wird die gesuchte $\varphi(y_{(1)}, x) = u$, $\alpha \psi\left(\frac{u}{\alpha}, x\right) = 0$.

D.) Wenn in der Differentialgleichung (1.) die Coefficienten p in einem um den Punkt $x=a$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreise abgesehen von $x=a$ *beliebige einwerthige und stetige Functionen von* x *sind,* so bleiben die Betrachtungen, die zu Satz *A.*) geführt haben, unverändert, *demnach auch dieser Satz, so wie die Sätze B.) und C.), wobei die Coefficienten der Differentialgleichungen sich rational mit rationalen Zahlcoefficienten aus den Coefficienten* p *von* (1.) *und ihren Ableitungen und der Grösse* $(x-a)^s$, *wo* s *ganzzahlig, zusammensetzen.* Nur kann die Herstellung dieser Differentialgleichungen auf Schwierigkeiten führen, die bei rationalen p in (1.) allgemein genommen nicht vorkommen, die darin bestehen, zu beurtheilen, ob eine ganze rationale Function der vorhin genannten Grössen identisch verschwindet.

II. Es sei nun in der Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten bei dem singulären Punkte $x=a$ im Endlichen der *charakteristische Index gleich Null.* Dann soll die Gruppe der linearunabhängigen Integrale der Form (2.), in denen die Exponenten in den Potenzreihen sich von dem gegebenen Exponenten r nur um ganze Zahlen unterscheiden, vollständig aufgestellt, *also es sollen die Factoren der Potenzen des* $\log(x-a)$ *dargestellt werden.* Zu dem Zwecke hat man nach den Sätzen *A.*) und *B.*) in I eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 zu bilden, die diese Factoren als particuläre Integrale enthält und die (Satz *C.*)) bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null hat. Werden dann aus dieser Differentialgleichung alle linearunabhängigen Integrale genommen, die eine Entwickelung der Form $(x-a)^{r+\mathfrak{c}}\sum_{0}^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ haben, wo r Exponent in der untersuchten Gruppe, $\mathfrak{c}$ ganzzahlig ist, so muss sich durch diese linear und homogen mit constanten Coefficienten jeder Factor einer Potenz des $\log(x-a)$ in dieser Gruppe darstellen lassen.

a.) Daher ist zunächst zu zeigen, wie bei einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 bei dem singulären Punkte $x=a$ im Endlichen, *bei dem der charakteristische Index gleich Null ist, alle linearunabhängigen Integrale, deren Entwickelungen die Form* $(x-a)^{r+\mathfrak{c}}\sum_{0}^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ *haben, wo* r *ein und derselbe gegebene Exponent und* $\mathfrak{c}$ *ganzzahlig ist, aufgestellt werden.*

Die Anzahl dieser linearunabhängigen Integrale sei s. Aus den

ursprünglichen lassen sich immer s solche bilden, in denen die Exponenten, zu denen sie gehören, von einander verschieden sind. Denn nimmt man ein Integral heraus, in welchem der reelle Theil dieses Exponenten am kleinsten ist, so kann man, wenn noch andere mit demselben Exponenten vorhanden sind, jedes von diesen linear mit constanten Coefficienten mit dem ersten verbinden, und es dabei einrichten, dass der Exponent, zu welchem die Verbindung gehört, einen grösseren reellen Theil hat, als der in dem ersten Exponenten. Alsdann sind diese Verbindungen in das System der linearunabhängigen Integrale einzuführen, und ist auf die übrigen Integrale dasselbe Verfahren anzuwenden. Dann kann man, wenn die linearunabhängigen Entwickelungen zu den Exponenten

$$r, \quad r+k_1, \quad r+k_1+k_2, \quad \ldots \quad r+k_1+\cdots+k_s$$

gehören, wo die k positive von Null verschiedene ganze Zahlen sind, in der Entwickelung des Integrales, welches zu dem Exponenten

$$r+k_1+\cdots+k_l \quad (l=0\ldots s-1, \; k_0=0)$$

gehört, die Potenzen mit den Exponenten $r+k_1+\cdots+k_{l+1}$ bis $r+k_1+\cdots+k_s$ als ausfallend voraussetzen, und den Anfangscoefficienten in jeder Entwickelung gleich Eins annehmen. Es kann nur *ein* System von einander linearunabhängiger Integrale mit den angegebenen Eigenschaften geben. Dasselbe gilt, wenn in der Differentialgleichung bei $x=a$ der charakteristische Index beliebig gleich h kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung wäre.

Es werde nun die Differentialgleichung (1.) von M^{ter} Ordnung $F_M(y, x)=0$ genommen und es soll zunächst bei $x=a$ der charakteristische Index beliebig gleich $h<M$ sein. Wenn dieser Differentialgleichung eine Entwickelung

$$(x-a)^\varrho \sum_0^\infty k_\alpha (x-a)^\alpha$$

genügen soll, in welcher k_0 von Null verschieden ist, so muss ϱ Wurzel der Exponentengleichung sein, und es sei daher eine Gruppe von Wurzeln derselben, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$. In diesen soll der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner als der der folgenden sein. Setzt man nun in $F_M(y, x)=0$ für y ein $(x-a)^{r_\lambda}u$, so kann man die Differentialgleichung für u auf folgende Form (vgl. Abh. Bd. 74 No. 8) bringen. Die Ordnung, in der die rationale Function p_α der Coef-

ficient von $\frac{d^{M-\alpha}y}{dx^{M-\alpha}}$ für $x=a$ unendlich wird, sei π_α, wo π_α gleich Null gesetzt ist, wenn p_α für $x=a$ nicht unendlich wird, und die grösste der Zahlen $\pi_\alpha+M-\alpha$ $(\alpha=0\dots M)$ sei g. In der Differentialgleichung für u ist der charakteristische Index bei $x=a$ derselbe gleich h und, wenn die Ordnung, in der der Coefficient von $\frac{d^{M-\alpha}u}{dx^{M-\alpha}}$ für $x=a$ unendlich wird, durch $\bar{\pi}_\alpha$ bezeichnet wird, so ist die grösste der Zahlen $\bar{\pi}_\alpha+M-\alpha$ $(\alpha=0\dots M)$ ebenfalls gleich g. Der Coefficient von $\frac{d^{M-\alpha}u}{dx^{M-\alpha}}$ sei P_α, $P_0=1$, so ist P_α eine bekannte rationale Function und wird

$$(6.)\qquad P_\alpha(x-a)^{g-M+\alpha}=Q_\alpha(x)=Q_\alpha(a)+(x-a)\,Q'_\alpha(x)\qquad(\alpha=0\dots M)$$

gesetzt, ebenfalls $Q'_\alpha(x)$ eine solche; in dieser seien die gemeinschaftlichen Factoren von Zähler und Nenner weggehoben. $Q_M(a)$ ist gleich Null, weil $r_{\lambda'}$ Wurzel der Exponentengleichung. Es werde dann diejenige ganze rationale Function von niedrigstem Grade gebildet, welche als Factoren die Nenner von $Q'_\alpha(x)$ $(\alpha=0\dots M)$ enthält, dieselbe sei $N(x)$, so muss $N(a)$ von Null verschieden sein. Die ganze rationale Function $Q'_\alpha(x)N(x)$ sei durch $R_\alpha(x)$ bezeichnet. Dann wird die Differentialgleichung für u auf die Form gebracht:

$$(7.)\quad\begin{cases} Q_h(a)(x-a)^{M-h-1}N(x)\frac{d^{M-h}u}{dx^{M-h}} \\ \qquad\qquad +Q_{h+1}(a)(x-a)^{M-h-2}N(x)\frac{d^{M-h-1}u}{dx^{M-h-1}}+\cdots+Q_{M-1}(a)N(x)\frac{du}{dx} \\ =-(x-a)^M R_0(x)\frac{d^M u}{dx^M} \\ \quad -(x-a)^{M-1}R_1(x)\frac{d^{M-1}u}{dx^{M-1}}-\cdots-(x-a)^{M-h}R_h(x)\frac{d^{M-h}u}{dx^{M-h}}-\cdots-R_M(x)u. \end{cases}$$

Es sei

$$N(x)=\sum_0^n g_\alpha(x-a)^\alpha,$$

so dass g_0 und g_α von Null verschieden sind und der höchste Grad in den ganzen rationalen Functionen $R_0(x)$ bis $R_M(x)$ sei l. Soll nun die Entwickelung

$$u=\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha,$$

worin c_0 und weitere Coefficienten auch gleich Null sein dürfen, die Differentialgleichung (7.) erfüllen, so muss zwischen den Coefficienten c_α folgende Relation gelten:

$$
(8.)\quad \left\{
\begin{aligned}
& c_{k+1} g_0 \{Q_h(a)(k+1)k\ldots(k+1-M+h+1) \\
& \qquad + Q_{h+1}(a)(k+1)k\ldots(k+1-M+h+2)+\cdots+Q_{M-1}(a)(k+1)\} \\
& + c_k g_1 \{Q_h(a)k(k-1)\ldots(k-M+h+1) \\
& \qquad + Q_{h+1}(a)k(k-1)\ldots(k-M+h+2)+\cdots+Q_{M-1}(a)k\} \\
& + c_{k-1} g_2 \{Q_h(a)(k-1)(k-2)\ldots(k-1-M+h+1)+Q_{h+1}(a)(k-1)(k-2)\ldots \\
& \qquad .(k-1-M+h+2)+\cdots+Q_{M-1}(a)(k-1)\} \\
& \quad \vdots \\
& + c_{k-n+1} g_n \{Q_h(a)(k-n+1)(k-n+2)\ldots(k-n+1-M+h+1)+Q_{h+1}(a)(k-n+1) \\
& \qquad .(k-n+2)\ldots(k-n+1-M+h+2)+\cdots+Q_{M-1}(a)(k-n+1)\} \\
& \quad = c_k\{-R_0(a)k(k-1)\ldots(k-M+1) \\
& \qquad -R_1(a)k(k-1)\ldots(k-M+2)-\cdots-R_M(a)\} \\
& + c_{k-1}\Big\{-\Big(\frac{dR_0}{dx}\Big)_{x=a}(k-1)(k-2)\ldots(k-1-M+1) \\
& \qquad -\Big(\frac{dR_1}{dx}\Big)_{x=a}(k-1)(k-2)\ldots(k-1-M+2)-\cdots-\Big(\frac{dR_M}{dx}\Big)_{x=a}\Big\} \\
& + \frac{c_{k-2}}{1.2}\Big\{-\Big(\frac{d^2R_0}{dx^2}\Big)_{x=a}(k-2)(k-3)\ldots(k-2-M+1) \\
& \qquad -\Big(\frac{d^2R_1}{dx^2}\Big)_{x=a}(k-2)(k-3)\ldots(k-2-M+2)-\cdots-\Big(\frac{d^2R_M}{dx^2}\Big)_{x=a}\Big\} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{c_{k-l}}{1.2\ldots l}\Big\{-\Big(\frac{d^lR_0}{dx^l}\Big)_{x=a}(k-l)(k-l-1)\ldots(k-l-M+1) \\
& \qquad -\Big(\frac{d^lR_1}{dx^l}\Big)_{x=a}(k-l)(k-l-1)\ldots(k-l-M+2)-\cdots-\Big(\frac{d^lR_M}{dx^l}\Big)_{x=a}\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese durch Gleichstellung der Coefficienten von $(x-a)^k$ in (7.) erhaltene Relation muss für alle ganzen Zahlen $k \geqq 0$ gelten, die Coefficienten c mit negativem Zeiger in (8.) sind gleich Null zu setzen.

Die Wurzeln der Exponentengleichung bei $x=a$ seien ϱ_1 bis ϱ_{M-h}. Dann giebt der Coefficient von c_{k+1} in (8.) gleich Null gesetzt eine Gleichung in k, die zu Wurzeln hat:

$$\varrho_1-r_{\lambda'}-1, \quad \varrho_2-r_{\lambda'}-1, \quad \ldots \quad \varrho_{M-h}-r_{\lambda'}-1.$$

Nun seien die unter einander verschiedenen Wurzeln, die sich von $r_{\lambda'}$ um ganze Zahlen $\geqq 0$ unterscheiden, in einer Anzahl $\geqq 1$:

$$(9.)\quad r_{\lambda'}, \quad r_{\lambda'}+s_1, \quad r_{\lambda'}+s_1+s_2, \quad \ldots \quad r_{\lambda'}+s_1+s_2+\cdots+s_\varkappa,$$

wo die s von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind. Der Coefficient von c_{k+1} in (8.) verschwindet, wenn k alle positiven ganzen Zahlen von $k=0$ an durchläuft, nur wenn die Anzahl der Grössen (9.) >1 ist, für

$$(10.)\quad k+1 = s_1, \quad s_1+s_2, \quad \ldots \quad s_1+s_2+\cdots+s_\varkappa.$$

Lässt man die Coefficienten

$$(11.)\qquad c_0,\quad c_{s_1},\quad c_{s_1+s_2},\quad \ldots\quad c_{s_1+s_2+\cdots+s_\varkappa}$$

zunächst unbestimmt, so erhält man aus (8.):

$$(12.)\quad \begin{cases} c_\alpha = c_0 b_{0\alpha} \quad (\alpha = 1\ldots s_1-1) \\ c_\alpha = c_0 b_{s_1\alpha}+c_{s_1} b^{(1)}_{s_1\alpha} \quad (\alpha = s_1+1,\ldots s_1+s_2-1) \\ \vdots \\ c_\alpha = c_0 b_{s_1+\cdots+s_{\varkappa-1}\alpha}+c_{s_1} b^{(1)}_{s_1+\cdots+s_{\varkappa-1}\alpha}+\cdots+c_{s_1+\cdots+s_{\varkappa-1}} b^{(\varkappa-1)}_{s_1+\cdots+s_{\varkappa-1}\alpha} \\ \qquad (\alpha = s_1+\cdots+s_{\varkappa-1}+1,\ldots s_1+\cdots+s_\varkappa-1), \end{cases}$$

wo die b bekannte Grössen sind. Alsdann weiter aus (8.)

$$(13.)\quad \begin{cases} c_\alpha = c_0 b_{s_1+\cdots+s_\varkappa\alpha}+c_{s_1} b^{(1)}_{s_1+\cdots+s_\varkappa\alpha}+\cdots+c_{s_1+\cdots+s_\varkappa} b^{(\varkappa)}_{s_1+\cdots+s_\varkappa\alpha} \\ \qquad (\alpha = s_1+\cdots+s_\varkappa+1,\ldots\infty), \end{cases}$$

wo die b bekannt sind.

Wenn man nun in (8.)

$$k+1 = s_1,\quad s_1+s_2,\quad \ldots\quad s_1+s_2+\cdots+s_\varkappa$$

setzt, alsdann in diese Gleichungen für die c_α ihre Ausdrücke aus (12.), so erhält man $\varkappa$ homogene lineare Gleichungen zwischen den unbestimmt gelassenen Coefficienten c_0, c_{s_1}, $\ldots$ $c_{s_1+s_2+\cdots+s_{\varkappa-1}}$. Dass diese Gleichungen durch Werthe der c, die nicht alle gleich Null sind, erfüllt werden, ist nothwendig und hinreichend für das Bestehen der die Differentialgleichung formell erfüllenden Entwickelung $(x-a)^{r_{\lambda'}}\sum\limits_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, in welcher der Zeiger des von Null verschiedenen Anfangscoefficienten kleiner als $s_1+s_2+\cdots+s_\varkappa$ ist. Diese Gleichungen haben die Form:

$$(14.)\quad \begin{cases} c_0\alpha_{11} = 0 \\ c_0\alpha_{21}+c_{s_1}\alpha_{22} = 0 \\ c_0\alpha_{31}+c_{s_1}\alpha_{32}+c_{s_1+s_2}\alpha_{33} = 0 \\ \vdots \\ c_0\alpha_{\varkappa 1}+c_{s_1}\alpha_{\varkappa 2}+\cdots+c_{s_1+s_2+\cdots+s_{\varkappa-1}}\alpha_{\varkappa\varkappa} = 0, \end{cases}$$

wo die Grössen α bekannt sind.

Ist die Determinante dieses Gleichungssystemes von Null verschieden, so kann das System nur erfüllt werden, wenn alle c gleich Null werden. Ist die Determinante gleich Null, so giebt es von Null verschiedene Werthe der c, die das System erfüllen. Um den allgemeinsten Ausdruck der Wurzeln c zu erhalten, kann man in folgender Weise verfahren. Nachdem die Glieder

in den Gleichungen, in denen der Coefficient $\alpha = 0$ ist, weggelassen sind, wobei jedes vollständig aus dem Systeme ausgefallene c willkürlich bleibt, ist jedes c, welches allein in einer Gleichung vorkommt, in dem System zu annulliren. Die genannten c und das übrigbleibende Gleichungssystem (System II) vertreten das ursprüngliche Gleichungssystem (System I). Kommt in dem System I, nachdem die Glieder, in denen $\alpha = 0$ ist, weggelassen sind, kein c allein in einer Gleichung vor, so ist die erste Gleichung nach dem c mit dem höchsten Zeiger aufzulösen und dieser Werth von c in die übrigen Gleichungen einzusetzen. Diese übrigen Gleichungen (System II), die nach dem vorhingenannten c aufgelöste Gleichung, sowie die ausgefallenen willkürlichen c vertreten dann das System I. Nun ist dasselbe Verfahren auf das Gleichungssystem II anzuwenden; u. s. w. Diejenigen c, die bei diesem Verfahren nicht annullirt und nicht durch andere ausgedrückt sind, bleiben willkürlich, und man erhält die Ausdrücke der übrigen, welche mit den willkürlichen c das Gleichungssystem (14.) erfüllen. Sind alle c in (14.) zu annulliren, so bleibt nur $c_{s_1+s_2+\dots+s_\varkappa}$ willkürlich.

Werden nun die Ausdrücke von c_0, c_{s_1}, ... $c_{s_1+s_2+\dots+s_\varkappa-1}$ in (12.) und (13.) eingesetzt, so erhält man die Coefficienten $c_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 0\dots\infty$), so weit sie nicht verschwinden, sämmtlich ausgedrückt als homogene lineare Functionen, in denen die Coefficienten bekannt sind, von denjenigen der Grössen c_0, c_{s_1}, ... $c_{s_1+s_2+\dots+s_\varkappa}$, die willkürlich geblieben sind. Da, wenn durch letztere Grössen eine der übrigen c_0, c_{s_1} ... $c_{s_1+s_2+\dots+s_\varkappa-1}$ ausgedrückt ist, in einem solchen Ausdruck das c mit höherem Zeiger durch solche mit niedrigeren Zeigern dargestellt ist, so müssen die willkürlich gebliebenen Grössen aus der Reihe c_0, c_{s_1}, ... $c_{s_1+s_2+\dots+s_\varkappa}$ in den $c_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 0\dots\infty$) successive auftreten, und zwar die Grösse mit niedrigerem Zeiger vor der mit höherem.

Nun soll der charakteristische Index h gleich Null angenommen werden. Dann ist g in (6.) gleich M; $Q_0(a) = 1$, $R_0(x) = 0$. Werden nun die vorhin genannten willkürlichen Grössen c in den Coefficienten $c_\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = 0\dots\infty$) alle bis auf eine annullirt, so erhält man eine Entwickelung der gesuchten Form, die die Differentialgleichung formell erfüllt. Von dieser Entwickelung kann aber gezeigt werden, dass dieselbe convergirt. Da nun, wenn mehrere der Grössen c willkürlich blieben, die Entwickelungen, die man dadurch erhält, dass man der Reihe nach alle bis auf eine annullirt, zu verschiedenen Exponenten gehören, so sind sie unter einander linearunabhängig und geben addirt die allgemeinste Entwickelung der gesuchten Art. (Vgl. die Ab-

handlung des Herrn *Fuchs* Bd. 68 dieses Journals p. 377, wo dasselbe Verfahren für den Fall angewandt worden ist, dass in den Entwickelungen der Integrale, die zu einer Gruppe gehören, überhaupt kein Logarithmus vorkommt.) Was die Convergenz dieser Entwickelungen angeht, so ist Folgendes zu bemerken. Wenn eine Reihe der Form $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, in welcher c_0 und folgende Coefficienten auch gleich Null sein dürfen, die Differentialgleichung (7.) für den Fall, dass der charakteristische Index $h=0$ ist, formell (also so dass die Coefficienten gleich hoher Potenzen auf beiden Seiten gleich sind) erfüllt, so muss sie auch die Differentialgleichung

$$(15.)\quad \begin{cases} (x-a)^{M-1}\dfrac{d^M u}{dx^M}+Q_1(a)(x-a)^{M-2}\dfrac{d^{M-1}u}{dx^{M-1}}+\cdots+Q_{M-1}(a)\dfrac{du}{dx} \\ = -(x-a)^{M-1}\dfrac{R_1(x)}{N(x)}\dfrac{d^{M-1}u}{dx^{M-1}}-(x-a)^{M-2}\dfrac{R_2(x)}{N(x)}\dfrac{d^{M-2}u}{dx^{M-2}}-\cdots-\dfrac{R_M(x)}{N(x)}u, \end{cases}$$

in welcher $\frac{R_1(x)}{N(x)}, \dots \frac{R_M(x)}{N(x)}$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelt sind, formell erfüllen. Dies ergiebt sich, wenn man mit der Entwickelung von $\frac{1}{N(x)}$ beide Seiten der Differentialgleichung (7.), worin der charakteristische Index $h=0$, nach der Regel für die Multiplication zweier Potenzreihen mit positiven Exponenten formell multiplicirt und dabei berücksichtigt, dass die formelle Entwickelung eines Productes $\frac{1}{N(x)}\left(R(x)(x-a)^s\frac{d^r u}{dx^r}\right)$, worin $R(x)$ eine ganze rationale Function, s positiv und ganzzahlig, $u=\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ ist, gleich ist dem Producte der formellen Entwickelungen von $\left(\frac{1}{N(x)}R(x)\right)$ und $(x-a)^s\frac{d^r u}{dx^r}$; (ist die Entwickelung von $\frac{1}{N(x)}$ gleich $\sum_0^\infty g_\alpha(x-a)^\alpha$, die von $R(x)$ gleich $\sum_0^n h_\alpha(x-a)^\alpha$, die von $(x-a)^s\frac{d^r u}{dx^r}$ gleich $\sum_0^\infty k_\alpha(x-a)^\alpha$, so wird die des Productes: $\Sigma g_\alpha h_\beta k_\gamma(x-a)^{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha,\ \begin{matrix}\gamma=0\dots\infty,\ \beta=0\dots n\\ \alpha+\beta+\gamma=0\dots\infty\end{matrix}\right)$). Von einer Reihe $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, die die Differentialgleichung (15.) formell erfüllt, und worin c_0 und darauf folgende Coefficienten auch gleich Null sein dürfen, wird die Convergenz in derselben Weise bewiesen wie in dem Falle, wo man in die Differentialgleichung $F_M(y,x)=0$ $y=(x-a)^{r_1}u$ eingesetzt hätte, und nun die Convergenz einer formellen Entwickelung $u=\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, in welcher c_0 von Null verschieden ist, zu beweisen hätte. Dieser Beweis findet sich in der Abhandlung des Herrn *Fuchs* Bd. 66 dieses Journals

p. 148. (Man kann dort in der Differentialgleichung (10.), worin die Grössen M positiv, grösser als Null, zu nehmen sind und für r ein Radius $\leqq$ als der des Kreises um $x=a$, der bis zum nächsten singulären Punkte geht, links noch das Glied $\gamma_0(x-a)^{m-1}\frac{d^m v}{dx^m}$ zufügen, worin γ_0 reell und $0<\gamma_0<1$ ist, dann ergiebt sich direct, dass die betreffende Reihe innerhalb des Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt mit dem Radius r convergirt.) Indem man also in der obengenannten allgemeinen formellen Entwickelung die willkürlich gebliebenen c der Reihe nach alle bis auf eines annullirt, erhält man die gesuchten linearunabhängigen Integrale, deren Entwickelungen von der Form $(x-a)^{r_{\lambda'}}\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$ sind. In denselben ergeben sich die Coefficienten c_a von $c_{s_1+s_2+\dots+s_\varkappa+1}$ bez. c_1 an *aus der Recursionsformel* (8.), *welche eine constante Anzahl der Glieder und die Coefficienten c_a linear und homogen enthält.*

b.) Bei der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ (1.) mit rationalen Coefficienten sei bei dem singulären Punkte $x=a$ im Endlichen *der charakteristische Index gleich Null* und die Exponentengleichung bei diesem Punkte enthalte eine Gruppe von λ Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, r_1, r_2, r_λ; diese seien so geordnet, dass der reelle Theil der vorhergehenden nicht kleiner, als der der folgenden ist. Dann giebt es λ Integrale der Differentialgleichung unter folgender Form

$$(16.)\qquad y_a=\nu_1\int dx\,\nu_1^{-1}\nu_2\dots\int\nu_{a-1}^{-1}\nu_a\,dx\qquad(a=1\dots\lambda),$$

wo $\nu_a=(x-a)^{r_a-a+1}\psi_a(x)$ ist, $\psi_a(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$ hat, worin c_0 von Null verschieden ist. Aus (16.) ergiebt sich durch Integration in den einzelnen Gliedern, wobei die jedesmalige Integrationsconstante annullirt wird, die Gruppe der λ Integrale unter der Form

$$(17.)\qquad \begin{cases} y_a=(x-a)^{r_a}\{\chi_{a1}(x)+\chi_{a2}(x)\log(x-a)+\dots+\chi_{aq_a}(x)(\log(x-a))^{q_a-1}\}, \\ \qquad\qquad (a=1\dots\lambda),\end{cases}$$

worin die Grössen χ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty\gamma_a(x-a)^a$ haben und für $x=a$ nicht alle verschwinden, $\chi_{aq_a}(x)$ von Null verschieden ist. Wenn man in den Entwickelungen $\psi_c(x)$ in ν_c $(c=1\dots a)$ $\varrho\geqq r_1-r_\lambda+1$ Glieder entwickelt, so kann man mittels derselben die Zahl q_a bestimmen und in jeder Grösse $(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$ $(b=1\dots q_a)$ ϱ Glieder von $(x-a)^{r_a}$ an gerechnet ermitteln (s. Abh. Bd. 83 No. 9 (21.)). Nun ist die Grösse

$$(x-a)^{r_k}\chi_{kb}(x)\quad(b=2\dots q_k)$$

eine homogene lineare Function mit constanten Coefficienten der Grössen

$$(x-a)^{r_{\mathfrak{a}}}\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \quad \left(\begin{matrix}\mathfrak{a}=1\ldots k-1\\ \mathfrak{b}=1\ldots q_{\mathfrak{a}}\end{matrix}\right).$$

Die Coefficienten in dieser homogenen Function werden in folgender Weise bestimmt. Das Integral y_k geht durch einen Umgang um $x=a$ über in

$$y'_k = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \cdots + e^{2\pi i r_k} y_k,$$

wo die Constanten bestimmt werden, wie in No. 5 (22.) angegeben ist, und *rationale* Functionen sind von $e^{r_k 2\pi i}$, $2\pi i$ und Constanten, die in den Entwickelungen (17.) der Integrale vorkommen. Werden dann in

$$y'_k = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \cdots + e^{2\pi i r_k} y_k$$

die Entwickelungen (17.) eingesetzt und auf beiden Seiten die Factoren gleich hoher Potenzen von $\log(x-a)$ einander gleichgestellt, so erhält man die genannten Relationen (vgl. die Abhandlung des Herrn *Fuchs* Bd. 68 dieses Journals p. 356). Aus denselben ergiebt sich ferner, dass sich alle Grössen $(x-a)^{r_{\mathfrak{a}}}\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \left(\begin{matrix}\mathfrak{a}=1\ldots\lambda\\ \mathfrak{b}=1\ldots q_{\mathfrak{a}}\end{matrix}\right)$ durch die Grössen $(x-a)^{r_{\mathfrak{a}}}\chi_{\mathfrak{a}1}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots\lambda)$ linear und homogen mit constanten Coefficienten, die bekannt sind, darstellen lassen. Es sind also diese letzteren Grössen darzustellen. Zu dem Zwecke wird in Satz *A.*) in I. q gleich der grössten der Zahlen $q_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots\lambda)$ und $\mathfrak{b}=1$ gesetzt und die dort angegebene homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 gebildet, dieselbe sei $F_M(y,x)=0$, wo M die Ordnung ist. Dieser genügen dann die Grössen $(x-a)^{r_{\mathfrak{a}}}\chi_{\mathfrak{a}1}(x)$ $(\mathfrak{a}=1\ldots\lambda)$. Dieselbe hat bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null (I Satz *C.*)). Es werden nun aus der Exponentengleichung dieser Differentialgleichung bei $x=a$ diejenigen Wurzeln aufgestellt, welche sich von einem der *gegebenen Werthe* r *in* (17.) nur um *ganze* Zahlen unterscheiden. Dann hat man aus dieser Differentialgleichung nach II *a.*) dieser Nummer das System linearunabhängiger Integrale derselben darzustellen, deren Entwickelungen von der Form $(x-a)^{r+\mathfrak{c}}\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ sind, wo $\mathfrak{c}$ ganzzahlig ist; die Exponenten, zu denen diese Integrale gehören, sollen unter einander verschieden, und der Anfangscoefficient in jedem Integrale gleich 1 sein. Diese von einander verschiedenen Exponenten seien

$$(18.)\qquad r,\quad r+k_1,\quad r+k_1+k_2,\quad \ldots\quad r+k_1+k_2+\cdots+k_\delta,$$

wo die k positive ganze Zahlen grösser als Null sind. In der Entwickelung,

die zu dem Exponenten $r+k_1+\cdots+k_l$ ($l=0\ldots\delta-1$, $k_0=0$) gehört, sollen die Potenzen mit den Exponenten $r+k_1+\cdots+k_{l+1}$ bis $r+k_1+\cdots+k_\delta$ den Coefficienten Null haben (vgl. II*a*.) Anfang). Die zugehörigen Integrale der Differentialgleichung $F_M(y,x)=0$ seien durch

$$(19.)\qquad Y_0,\ Y_1,\ \ldots\ Y_\delta$$

bezeichnet. Was die Bestimmung der Coefficienten in der Entwickelung eines Integrales Y angeht, so wird nach II*a*.) eine Anzahl der zuerst vorkommenden Coefficienten direct bestimmt, und zur Bestimmung der übrigen hat man eine gegebene Recursionsformel (8.), welche bei allen Y dieselbe ist, mit constanter Anzahl der Glieder, welche die gesuchten Coefficienten linear und homogen enthält. Nun muss jede der Grössen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}1}(x)$ ausgedrückt werden durch

$$(20.)\qquad c_{\mathfrak{a}0}Y_0+c_{\mathfrak{a}1}Y_1+\cdots+c_{\mathfrak{a}\delta}Y_\delta.$$

Um die Constanten c in (20.) zu bestimmen, hat man in der Entwickelung von $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}1}(x)$ die Coefficienten der Potenzen von

$$(x-a)^r,\quad (x-a)^{r+k_1},\quad \ldots\quad (x-a)^{r+k_1+\cdots+k_\delta}$$

zu berechnen, was nach dem bei (17.) Gesagten aus der Entwickelung (16.) geschieht. Diese Coefficienten sind dann bezüglich gleich $c_{\mathfrak{a}0}, c_{\mathfrak{a}1}, \ldots c_{\mathfrak{a}\delta}$. Aus (20.) und aus dem, was über die Entwickelung der Grössen Y gesagt ist, ergiebt sich, dass man zur Bestimmung der Coefficienten in den Entwickelungen aller Grössen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}1}$ ($\mathfrak{a}=1\ldots\lambda$), und aller aus diesen homogen und linear mit constanten Coefficienten zusammengesetzten Grössen, also sämmtlicher Functionen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{a}=1\ldots\lambda\\ \mathfrak{b}=1\ldots q_\mathfrak{a}\end{matrix}\right\}$ und der aus diesen linear und homogen mit constanten Coefficienten zusammengesetzten Functionen von einem bestimmten Stellenzeiger an, der bekannt ist, *eine und dieselbe gegebene Recursionsformel* (8.) mit constanter Anzahl der Glieder, welche die Coefficienten linear und homogen enthält, anwenden kann. Wenn in der Entwickelung einer solchen Function die Coefficienten mit niedrigerem Stellenzeiger, als jener bestimmte ist, alle verschwinden, so muss *die Function identisch verschwinden.*

Es sind nun unter den Grössen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}1}$ ($\mathfrak{a}=1\ldots\lambda$) die linearunabhängigen zu ermitteln, und die übrigen dieser Grössen durch letztere auszudrücken.

Die Grössen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}1}$ ($\mathfrak{a}=1\ldots\lambda$) *sind durch* (20.) *als homogene lineare Ausdrücke mit bekannten Coefficienten der linearunabhängigen Func-*

tionen Y_0 bis Y_δ dargestellt worden. Multiplicirt man daher jeden dieser Ausdrücke mit einem unbestimmten Factor und addirt die Producte und setzt den Coefficienten jeder der Functionen Y_0 bis Y_δ gleich Null, so erhält man eine Anzahl in Bezug auf die unbestimmten Factoren homogener linearer Gleichungen, von denen zuzusehen ist, ob sie sich durch Werthe der Unbekannten, die nicht alle gleich Null sind, erfüllen lassen. Dieses geschieht nach demselben Verfahren, welches bei den Gleichungen (14.) angewandt worden ist. Wird dieses Verfahren angewandt, so sind diejenigen der gesuchten Factoren, die dabei nicht annullirt werden, und diejenigen, die nicht durch andere ausgedrückt werden, willkürlich. Diejenigen Factoren, die durch andere ausgedrückt und nicht annullirt sind, sind homogene lineare Ausdrücke mit nicht verschwindenden Coefficienten von willkürlichen Factoren. Werden nun letztere Ausdrücke und ebenso die willkürlichen Factoren bezüglich mit den ihnen zugehörenden Functionen $(x-a)^{r_a}\chi_{a1}$ multiplicirt und die Producte addirt, so ist die Summe gleich Null. Setzt man in dieser Summe alle willkürlichen Factoren bis auf einen gleich Null, so erhält man die mit letzterem multiplicirte Function $(x-a)^{r_a}\chi_{a1}$ ausgedrückt durch die übrigen dieser Functionen. Setzt man aber alle willkürlichen Factoren gleich Null, so müssen auch die Factoren, die homogene lineare Ausdrücke der willkürlichen Factoren sind, verschwinden, so dass zwischen den Functionen $(x-a)^{r_a}\chi_{a1}$, die mit letzteren Ausdrücken multiplicirt sind, keine homogene lineare Gleichung bestehen kann, deren Coefficienten nicht alle gleich Null sind. Diese letzteren Functionen $(x-a)^{r_a}\chi_{a1}$, und diejenigen, deren Factoren bei der Auflösung des vorhin genannten Gleichungssystemes annullirt worden sind, sind demnach die linearunabhängigen, und die übrigen nach dem Vorhergehenden durch dieselben linear und homogen ausgedrückt mit Coefficienten, die bekannt sind.

Entwickelt man von der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ nach II*a*.) die linearunabhängigen Integrale, deren Entwickelungen die Form

$$(x-a)^{r_\lambda}\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$$

haben, so sind dieselben homogen, linear und mit constanten Coefficienten durch die linearunabhängigen der Grössen $(x-a)^{r_a}\chi_{a1}$ aus (17.) darstellbar. Die constanten Coefficienten kann man nach No. 2 I bestimmen. Dann kann man vermittelst der Ausdrücke dieser Integrale von $F_m(y, x) = 0$, welche aus den Grössen $(x-a)^{r_a}\chi_{a1}$ zusammengesetzt sind, successive eine Anzahl

der letzteren Grössen gleich der Anzahl der genannten Integrale durch diese Integrale und die übrigen Grössen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}1}$ linear und mit constanten Coefficienten ausdrücken und durch diese Ausdrücke ersetzen.

III. Es soll jetzt die Darstellung der Integrale der Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten bei dem singulären Punkte $x = a$ im Endlichen untersucht werden, wenn $F_m(y, x)$ *gleich einem Systeme normaler Differentialausdrücke ist.* Der Fall $x = \infty$ singulär kommt durch die Substitution $x = t^{-1}$ auf den vorigen zurück. *Zerfällt die Differentialgleichung $F_m = 0$ in getrennte Differentialgleichungen, in denen normale Ausdrücke gleich Null gesetzt sind* (s. Abh. Bd. 83 No. 10), so kommt man, was die vorliegenden Untersuchungen angeht, auf den Fall der Differentialgleichungen, die nur reguläre Integrale haben, zurück, hat demnach nach II. dieser Nummer zu verfahren.

a.) *Der Ausdruck $F_m(y, x)$ sei nun durch ein solches System von Ausdrücken darstellbar, welches bei $x = a$ die von dem Systeme No. 2 (21.) vorausgesetzte Beschaffenheit habe.* Dann stellen sich die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ aus No. 2 (27.) dar, und die zu einer Gruppe gehörenden (in welcher die Exponenten von $x-a$ sich um ganze Zahlen unterscheiden) aus No. 2 (34.), wenn dort für $\bar{y}_k$ die Entwickelungen der zu einer Gruppe gehörenden Integrale eingesetzt werden, die durch No. 2 (24.) gegeben und unter der Form No. 2 (32.) aufgestellt sind. Die zu einer Gruppe gehörenden Integrale, die aus No. 2 (24.) hervorgehen, und $\bar{F}_{\alpha_k}(\bar{y}_k, x) = 0$ erfüllen, seien y_{k1} bis $y_{k\lambda}$. Geht bei einem Umgange um $x = a$ $y_{k\mathfrak{a}}$ in $y'_{k\mathfrak{a}}$ über, so wird

$$(21.)\qquad y'_{k\mathfrak{a}} = K_1 y_{k1} + K_2 y_{k2} + \cdots + e^{\pm 2\pi i r_\mathfrak{a}} y_{k\mathfrak{a}},$$

wo $r_\mathfrak{a}$ Exponent in $y_{k\mathfrak{a}}$ und die Constanten K nach No. 5 II. oder Abh. Bd. 83 p. 156 bestimmt werden. Die Integrale von $F_m = 0$, die aus No. 2 (34.) hervorgehen, sind dann

$$(22.)\qquad y_\mathfrak{a} = \mu_{01}\int dx\, \mu_{01}^{-1}\mu_{02}\ldots\int \mu_{0\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}^{-1} e^{w_k} y_{k\mathfrak{a}}\, dx \quad (\mathfrak{a} = 1\ldots\lambda).$$

Geht $y_\mathfrak{a}$ durch denselben Umgang um $x = a$ in $y'_\mathfrak{a}$ über, so wird

$$(23.)\qquad y'_\mathfrak{a} = K_1 y_1 + K_2 y_2 + \cdots + e^{\pm 2\pi i r_\mathfrak{a}} y_\mathfrak{a},$$

wo die K die ermittelten Constanten aus (21.) sind. Die Entwickelungen der Grössen $y_{k\mathfrak{a}}$, die in (22.) einzusetzen sind, haben die Form dieser No. (17.). Werden in (22.) die Integrationen successive in den Entwickelungen durch Integration der einzelnen Glieder ausgeführt, wobei die constanten

Glieder annullirt werden, so nehmen die Integrale (22.) die Form an

$$(24.)\quad \begin{cases} y_\alpha = (x-a)^{r_\alpha}\{\varphi_{\alpha 1}(x)+\varphi_{\alpha 2}(x)\log(x-a)+\cdots+\varphi_{\alpha q_\alpha}(x)(\log(x-a))^{q_\alpha-1}\} \\ \qquad (\alpha = 1\ldots\lambda), \end{cases}$$

wo q_α *die Zahlen aus* (17.) *sind,* wenn dort die Differentialgleichung $\overline{\mathrm{F}}_{a_k}(\bar{y}_k, x) = 0$, der y_{k1} bis $y_{k\lambda}$ genügen, eintritt. Die Grössen φ sind in dem Bezirke von $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig; $\varphi_{\alpha q_\alpha}(x)$ ist von Null verschieden. Wird aus (24.) die Grösse y'_α in (23.) gebildet, werden alsdann in (23.) die Grössen y_α aus (24.) eingesetzt, so erhält man die homogenen linearen Relationen No. 1 (2.) zwischen den Grössen $(x-a)^{r_\alpha}\varphi_{\alpha b}$ mit bekannten Coefficienten durch Gleichstellung der Coefficienten der gleich hohen Potenzen von $\log(x-a)$ auf beiden Seiten.

Wenn in (22.) für $y_{k\alpha}$ die Entwickelungen (17.) aus der Differentialgleichung $\overline{\mathrm{F}}_{a_k}(\bar{y}_k, x) = 0$ eingesetzt werden, in denen die etwa identisch verschwindenden Glieder (vgl. II*b*.) nach (20.)) weggelassen sind, so tritt an Stelle von $y_{k\alpha}$ in (22.) eine Summe von Ausdrücken der Form $(x-a)^r\chi(x)(\log(x-a))^n$, wo $\chi(x)$ in der Umgebung von $x = a$ und für $x = a$ einwerthig und stetig, n positiv und ganzzahlig ist. Es werde nun ein Integral folgender Form betrachtet

$$(25.)\quad \int (x-a)^r\psi(x)(\log(x-a))^n dx,$$

worin $\psi(x)$ in der Umgebung von $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig ist, demnach durch die Summe zweier Potenzreihen dargestellt wird, von denen die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, *r nicht ganzzahlig, n* ganzzahlig und positiv ist. In der Entwickelung des Integrales (25.) soll kein constantes Glied vorkommen. Die Entwickelung geschieht dann durch wiederholte Anwendung der Formel

$$(26.)\quad \begin{cases} \int (x-a)^r\psi(x)(\log(x-a))^n dx = \xi(x)(\log(x-a))^n - n\int \eta(x)(\log(x-a))^{n-1}dx, \\ \xi(x) = \int (x-a)^r\psi(x)dx, \quad \eta(x) = (x-a)^{-1}\int (x-a)^r\psi(x)dx. \end{cases}$$

Dadurch wird das Integral (25.) entwickelt in den Ausdruck:

$$(27.)\quad \begin{cases} (\log(x-a))^n\int (x-a)^r\psi(x)dx - n(\log(x-a))^{n-1}\int dx(x-a)^{-1}\int (x-a)^r\psi(x)dx \\ +n(n-1)(\log(x-a))^{n-2}\int dx(x-a)^{-1}\int dx(x-a)^{-1}\int (x-a)^r\psi(x)dx - \cdots \\ \cdots + (-1)^n n(n-1)\ldots 1\int dx(x-a)^{-1}\int dx(x-a)^{-1}\ldots\int (x-a)^r\psi(x)dx, \end{cases}$$

und zwar ist bei jeder Integration, die durch Integration in den einzelnen Gliedern der Potenzreihen vorgenommen wird, das constante Glied zu annulliren.

Nun ergiebt sich aber, da vorausgesetzt ist, dass $F_m(y, x)$ durch ein System von Differentialausdrücken dargestellt sei, welches bei $x = a$ sich wie das System No. 2 (21.) verhält, und wenn man die Ausdrücke für die Grössen μ No. 2 (26.) berücksichtigt, dass bei Ausführung der Integrationen (22.) nur Integrale der Form (25.) zu entwickeln sind, wo r *nicht ganzzahlig* ist. Man kann demnach *jede Function* $(x-a)^{r_a}\varphi_{ab}$ *in* (24.) *zunächst vermittelst einer solchen Formel vollständig aufstellen*, die eine Summe einer endlichen Anzahl von Integralen

$$(28.)\qquad U = c\,u_1\!\int\! dx\,u_2\!\int\! dx\,u_3\ldots\!\int\! u_s\,dx$$

ist, worin c eine gegebene ganze Zahl, die u folgende Grössen sind: die Grössen

$$\mu_{(1)1},\quad \mu_{(1)1}^{-1}\mu_{(1)2},\quad \ldots\quad \mu_{(1)\alpha_0+\cdots+\alpha_{\varkappa-1}}^{-1}e^{w_k}(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$$

aus (22.) und die Grösse $(x-a)^{-1}$; hierbei gehen die Functionen $(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$ aus der Entwickelung des Integrales y_{ka} der Differentialgleichung $\bar{F}_{\alpha_k}(y_k, x) = 0$ unter der Form (17.) hervor, und es kommen nur die nicht verschwindenden (vgl. II *b.*) nach (20.)) derselben vor. Und zwar erhält man zur jedesmaligen Integration in dem durch wiederholte Integration zu bildenden Ausdruck (28.) einen Ausdruck der Form $(x-a)^r\psi(x)$, wo r nicht ganzzahlig ist, $\psi(x)$ wie in (25.) beschaffen ist; bei der Integration dieses Ausdruckes wird das constante Glied annullirt. Wenn zuletzt mit u_1 multiplicirt wird, so erhält man einen Ausdruck $(x-a)^r\psi(x)$, wo r bis auf eine ganze Zahl gleich dem Exponenten r_a in y_{ka} wird. $(x-a)^{r_a}\varphi_{aq_a}$ wird durch ein einziges Integral (28.) dargestellt. Es ist nun zur weiteren Untersuchung von (28.) die Darstellung der Grössen μ in (22.) zu betrachten, und dieses kommt nach den Ausdrücken μ No. 2 (24.) (26.) darauf zurück, die Darstellung der Grössen ν in den Differentialgleichungen $\bar{F}_{\alpha_k}(\bar{y}_k, x) = 0$ daselbst, demnach die Darstellung der Grössen ν in einem Falle wie (16.) dieser No. zu untersuchen.

b.) Wenn man ein System von m beliebigen endlichen und stetigen Functionen von x hat,

$$(29.)\qquad y_1,\quad y_2,\quad \ldots\quad y_m,$$

die in einem Gebiete von x linearunabhängig sind, so dass zwischen ihnen

eine Gleichung

$$(30.)\quad c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m = 0$$

mit constanten Coefficienten, die nicht alle gleich Null sind, in keinem Theile des betrachteten Gebietes von x besteht, und welche endliche und stetige Differentialquotienten bis zur m^{ten} Ordnung haben, so kann man dieselben auf die Form

$$(31.)\quad y_1 = v_1,\quad y_2 = v_1 \int v_2\, dx,\quad \ldots\quad y_m = v_1 \int dx\, v_2 \ldots \int v_m\, dx$$

bringen, wo in jedem Theile des betrachteten Gebietes von x es auch einen solchen Theil giebt, in welchem die Grössen v endlich und stetig und von Null verschieden sind. Erfüllen die Functionen (29.) eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, so ergiebt sich aus den Ausdrücken (31.), dass das vollständige Integral derselben in einem Gebiete von x, in welchem die Grössen v endlich und stetig und von Null verschieden sind,

$$(32.)\quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

ist, wo die c willkürliche Constanten sind.

Nun werden die Ausdrücke (31.) in die Determinante

$$(33.)\quad \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots & \frac{dy_m}{dx} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}, & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}, & \ldots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} = D$$

eingesetzt und dann wird nach *Hesse* (dieses Journal Bd. 54 p. 249) der Satz angewandt

$$(34.)\quad \begin{vmatrix} \lambda a, & \lambda b, & \lambda c, & \ldots \\ (\lambda a)', & (\lambda b)', & (\lambda c)', & \ldots \\ \vdots & & & \\ (\lambda a)^{(n)}, & (\lambda b)^{(n)}, & (\lambda c)^{(n)}, & \ldots \end{vmatrix} = \lambda^{n+1} \begin{vmatrix} a, & b, & c, & \ldots \\ a', & b', & c', & \ldots \\ \vdots & & & \\ a^{(n)}, & b^{(n)}, & c^{(n)}, & \ldots \end{vmatrix},$$

wo $a, b, c, \ldots$ beliebige $n+1$ Functionen einer Variabeln sind, durch $a^{(r)}$, $b^{(r)}$ etc. der r^{te} Differentialquotient von a, b, etc. bezeichnet wird, λ beliebig ist. Wird in (34.)

$$\lambda = v_1,\quad a = 1,\quad b = \int v_2\, dx,\quad c = \int dx\, v_2 \int v_3\, dx,\quad \ldots,\quad n = m-1$$

eingesetzt, so ergiebt sich

$$(35.)\quad D = v_1^m \begin{vmatrix} b', & c', & \ldots \\ b'', & c'', & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b^{(m-1)}, & c^{(m-1)} & \ldots \end{vmatrix} = v_1^m D'.$$

Wird nun in (34.)

$$\lambda = v_2, \quad a = 1, \quad b = \int v_3\,dx, \quad c = \int dx\,v_3 \int v_4\,dx \ldots, \quad n = m-2$$

eingesetzt, so erhält man

$$(36.) \qquad D' = v_2^{m-1} \begin{vmatrix} b', & c', & \ldots \\ b'', & c'', & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b^{(m-2)}, & c^{(m-2)}, & \ldots \end{vmatrix} = v_2^{m-1} D'',$$

u. s. w. Hieraus folgt

$$(37.) \qquad D = v_1^m v_2^{m-1} \ldots v_m,$$

(*Hesse* l. c. (61.)). Bezeichnet man die Determinante von

$$(38.) \qquad v_1, \quad v_1 \int v_2\,dx, \quad \ldots \quad v_1 \int dx\,v_2 \ldots \int v_\alpha\,dx \quad (\alpha = 1 \ldots m)$$

durch $D_\alpha = v_1^\alpha v_2^{\alpha-1} \ldots v_\alpha$, so ergiebt sich

$$(39.) \qquad v_1 = D_1, \quad v_2 = \frac{D_2}{D_1^2}, \quad v_3 = \frac{D_1 D_3}{D_2^2}, \quad \ldots \quad v_m = \frac{D_{m-2} D_m}{D_{m-1}^2},$$

(*Hesse* l. c. (71.)). Bringt man $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf die Form

$$(40.) \qquad y_1 = \mu_1, \quad y_2 = \mu_1 \int dx\,\mu_1^{-1} \mu_2\,dx, \quad \ldots \quad y_m = \mu_1 \int dx\,\mu_1^{-1} \mu_2 \ldots \int \mu_{m-1}^{-1} \mu_m\,dx,$$

wo $\mu_\alpha = v_1 v_2 \ldots v_\alpha$, so wird

$$(41.) \qquad D_\alpha = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_\alpha, \quad \mu_\alpha = \frac{D_\alpha}{D_{\alpha-1}}, \quad \mu_{\alpha-1}^{-1} \mu_\alpha = \frac{D_{\alpha-2} D_\alpha}{D_{\alpha-1}^2}, \quad (\alpha = 1 \ldots m).$$

Wenn in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = s$, $f_n(s, x) = 0$, worin F_m und f_n homogene lineare Differentialausdrücke bezüglich m^{ter} und n^{ter} Ordnung sind, mit den Coefficienten der höchsten Ableitungen gleich 1, die Integrale von $F_m(y, x) = 0$

$$(42.) \qquad y_\alpha = \mu_1 \int dx\,\mu_1^{-1} \mu_2 \ldots \int \mu_{\alpha-1}^{-1} \mu_\alpha\,dx \quad (\alpha = 1 \ldots m)$$

und die von $f_n(s, x) = 0$

$$(43.) \qquad s_\alpha = \mu_{m+1} \int dx\,\mu_{m+1}^{-1} \mu_{m+2} \ldots \int \mu_{m+\alpha-1}^{-1} \mu_{m+\alpha}\,dx \quad (\alpha = 1 \ldots n)$$

sind und die Determinante der Integrale (43.) durch D'_α $(\alpha = 1 \ldots n)$ bezeichnet wird, so sind die Integrale von $F_m(y, x) = s$, $f_n(s, x) = 0$

$$(44.) \qquad y_\alpha = \mu_1 \int dx\,\mu_1^{-1} \mu_2 \ldots \int \mu_{\alpha-1}^{-1} \mu_\alpha\,dx \quad (\alpha = 1 \ldots m+n),$$

und wenn die Determinante derselben durch D_α $(\alpha = 1 \ldots m+n)$ bezeichnet wird, so ist nach (41.)

$$(45.) \qquad D_{m+\alpha} = D_m D'_\alpha \quad (\alpha = 1 \ldots n).$$

Dieses werde nun angewandt auf die Darstellung der Grössen ν_λ in (16.). Nach (41.) wird $\nu_\alpha = \frac{D_\alpha}{D_{\alpha-1}}$ $(\alpha = 1 \dots \lambda)$, wo $D_\alpha = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_\alpha$ ist. D_λ hat demnach bei $x = a$ eine Entwickelung der Form $(x-a)^\varrho \sum_0^\infty c_\lambda (x-a)^\lambda$, wo c_0 von Null verschieden ist. Nun bleibt D_λ als Determinante der Integrale von $F_m(y, x) = 0$ y_1 bis y_λ (16.) in einem Gebiete einwerthig und stetig, in welchem diese Integrale sich ebenso verhalten. Es muss daher die Grösse $(x-a)^{-\varrho} D_\alpha$ in dem Bezirke, der bei $F_m(y, x) = 0$ zu $x = a$ gehört, einwerthig und stetig bleiben. Werden demnach in die Determinante der Integrale y_1 bis y_λ (16.) die Entwickelungen (17.) eingesetzt, so sind die Glieder, welche Potenzen von $\log(x-a)$ enthalten, wegzulassen, und es ist aus den übrig bleibenden Elementen die Determinante D_λ zu bilden. Die Entwickelungen dieser übrig bleibenden Elemente für den Bezirk zu $x = a$ sind nach II dieser No. als bekannt anzusehen, demnach auch die Darstellung der Determinante D_λ. Für D_m hat man speciell die Darstellung, welche in 5 I (11.) (16.) betrachtet worden ist. Demnach tritt ν_λ unter der Form auf

$$(46.) \qquad \nu_\lambda = (x-a)^\varrho \frac{\eta(x)}{\omega(x)},$$

wo die Functionen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ in dem Bezirke zu $x = a$ einwerthig und stetig, $\eta(a)$ und $\omega(a)$ von Null verschieden, und die Entwickelungen von $\eta(x)$ und $\omega(x)$ ***durch Potenzreihen mit positiven ganzzahligen Exponenten gegeben sind,*** bezüglich durch ganze rationale Functionen solcher gegebenen Potenzreihen dargestellt sind. D_m wird durch ein Product von Binomialfactoren in endlicher Anzahl dargestellt.

Die Grösse μ_α in (22.) wird nun (No. 2 (24.) (26.))

$$(47.) \qquad \mu_\lambda = e^w \nu_\lambda,$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, die ν_λ aus den Integralen der Differentialgleichungen $\overline{\overline{F}}_{\alpha_k}(y_k, x) = 0$ unter der Form (16.) und daher (46.) hervorgehen. Man erhält daher aus (46.) und (47.) auch die ***Darstellung von μ_α für den ganzen Bezirk von $x = a$ in*** $F_{\alpha_k} = 0$. Bezeichnet man denjenigen der Punkte, in welchem $\eta(x)$ und $\omega(x)$ in ν_λ verschwinden, welcher $x = a$ am nächsten liegt, durch a', und legt man um $x = a$ als Mittelpunkt durch a' einen Kreis, dessen Radius von Null verschieden sein muss, so ergiebt sich, dass $(x-a)^{-\varrho}\mu_\alpha$ innerhalb dieses Kreises abgesehen von $x = a$ einwerthig und stetig ist und ebenfalls abgesehen von $x = a$ nicht Null oder unendlich wird.

c.) Nun soll der Ausdruck (28.) weiter untersucht werden, nachdem die Grössen u in demselben nach *b.*) als gegeben vorauszusetzen sind. Jede solche Grösse u hat die Form $(x-a)^{\varrho}\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ innerhalb eines Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt mit einem von Null verschiedenen Radius, abgesehen von $x=a$, einwerthig und stetig bleibt. Ein Kreis, der für alle Grössen u in dem Ausdrucke (28.) die genannte Eigenschaft hat, besitze den Radius R. Bei den Integrationen, die in (28.) auszuführen sind, ist jedesmal zu integriren ein Ausdruck der Form $(x-a)^r\psi(x)$, wo r *nicht ganzzahlig* ist, $\psi(x)$ in dem Kreise mit dem Radius R durch die Summe von zwei Potenzreihen dargestellt wird, von denen die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, wobei die Integrationsconstante annullirt wird.

Es sei nun

$$(48.)\qquad \psi(x-a) = \sum_{0}^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}} + \sum_{-1}^{-\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}.$$

Dann ist, wenn r nicht ganzzahlig ist, und die Integrationsconstante annullirt wird,

$$(49.)\qquad \int (x-a)^r\psi(x-a)\,dx = \sum_{0}^{\infty}\frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} + \sum_{-1}^{-\infty}\frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1}.$$

Es ist

$$(50.)\qquad \int \alpha^{\varepsilon}d\alpha = \frac{\alpha^{\varepsilon+1}}{\varepsilon+1}+\text{const.},$$

wo ε nicht ganzzahlig sein soll. Nun werde das bestimmte Integral von α^{ε} genommen, indem von $\alpha=1$ aus über eine den Nullpunkt in der α-Ebene umgebende Linie in positiver Richtung bis zu $\alpha=1$ zurück integrirt werden und dabei in $\alpha^{\varepsilon}=e^{\varepsilon\log\alpha}$ der Anfangswerth von $\log\alpha$, also $\log 1$, gleich Null gesetzt werden soll. Das Integral über diese geschlossene Linie genommen, wenn dieselbe auf oder innerhalb der Peripherie des Kreises mit dem Punkte $\alpha=0$ als Mittelpunkte und dem Radius 1 liegt, werde durch $\int_1^{\prime\prime}$ bezeichnet. Dann erhält man aus (50.)

$$(51.)\qquad \int_1^{\prime\prime}\alpha^{\varepsilon}d\alpha = \frac{e^{\varepsilon 2\pi i}-1}{\varepsilon+1},$$

demnach, wenn r nicht ganzzahlig und n ganzzahlig ist,

$$(52.)\qquad \frac{1}{e^{r2\pi i}-1}\int_1^{\prime\prime}\alpha^{r+n}d\alpha = \frac{1}{r+n+1}.$$

Nun erhält man, wenn $\psi(x-a)$ aus (48.) genommen wird und r nicht

ganzzahlig ist

$$(53.)\quad \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{r+1}}{e^{r2\pi i}-1}\displaystyle\int_1^{\prime} \psi((x-a)\alpha)\, e^{r\log\alpha}\, d\alpha \\ = \dfrac{(x-a)^{r+1}}{e^{r2\pi i}-1}\displaystyle\int_1^{\prime} \Big\{\sum_0^{\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}\alpha^{\mathfrak{a}} + \sum_{-1}^{-\infty} c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}\alpha^{\mathfrak{a}}\Big\}\, \alpha^r\, d\alpha \\ = \displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} + \sum_{-1}^{-\infty} \frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} = \int (x-a)^r\, \psi(x-a)\, dx. \end{cases}$$

Was die Integration in den einzelnen Gliedern angeht, so werde daran erinnert, dass die Potenzreihen für Werthe x in einem Gebiete innerhalb des Kreises mit dem Radius R, welches den Nullpunkt nicht enthält, und für die in Betracht kommenden Werthe α in gleichem Grade (s. No. 4) convergiren.

Es ist also die Integralfunction von $(x-a)^r\psi(x-a)$ (49.), *in deren Entwickelung kein constantes Glied vorkommt, ausgedrückt mittels eines bestimmten Integrales* (53.), *wo unter dem Integralzeichen die gegebene Function* ψ *steht.*

Nun soll das Integral

$$(54.)\quad \int dx\,(x-a)^{r_{\varkappa-1}}\psi_{\varkappa-1}(x-a)\int (x-a)^{r_\varkappa}\psi_\varkappa(x-a)\,dx$$

dargestellt werden, worin $\psi_{\varkappa-1}$ und $\psi_\varkappa$ in dem Kreise mit dem Radius R Entwickelungen der Form (48.) haben, $r_\varkappa$ und $r_{\varkappa-1}+r_\varkappa$ nicht ganzzahlig sind, bei den Integrationen die constanten Glieder annullirt werden sollen. Durch zweimalige Anwendung der Formel (53.) ergiebt sich, dass die Function (54.) dargestellt wird durch

$$(55.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{(x-a)^{r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+1}}{e^{r_\varkappa 2\pi i}-1}\,\psi_{\varkappa-1}(x-a)\int_1^{\prime} \psi_\varkappa((x-a)\alpha)\, e^{r_\varkappa\log\alpha}\, d\alpha\, dx \\ = \dfrac{(x-a)^{r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+2}}{(e^{(r_{\varkappa-1}+r_\varkappa)2\pi i}-1)(e^{r_\varkappa 2\pi i}-1)}\displaystyle\int_1^{\prime} d\beta\, e^{(r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+1)\log\beta}\,\psi_{\varkappa-1}((x-a)\beta)\int_1^{\prime} \psi_\varkappa((x-a)\alpha\beta)\, e^{r_\varkappa\log\alpha} \\ = \dfrac{(x-a)^{r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+2}}{(e^{(r_{\varkappa-1}+r_\varkappa)2\pi i}-1)(e^{r_\varkappa 2\pi i}-1)}\displaystyle\int_1^{\prime} d\beta \int_1^{\prime} \psi_{\varkappa-1}((x-a)\beta)\,\psi_\varkappa((x-a)\alpha\beta)\, e^{(r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+1)\log\beta+r_\varkappa\log\alpha}, \end{cases}$$

In Bezug auf $\log\beta$ und die Integration nach β gilt dasselbe, was in Bezug auf $\log\alpha$ und die Integration nach α gesagt ist. In gleicher Weise ergiebt sich für die Function

$$(56.)\quad \int dx(x-a)^{r_{\varkappa-2}}\psi_{\varkappa-2}(x-a)\int dx\,(x-a)^{r_{\varkappa-1}}\psi_{\varkappa-1}(x-a)\int (x-a)^{r_\varkappa}\psi_\varkappa(x-a)\,dx,$$

worin $\psi_{\varkappa-2}$ eine Entwickelung wie (48.) hat, $r_{\varkappa-2}+r_{\varkappa-1}+r_\varkappa$ nicht ganzzahlig

ist, der Ausdruck:

$$\frac{(x-a)^{r_{\varkappa-2}+r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+3}}{(e^{(r_{\varkappa-2}+r_{\varkappa-1}+r_\varkappa)2\pi i}-1)(e^{(r_{\varkappa-1}+r_\varkappa)2\pi i}-1)(e^{r_\varkappa 2\pi i}-1)}\int_1^{''} d\gamma \int_1^{'} d\beta \int_1^{'} \psi_{\varkappa-2}((x-a)\gamma)\psi_{\varkappa-1}((x-a)\beta\gamma)\psi_\varkappa((x-a)\alpha\beta\gamma)e^{s}\ldots$$

$$s = (r_{\varkappa-2}+r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+2)\log\gamma+(r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+1)\log\beta+r_\varkappa\log\alpha.$$

In derselben Weise ist fortzufahren, wenn weitere Integrationen vorkommen. Durch eine solche Formel werde nun der Ausdruck aus (28.) $\int dx\, u_2 \ldots \int u_\varkappa dx$ dargestellt. Dann ist dieselbe noch mit cu_1 zu multipliciren, um die Grösse (28.) U für die Werthe x innerhalb des Kreises mit dem Radius R darzustellen.

Die in diesem Kreise, abgesehen von $x = a$, einwerthigen und stetigen Functionen $\psi_\varkappa(x-a)$, $\psi_{\varkappa-1}(x-a)$, etc. können nun in den bestimmten Integralen (53.), (55.), (57.) ***irgend eine andere*** Darstellung als durch die Entwickelung (48.) erhalten. Hier sind nun die Ausdrücke der Grössen μ_α aus (46.) und (47.) einzusetzen. Dann erhält ***jede Grösse*** $\psi(x-a)$ ***einen Ausdruck, der bekannt ist, von der Form***

$$(58.)\qquad \psi(x-a) = e^{w}\,\frac{\xi(x-a)}{\zeta(x-a)},$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum\limits_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, $\xi(x-a)$ und $\zeta(x-a)$ in einem Kreise um $x=a$ mit dem Radius R' einwerthig und stetig und für $x=a$ von Null verschieden sind und sich darstellen als ganze rationale Functionen von Potenzreihen mit positiven ganzzahligen Exponenten von $(x-a)$, die vollständig (nach II dieser No.) dargestellt sind. Man hat dann einen Radius $R_1 \leqq R'$ so zu wählen, dass innerhalb und auf der Peripherie des Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R_1 keine der Functionen $\zeta(x-a)$ verschwindet. Das bestimmte mehrfache Integral, welches nach Art des Ausdruckes (57.) für $u_1^{-1}U$ (28.) aufgestellt ist, multiplicirt mit u_1 stellt U für die Fläche des Kreises mit dem Radius R_1, die Peripherie einbegriffen, abgesehen von dem Mittelpunkt $x=a$, dar; nach α, β, etc. kann über die Peripherie des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 integrirt werden. Die Differentialquotienten nach x von dem bestimmten Integrale, welches in (57.) mit $(x-a)^{r_{\varkappa-2}+r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+3}$ multiplicirt ist, können unter den Integralzeichen genommen werden. Dieses ergiebt sich bei dem bestimmten Integrale, welches in (53.) vorkommt, indem man $\psi((x-a)\alpha)$ durch die Potenzreihe entwickelt annimmt, alsdann unter dem Integralzeichen ein oder mehre Mal differentiirt; und nachdem dieses für das einfache

Integral in (53.) bewiesen ist, hat man diesen Satz zweimal anzuwenden, um dasselbe für das bestimmte Integral in (55.) zu beweisen, und erhält durch mehrmalige Anwendung desselben Satzes den Beweis für ein mehrfaches Integral. Bei Ausführung der Differentiation sind dann für die Grössen $\psi(x-a)$ unter den Integralzeichen wieder die Ausdrücke (58.) anzuwenden. Man kann auf diese Weise die Differentialquotienten von U ebenfalls auf der Fläche des Kreises mit dem Radius R_1 darstellen als ganze rationale Function von bekannten Ausdrücken der Form $(x-a)^\varrho P$, wo P ein Ausdruck der Form (47.) ist, und von bestimmten Integralen nach Art des in (57.) vorkommenden, wo unter den Integralzeichen nach x differentiirt ist. Kennt man in einem nichtsingulären Punkte auf der Kreisfläche mit dem Radius R_1, innerhalb des Bezirkes, welcher bei der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ zu $x = a$ gehört, bei jeder der Grössen U die Werthe von U, $\frac{dU}{dx}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}U}{dx^{m-1}}$, so erhält man durch Addition der auf mehrere U bezüglichen Ausdrücke die Werthe der Grössen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\varphi_{\mathfrak{ab}}(x)$ in (24.) und ihrer Ableitungen bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in diesem Punkte, demnach die Werthe des Integrales $y_\mathfrak{a}$ (24.) und seiner $(m-1)$ ersten Ableitungen in demselben Punkte, also auch die Entwickelung des Integrales (24.) in eine Potenzreihe für den Bezirk dieses Punktes. Wenn man die betrachteten Werthe bei $(x-a)^r\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ $(\mathfrak{a} = 1 \dots l)$ kennt, so kann man sie mittels der durch (23.) bereits ermittelten Relationen No. 1 (2.) für die übrigen Functionen $(x-a)^r\varphi_{\mathfrak{ab}}(x)$ herleiten. Nun seien in demselben Punkte auf die angegebene Weise die Werthe sämmtlicher Integrale No. 2 (27.) von $F_m(y, x) = 0$ und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen bestimmt. Die Determinante der Integrale No. 2 (27.) erhält man nach No. 5 (8.) (11.) (19.), indem man das dort für $G_m(y, \xi) = 0$ auseinandergesetzte Verfahren bei $F_m(y, x) = 0$ anwendet. Die Constanten in den linearen Ausdrücken (23.), in welche die Integrale (24.) bei einem Umgange um $x = a$ übergehen, sind bereits ermittelt. Hat man nun bei jedem singulären Punkte von $F_m(y, x) = 0$ die vorhin genannten Grössen aufgestellt, *so genügt dieses nach* No. 6, *den Verlauf sowohl der Integrale, die bei den singulären Punkten durch die Ausdrücke* No. 2 (27.) *gegeben sind, als überhaupt eines Integrales, welches bei irgend einem Punkte durch ein System linearunabhängiger Integrale dargestellt ist, zu verfolgen.*

Die Function (28.) U ist durch einen Ausdruck dargestellt von der Form $(x-a)^\varrho e^{w_k} PQ$, wo e^{w_k} aus (22.) genommen ist, P eine Grösse der

Form (58.), Q ein Integral der Art, wie das in (57.) mit $(x-a)^{r_{\varkappa-2}+r_{\varkappa-1}+r_\varkappa+3}$ multiplicirte ist. Die Grösse $PQ=V$ hat in dem Kreise mit dem Radius R_1 eine Entwickelung wie die Entwickelung (48.). Der Coefficient $c_\mathfrak{a}$ in derselben ist

$$(59.)\qquad c_\mathfrak{a}=\frac{1}{2\pi i}\int V(x-a)^{-\mathfrak{a}-1}dx\qquad(\mathfrak{a}=-\infty\cdots+\infty),$$

wo über eine den Punkt $x=a$ umgebende Curve in dem Kreise mit dem Radius R_1 in positiver Richtung zu integriren ist. Wird $x-a=R_1\lambda$ gesetzt, so erhält man

$$(60.)\qquad c_\mathfrak{a} = \frac{R_1^{-\mathfrak{a}}}{2\pi i}\int_1^{\prime} V\lambda^{-\mathfrak{a}-1}d\lambda.$$

Hier ist in $V=PQ$ für Q das gegebene bestimmte Integral einzusetzen. Werden in (60.) alle Integrationen nach α, β, ... λ über die Peripherie des Kreises mit dem Radius 1 hin ausgeführt, so kommen bei den Grössen ψ (58.) die Werthe in Betracht für die Punkte x auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius R_1. Sind die Grössen Ue^{-w_k} durch Potenzreihen entwickelt, so erhält man, indem man mehrere solcher Grössen zu addiren hat, durch Addition der Coefficienten gleich hoher Potenzen in den Reihen die Coefficienten in der Entwickelung jeder der Grössen $e^{-w_k}(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\varphi_{\mathfrak{ab}}$ und damit die Darstellung dieser Grössen, ***die für den Bezirk, der bei der Differentialgleichung*** $F_m(y,x)=0$ ***zu*** $x=a$ ***gehört, gültig ist.***

Man braucht in dieser Entwickelung nur eine *endliche* Anzahl von Coefficienten zu kennen, um die übrigen aus diesen herleiten zu können. Dieses soll jetzt gezeigt werden.

d.) Es werde die grösste der Zahlen $q_\mathfrak{a}$ aus den Entwickelungen der Integrale $y_{k\mathfrak{a}}$ (22.) unter der Form (17.) genommen, alsdann diese gleich der Zahl q in Satz *A.*) in I und b daselbst gleich 1 gesetzt und nun die homogene lineare Differentialgleichung des Satzes *A.*) gebildet, deren Coefficienten rational sind, und in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Dieser Differentialgleichung genügen die Functionen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\varphi_{\mathfrak{ab}}$ in (24.). Ist die abhängige Variable in dieser Differentialgleichung gleich z und wird $z=e^{w_k}y$ gesetzt, wodurch die Differentialgleichung $F_M(y,x)=0$ erhalten werde von der Ordnung M und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, so genügen dieser die Functionen $e^{-w_k}(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\varphi_{\mathfrak{ab}}$. Aus der Herleitung dieser Differentialgleichung ergiebt sich, dass derselben die Integrale von $e^{-w_k}F_m(e^{w_k}y,x)=0$ genügen. Wird aber bei dem Systeme

von Differentialausdrücken No. 2 (21.)

$$e^{-w_k} F_{a_0+a_1+\dots+a_l}(e^{w_k} y, x) \;=\; e^{-w_k} F_m(e^{w_k} y, x)$$

gebildet, so ergiebt sich, dass das System, welches letzteren Ausdruck darstellt, als Bestandtheil $\bar{F}_{a_k}(y, x)$ enthält. Und da in der Exponentengleichung von $\bar{F}_{a_k} = 0$ bei $x = a$ die Wurzeln r_1 bis r_λ vorkommen, so kommen dieselben Wurzeln, zu denen eine ganze Zahl addirt ist, in der Exponentengleichung von $e^{-w_k} F_m(e^{w_k} y, x) = 0$ bei $x = a$ vor (s. Abh. Bd. 83 No. 7 I). Es müssen demnach auch in der Exponentengleichung von $F_M(y, x) = 0$ bei $x = a$ Wurzeln vorkommen, die sich von r_1 bis r_λ nur um ganze Zahlen unterscheiden (s. l. c.). Diejenige dieser Wurzeln der Exponentengleichung von $F_M(y, x) = 0$, deren reeller Theil am kleinsten ist, sei $r_{\lambda'}$. Der charakteristische Index h der Differentialgleichung $F_M(y, x) = 0$ ist daher bei $x = a$ kleiner als die Ordnung M.

Nun wird $y = (x-a)^{r_{\lambda'}} u$ in Differentialgleichung $F_M(y, x) = 0$ eingesetzt, und die Differentialgleichung für u auf die Form (7.) gebracht, dann müssen dieser Differentialgleichung die Functionen $(x-a)^{r_a - r_{\lambda'}} e^{-w_k} \varphi_{ab}(x)$, wo $r_a - r_{\lambda'}$ ganzzahlig ist, genügen, dieselben haben Entwickelungen der Form (48.). Es werde demnach für u eine Entwickelung $\sum\limits_{0}^{\infty} c_a (x-a)^a + \sum\limits_{-1}^{-\infty} c_a (x-a)^a$ in (7.) eingesetzt, so müssen die Coefficienten von $(x-a)^k$ $(k = -\infty \cdots +\infty)$ auf beiden Seiten von (7.) einander gleich sein. Dieses liefert die Relation (8.) zwischen den Coefficienten c_a der Entwickelung für alle ganzen Zahlen $k = -\infty \cdots +\infty$. Der Coefficient von c_{k+1} in (8.) verschwindet nur für eine *endliche* Anzahl ganzzahliger Werthe von k; nämlich wenn ϱ_1 bis ϱ_{M-h} die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_M(y, x) = 0$ sind, für

$$(61.) \qquad k \;=\; \varrho_1 - r_{\lambda'} - 1, \quad \dots \quad \varrho_{M-h} - r_{\lambda'} - 1.$$

Von den übrigen Gliedern in (8.) fallen diejenigen aus, in denen die Coefficienten von c_a für beliebige ganze Zahlen k verschwinden. Es muss demnach wenigstens das Glied c_{k+1} mit nicht identisch verschwindendem Coefficienten in der Relation (8.) übrig bleiben. Bleibt dasselbe allein übrig, so müssen alle Coefficienten $c_{k+1} = 0$ sein, bei denen der Coefficient von c_{k+1} in (8.) nicht verschwindet, und diejenigen, bei denen dieser Coefficient verschwindet, sind zu berechnen. Bleibt mehr als ein Glied in der Relation (8.) übrig, so sei dasjenige mit dem kleinsten Stellenzeiger c_{k+1-s}. Dann müssen berechnet werden die Coefficienten c_{k+1} für diejenigen ganzen

Zahlen k, für welche der Coefficient von c_{k+1} in (8.) verschwindet, ferner die Coefficienten c_{k+1-s} für die ganzen Zahlen k, für welche der Coefficient von c_{k+1-s} in (8.) verschwindet. Und nun müssen noch s auf einander folgende Coefficienten c_α bekannt sein, die beliebig gewählt werden können. *Alle übrigen c_α liefert dann die Recursionsformel* (8.).

e.) Wenn ein Integral (24.) die Form $e^w P$ haben soll, wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_\alpha (x-a)^{-\alpha}$, P von der Form (17.) ist, so kann w nur w_k sein, wie sich aus (22.) durch successive Division mit u und Differentiation ergiebt (vgl. Abh. Bd. 83 No. 9 III). Sollen nun in der Entwickelung der in *d.*) betrachteten Grössen u bei diesem Integrale *nicht unendlich viele* Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen, (dieses ist der Fall, wenn das Glied mit c_{k+1} allein in der Recursionsformel (8.) steht) so dürfen, da $r_{\lambda'}$ von den Wurzeln der Exponentengleichung, die sich von $r_{\lambda'}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, diejenige mit kleinstem reellen Theile ist, in der Entwickelung jedes u gar keine Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen (vgl. Abh. Bd. 74 No. 6). Hierzu sind gemäss der Recursionsformel (8.) folgende Bedingungen *nothwendig und hinreichend.* Es sei $k = \varkappa$ die niedrigste Zahl k, für welche der Coefficient von c_{k+1-s} (*d.*) in (8.) verschwindet. Wenn $\varkappa+1-s < -s$, so ist nothwendig und hinreichend:

$$(62.) \qquad c_{\varkappa+1-s} = c_{\varkappa+1-s+1} = \cdots = c_{-1} = 0;$$

wenn $\varkappa+1-s \geqq -s$, so ist nothwendig und hinreichend:

$$(63.) \qquad c_{-s} = c_{-s+1} = \cdots = c_{-1} = 0.$$

Wird aus den Integralen (24.), nachdem diese mit $e^{-w_k}(x-a)^{-r_{\lambda'}}$ multiplicirt sind, eine lineare Verbindung mit constanten Coefficienten

$$(64.) \qquad e^{-w_k}(x-a)^{-r_{\lambda'}}(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_\lambda y_\lambda)$$

gebildet, so ist zuzusehen, welches die allgemeinsten Werthe dieser Constanten sind, damit in (64.) keine Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen. Es dürfen zunächst in

$$(65.) \qquad e^{-w_k}(x-a)^{-r_{\lambda'}}(b_1(x-a)^{r_1}\varphi_{11} + \cdots + b_\lambda (x-a)^{r_\lambda}\varphi_{\lambda 1})$$

keine solchen vorkommen. Dieser Ausdruck genügt der Differentialgleichung für u in *d.*). Demnach sind die Bedingungsgleichungen (62.) bez. (63.) aufzustellen. Diese enthalten die b homogen und linear und sind wie die Gleichungen (14.) zu behandeln. Dann dürfen in

$$(66.) \qquad e^{-w_k}(x-a)^{-r_{\lambda'}}(b_2(x-a)^{r_2}\varphi_{22} + b_3(x-a)^{r_3}\varphi_{32} + \cdots + b_\lambda (x-a)^{r_\lambda}\varphi_{\lambda 2})$$

keine Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen. Hier sind die Grössen $(x-a)^{r_a}\varphi_{a2}$ durch $(x-a)^{r_a}\varphi_{a1}$ (vgl. nach (24.)) auszudrücken, für die b die aus (65.) ermittelten Ausdrücke einzusetzen und auf den Ausdruck (66.) die aus (65.) erhaltenen Relationen zwischen den Coefficienten anzuwenden u. s. w. Giebt es in jeder Gruppe irgend ein System linearunabhängiger Integrale in der Anzahl der Integrale der Gruppe unter der Form $e^{w_k}P$, wo P Ausdrücke der Form (17.) sind, welches man ermittelt hat, so kann man die Determinante sämmtlicher Integrale direct nach dem Verfahren No. 5 (11.) (19.), und die Constanten K (21.) nach dem Verfahren No. 5 II bestimmen.

8.

I. Um an einem Beispiele die linearen Relationen zwischen den Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welche Relationen nach No. 6 dazu dienen, den Verlauf eines Integrales zu verfolgen, unter Anwendung der Untersuchungen von No. 3 und 4 aufzusuchen, werde die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$(1.)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$(2.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0$$

behandelt.

Die singulären Punkte derselben sind 0, 1, ∞. Für die durch dieselben zu ziehende Linie L der No. 6 werde die Gerade von $-\infty$ durch 0 und 1 bis $+\infty$ genommen und als der von dieser Linie L begrenzte Theil T_1 der Ebene, in welchem die Integrale bei den singulären Punkten angenommen werden, das Gebiet, in welchem $+i$ liegt, gewählt. Ein Punkt durchläuft dann in positiver Richtung die Begrenzung, wenn er der Reihe nach von 0 zu 1, von 1 zu ∞, von ∞ zu 0 hin sich bewegt.

Nun werde bei jedem der singulären Punkte ein System linearunabhängiger Integrale entwickelt und dieselben für das Gebiet T_1 fixirt. Diese Entwickelungen sind (s. die Abh. des Herrn *Kummer* Bd. 15 dieses Journals p. 52, vgl. II dieser No.) bei $x=0$

$$(3.)\qquad \begin{cases} y_1^{(1)} = F(\alpha,\beta,\gamma,x) \\ y_2^{(1)} = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x), \end{cases}$$

bei $x = 1$

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1^{(2)} = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) \\ y_2^{(2)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x), \end{cases}$$

bei $x = \infty$

$$(5.)\quad \begin{cases} y_1^{(3)} = x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x^{-1}) \\ y_2^{(3)} = x^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x^{-1}), \end{cases}$$

sobald angenommen wird, dass die Wurzeln der Exponentengleichung bei jedem singulären Punkte sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, also dass $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig seien. Um nun die Werthe dieser Integrale in dem Gebiete T_1 zu fixiren, werde in

$$x^{1-\gamma} = e^{(1-\gamma)\log x}$$

$(\log x)_{x=1} = 0$ gesetzt, in

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} = e^{(\gamma-\alpha-\beta)\log(1-x)}$$

$(\log(1-x))_{x=0} = 0$, und in

$$x^{-\alpha} = e^{-\alpha\log(x)}, \quad x^{-\beta} = e^{-\beta\log(x)}$$

$(\log x)_{x=1} = 0$ angenommen.

Wird nun das Integralsystem (3.) bei $x = 0$ in dem Gebiete T_1 zu $x = 1$ hin fortgesetzt und durch das Integralsystem (4.) bei $x = 1$ ausgedrückt, so ist zu dem Zwecke auf letzteres System die Substitution A_2 anzuwenden. Wird das Integralsystem (4.) bei $x = 1$ in dem Gebiete T_1 zu $x = \infty$ fortgesetzt und durch das Integralsystem (5.) bei $x = \infty$ ausgedrückt, so ist dazu auf letzteres System die Substitution A_3 anzuwenden. Und wird das Integralsystem (5.) bei $x = \infty$ in dem Gebiete T_1 zu $x = 0$ fortgesetzt und durch das Integralsystem (3.) bei $x = 0$ ausgedrückt, so ist hierzu auf letzteres System die Substitution A_1 anzuwenden. Diese Substitutionen A_1, A_2, A_3 so wie ihre inversen sollen aufgestellt werden.

Wenn das Integralsystem (3.) bei $x = 0$ längs der Begrenzung eines Gebietes, welches von singulären Punkten nur $x = 0$ enthält, in positiver Richtung um $x = 0$ herum fortgesetzt, alsdann durch das ursprüngliche Integralsystem (3.) bei $x = 0$ in T_1 wieder ausgedrückt wird, so ist zu dem Zwecke auf letzteres System die Substitution B_1 anzuwenden. Diese ist

$$(6.)\quad B_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{(1-\gamma)2\pi i} \end{Bmatrix}.$$

Entsprechend ist bei dem Punkte $x = 1$

$$(7.)\quad B_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{(\gamma-\alpha-\beta)2\pi i} \end{Bmatrix},$$

und bei dem Punkte $x = \infty$

$$(8.)\qquad B_3 = \begin{Bmatrix} e^{\alpha 2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{\beta 2\pi i} \end{Bmatrix},$$

aus welchen Substitutionen sich die inversen ohne Weiteres ergeben.

Nun sind die Substitutionen A und ihre inversen A' aufzustellen.

$$a.)\qquad (9.)\qquad \begin{cases} y_1^{(1)} = C_{11} y_1^{(2)} + C_{12} y_2^{(2)} \\ \dfrac{dy_1^{(1)}}{dx} = C_{11}\dfrac{dy_1^{(2)}}{dx} + C_{12}\dfrac{dy_2^{(2)}}{dx}. \end{cases}$$

Hier kann unmittelbar No. 3 für $\xi = x$ angewandt werden. Die Entwickelung für $y_1^{(1)}$ gilt, so lange nicht γ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, die Entwickelungen für $y_1^{(2)}$ und $y_2^{(2)}$ gelten, und sind linearunabhängig, so lange nicht $\gamma-\alpha-\beta$ ganzzahlig ist. Es sei daher γ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl, $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig. Nach No. 3 und unter Anwendung der dort gebrauchten Bezeichnungsweise ergiebt sich nun:

Die Determinante des Gleichungssystemes (9.) sei D, so ist

$$\lim_{x=1}((x-1)^{-R} D) = C,$$

und $(\log(x-1))_{x=0} = \pi i$ gesetzt,

$$R = \gamma-\alpha-\beta-1,\quad C = (\gamma-\alpha-\beta)\, e^{-(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}.\quad D_{01} = \frac{d}{dx} y_2^{(2)},\quad D_{11} = -y_2^{(2)}.$$

Wird nun der reelle Theil von $\gamma-\alpha-\beta$ durch $\Re(\gamma-\alpha-\beta)$ bezeichnet, so werde zunächst $\Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ vorausgesetzt. Dann ist (No. 3 (8.))

$$F_{01} = (\gamma-\alpha-\beta)\, e^{-(\gamma-\alpha-\beta)\pi i},\quad F_{11} = 0.$$

Also wird

$$(10.)\qquad C_{11} = \lim_{x=1} F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Ist aber in $y_2^{(2)}$ der Exponent $\gamma-\alpha-\beta$ reell, so muss nach No. 4 die Potenzreihe in (10.) für $x = 1$ convergiren und die Constante C_{11} darstellen.

Nun ist die Entwickelung $(\gamma-1) F(\alpha, \beta, \gamma-1, x)$ Integral von (2.), wo statt γ steht $\gamma-1$. In derselben kann γ auch gleich 1 sein, wie aus der Stetigkeit der in Bezug auf α, β, γ rationalen Coefficienten folgt. Dieses Integral wird vermittelst der Integrale (4.), worin statt γ $(\gamma-1)$ steht, dargestellt ($\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig). Daraus folgt, wenn $\Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ ist, so wird

$$(11.)\qquad \lim_{x=1} (1-x) \{(\gamma-1) F(\alpha, \beta, \gamma-1, x)\} = 0.$$

Es hat aber *Gauss* in den disquisitiones circa seriem infinitam:

$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ die Relation aufgestellt

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{l} \gamma(\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x)F(\alpha,\beta,\gamma,x) \\ +(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1,x)-\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x) = 0. \end{array}\right.$$

Wird nun $\gamma-\alpha-\beta$ als reell vorausgesetzt, so folgt aus (11.) und (12.) und dem vorhin über die Convergenz der Potenzreihe $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ Gesagten:

$$(13.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma+1,1),$$

und hieraus

$$(14.)\quad \left\{\begin{array}{l} F(\alpha,\beta,\gamma,1) \\ = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)\dots(\gamma+k-1-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)\dots(\gamma+k-1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)\dots(\gamma+k-1-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma+k,1) \end{array}\right.$$

(*Gauss* l. c. art. 17). Ferner hat *Gauss* l. c. art. 18, 19, 20 die Function

$$(15.)\quad \Pi(z) = \lim_{k=\infty}\frac{1.2.3\dots k}{(z+1)(z+2)\dots(z+k)}k^z$$

eingeführt und in art. 20 bewiesen, dass dieses Product für alle endlichen Werthe z, ausgenommen die negativen ganzen Zahlen, gegen eine von Null verschiedene Grenze convergirt. Zugleich ergiebt sich aus dem genannten art. 20, dass dieses Product für alle diese Werthe z eine einwerthige und stetige analytische Function darstellt, die für die negativen ganzzahligen Werthe von z unendlich in der ersten Ordnung wird. Für dieselbe gilt (*Gauss* l. c. art. 21) die Relation

$$(16.)\quad \Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z).$$

Nun sei $\alpha_1 = \text{Mod}\,\alpha$, $\beta_1 = \text{Mod}\,\beta$ und γ_1 reell und positiv und so gewählt, dass $\gamma_1-\alpha_1-\beta_1 > 0$ und nicht ganzzahlig, so folgt aus der Convergenz der Potenzreihe $F(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,1)$, dass die Reihe

$$(17.)\quad \frac{(\alpha_1+n)(\beta_1+n)}{(n+1)(\gamma_1+n)}+\frac{(\alpha_1+n)(\alpha_1+n+1)(\beta_1+n)(\beta_1+n+1)}{(n+1)(n+2)(\gamma_1+n)(\gamma_1+n+1)}+\cdots,$$

wo n eine ganze Zahl >0 ist, convergirt. Daher muss

$$(18.)\quad \lim_{k=\infty}F(\alpha,\beta,\gamma+k,1) = 1$$

werden. Gemäss (14.) ergiebt sich demnach aus dem bisher Gesagten, dass, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ reell und >0 und nicht ganzzahlig, γ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$, die für $x=1$ convergirende Potenzreihe (1.) dargestellt wird, durch

$$(19.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

(*Gauss* l. c. art. 24.) Es werde nun die Function

$$(20.)\quad \frac{\Pi(w-1)\Pi(w-u-v-1)}{\Pi(w-u-1)\Pi(w-v-1)} = \Phi(u,v,w)$$

gesetzt. Diese Function ist, so lange keine der Grössen w, $w-u-v$, $w-u$, $w-v$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, eine einwerthige, stetige und von Null verschiedene analytische Function jeder der drei Variabeln u, v, w. Geht eine der Grössen w oder $w-u-v$ in Null oder eine negative ganze Zahl über, während $w-u$ und $w-v$ von Null oder einer negativen ganzen Zahl verschieden sind, so wird die Function Φ unendlich. Geht eine der Grössen $w-u$ oder $w-v$ in Null oder eine negative ganze Zahl über, während w und $w-u-v$ von Null oder einer negativen ganzen Zahl verschieden sind, so geht die Function Φ stetig in Null über. Werden für u, v, w ganze rationale Functionen von α, β, γ eingesetzt, so ist, solange w und $w-u-v$ von Null oder einer negativen ganzen Zahl verschieden ist, Φ eine einwerthige und stetige analytische Function jeder der Variabeln α, β, γ. Für die Function $\Phi(u,v,w)$ gelten die Relationen

$$(21.)\quad \Phi(u,v,w) = \Phi(v,u,w)$$

und aus (16.)

$$(22.)\quad \Phi(u,v,w) = \frac{(w-u)(w-v)}{w(w-u-v)}\Phi(u,v,w+1).$$

Es ist also, zunächst unter den bei (19.) angegebenen Einschränkungen nach (10.)

$$(23.)\quad C_{11} = \Phi(\alpha,\beta,\gamma).$$

Nun werde C_{12} aufgesucht. Nach No. 3 ist

$$D_{02} = -\frac{d}{dx}y_1^{(2)},\quad D_{12} = y_1^{(2)}.$$

Es werde nun hier vorausgesetzt, $\gamma-\alpha-\beta$ reell und $1 > \gamma-\alpha-\beta > 0$. Dann wird (No. 3 (8.))

$$F_{02} = 0,\quad F_{12} = (1-x)^{1-(\gamma-\alpha-\beta)}e^{-(\gamma-\alpha-\beta-1)\pi i}.$$

Daher ergiebt sich aus No. 3 (8.)

$$(24.)\quad \begin{cases} C_{12} = \lim\limits_{x=1}\left\{\dfrac{-(1-x)^{1+\alpha+\beta-\gamma}}{\gamma-\alpha-\beta}\dfrac{d}{dx}F(\alpha,\beta,\gamma,x)\right\} \\ \quad\;\; = \lim\limits_{x=1}\left\{\dfrac{-\alpha.\beta}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}(1-x)^{1+\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)\right\}. \end{cases}$$

Nun ist

$$(25.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \begin{cases}(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\dfrac{x}{x-1}\right)\\ (1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,\dfrac{x}{x-1}\right),\end{cases}$$

und hieraus

$$(26.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x),$$

$(\log(1-x))_{x=0} = 0$ (s. die Abh. des Herrn *Kummer* Bd. 15 dieses Journals p. 54, vgl. II dieser No.). Daher ergiebt sich

$$(27.)\quad \begin{cases} C_{12} = \lim\limits_{x=1}\left\{\dfrac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1,x)\right\} \\ \quad = \dfrac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1,1), \end{cases}$$

da die Potenzreihe $F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1,x)$ für $x=1$ convergirt. Hieraus nach (19.) und (22.)

$$(28.)\quad C_{12} = \frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\Phi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1) = \Phi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma).$$

Man hat also, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ reell ist, $1>\gamma-\alpha-\beta>0$, γ nicht gleich einer ganzen Zahl, die $\leqq 0$ ist,

$$(29.)\quad \begin{cases} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \Phi(\alpha,\beta,\gamma)F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x) \\ +\Phi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x). \end{cases}$$

Die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ in (29.) behalten ihre Bedeutung, so lange $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, γ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl wird. Es soll nun bewiesen werden, dass, solange keiner dieser Fälle eintritt, die Gleichung (29.) gilt.

Es ist

$$(30.)\quad \begin{cases} F(a,b,c,z) = 1+\sum\limits_{n=1}^{n=\nu}\dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{1.2\dots n\,c(c+1)\dots(c+n-1)}z^n \\ +\dfrac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)b(b+1)\dots(b+\nu-1)}{1.2\dots\nu\,c(c+1)\dots(c+\nu-1)}\psi_\nu(a,b,c,z), \end{cases}$$

$$(31.)\quad \psi_\nu(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(a+\nu)(a+\nu+1)\dots(a+\nu+n)(b+\nu)(b+\nu+1)\dots(b+\nu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+1+n)(c+\nu)(c+\nu+1)\dots(c+\nu+n)}z^{\nu+n+1}.$$

Die Reihe (31.) convergirt, wenn $\operatorname{Mod} z<1$, $\operatorname{Mod} c<\nu$, $\operatorname{Mod} a$ und $\operatorname{Mod} b$ beliebig sind. Nun werde für $\dfrac{1}{c+\nu+n}$ in (31.) eingesetzt

$$\frac{1}{\nu+n}\,\frac{1}{1+\dfrac{c}{\nu+n}} = \frac{1}{\nu+n}\sum_0^\infty\left(\frac{-c}{\nu+n}\right)^a,$$

wodurch

$$(32.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\left\{\dfrac{(a+\nu)(a+\nu+1)\dots(a+\nu+n)(b+\nu)(b+\nu+1)\dots(b+\nu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+1+n)\nu(\nu+1)\dots(\nu+n)} \right. \\ \left. \cdot\sum\limits_0^\infty\left(\dfrac{-c}{\nu}\right)^a\sum\limits_0^\infty\left(\dfrac{-c}{\nu+1}\right)^a\cdots\sum\limits_0^\infty\left(\dfrac{-c}{\nu+n}\right)^a\right\}z^{\nu+n+1} \end{cases}$$

entsteht. Da in dieser Reihe a und b beliebige positive reelle Werthe, c einen negativen reellen Werth, dessen absoluter Betrag kleiner als ν ist, erhalten kann, so convergirt auch

$$(33.)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\Big\{\frac{(\mathrm{Mod}(a)+\nu)\dots(\mathrm{Mod}(a)+\nu+n)(\mathrm{Mod}(b)+\nu)\dots(\mathrm{Mod}(b)+\nu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+1+n)\nu(\nu+1)\dots(\nu+n)} \\ \cdot\sum\limits_0^\infty\Big(\frac{\mathrm{Mod}(-c)}{\nu}\Big)^{\mathfrak{a}}\dots\sum\limits_0^\infty\Big(\frac{\mathrm{Mod}(-c)}{\nu+n}\Big)^{\mathfrak{a}}\Big\}(\mathrm{Mod}\,z)^{\nu+n+1}. \end{array}\right.$$

Das allgemeine Glied in der Reihe (33.) nimmt die Form an

$$(34.)\quad (\mathrm{Mod}\,z)^{\nu+1}\Sigma k_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(\mathrm{Mod}\,a)^{\mathfrak{a}}(\mathrm{Mod}\,b)^{\mathfrak{b}}(\mathrm{Mod}\,-c)^{\mathfrak{c}}(\mathrm{Mod}\,z)^{n}\left(\begin{array}{c}\mathfrak{a},\mathfrak{b}=0\dots n+1\\ \mathfrak{c}=0\dots\infty\end{array}\right),$$

in demselben sind die Coefficienten $k_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ positiv. Man darf daher, nachdem man die Glieder der Reihe (33.) durch die Ausdrücke (34.) dargestellt hat, in der neuen Reihe die Glieder mit denselben Exponenten zusammenfassen, wodurch man für (33.) die Reihe

$$(35.)\quad (\mathrm{Mod}\,z)^{\nu+1}\Sigma K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n}(\mathrm{Mod}\,a)^{\mathfrak{a}}(\mathrm{Mod}\,b)^{\mathfrak{b}}(\mathrm{Mod}\,-c)^{\mathfrak{c}}(\mathrm{Mod}\,z)^{n}\quad(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n=0\dots\infty)$$

erhält. Daraus ergiebt sich, dass auch die Reihe

$$(36.)\quad z^{\nu+1}\Sigma K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n}a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}(-c)^{\mathfrak{c}}z^{n}\quad(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n=0\dots\infty)$$

convergirt und gleich der Reihe (32.), also $\psi_\nu(a,b,c,z)$ ist. Nun werde

$$(37.)\quad \left\{\begin{array}{lll} a=\sum\limits_0^{r_1}\varkappa^{(1)}_{\varrho,\sigma,\tau}\alpha^\varrho\beta^\sigma\gamma^\tau, & b=\sum\limits_0^{r_2}\varkappa^{(2)}_{\varrho,\sigma,\tau}\alpha^\varrho\beta^\sigma\gamma^\tau, & c=\sum\limits_0^{r_3}\varkappa^{(3)}_{\varrho,\sigma,\tau}\alpha^\varrho\beta^\sigma\gamma^\tau \\ (\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_1) & (\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_2) & (\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_3) \end{array}\right.$$

gesetzt, wo

$$(38.)\quad \begin{array}{c}\sum\limits_{(\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_3)}\mathrm{Mod}\,\varkappa^{(3)}_{\varrho,\sigma,\tau}(\mathrm{Mod}\,\alpha_1)^\varrho(\mathrm{Mod}\,\beta_1)^\sigma(\mathrm{Mod}\,\gamma_1)^\tau=\nu_1<\nu \\ \mathrm{Mod}\,\alpha\leqq\mathrm{Mod}\,\alpha_1,\ \mathrm{Mod}\,\beta\leqq\mathrm{Mod}\,\beta_1,\ \mathrm{Mod}\,\gamma\leqq\mathrm{Mod}\,\gamma_1\end{array}$$

sein soll. Wird

$$\sum_{(\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_1)}\mathrm{Mod}\,\varkappa^{(1)}_{\varrho,\sigma,\tau}(\mathrm{Mod}\,\alpha)^\varrho(\mathrm{Mod}\,\beta)^\sigma(\mathrm{Mod}\,\gamma)^\tau\quad\text{statt}\quad\mathrm{Mod}\,a,$$

$$\sum_{(\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_2)}\mathrm{Mod}\,\varkappa^{(2)}_{\varrho,\sigma,\tau}(\mathrm{Mod}\,\alpha)^\varrho(\mathrm{Mod}\,\beta)^\sigma(\mathrm{Mod}\,\gamma)^\tau\quad\text{statt}\quad\mathrm{Mod}\,b,$$

$$\sum_{(\varrho,\sigma,\tau=0\dots r_3)}\mathrm{Mod}\,\varkappa^{(3)}_{\varrho,\sigma,\tau}(\mathrm{Mod}\,\alpha)^\varrho(\mathrm{Mod}\,\beta)^\sigma(\mathrm{Mod}\,\gamma)^\tau\quad\text{statt}\quad\mathrm{Mod}\,-c$$

in (35.) eingesetzt, so ist es gestattet, die Glieder mit denselben Exponenten zusammenzufassen. Werden daher die Ausdrücke (37.) in (36.) eingesetzt, so ist es auch dort gestattet, die Glieder mit denselben Exponenten zusammenzufassen, wodurch man die Reihe

$$(39.)\quad z^{\nu+1}\Sigma c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n}\alpha^{\mathfrak{a}}\beta^{\mathfrak{b}}\gamma^{\mathfrak{c}}z^{n}\quad(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n=0\dots\infty)$$

erhalte. Es muss auch die Reihe

(40.) $(\mathrm{Mod}\, z)^{\nu+1} \Sigma \mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},n} (\mathrm{Mod}\, \alpha)^{\mathfrak{a}} (\mathrm{Mod}\, \beta)^{\mathfrak{b}} (\mathrm{Mod}\, \gamma)^{\mathfrak{c}} (\mathrm{Mod}\, z)^{n} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, n = 0 \ldots \infty)$

convergiren, wenn $\mathrm{Mod}\, \alpha \leqq \mathrm{Mod}\, \alpha_1$, $\mathrm{Mod}\, \beta \leqq \mathrm{Mod}\, \beta_1$, $\mathrm{Mod}\, \gamma \leqq \mathrm{Mod}\, \gamma_1$, $\mathrm{Mod}\, z < 1$ ist. Für diese Werthe von α, β, γ, z stellt die Reihe (39.) die Function $\psi_\nu(a, b, c, z)$ dar, worin für a, b, c die Ausdrücke (37.) stehen. Bezeichnet man nun irgend eine der vier Variabeln α, β, γ, z durch u, so folgt aus (40.), dass die Reihe (39.) nach aufsteigenden Potenzen von u angeordnet werden darf und die Function $\psi_\nu(a, b, c, z)$ darstellt. Es hat sich also ergeben, dass die Function $\psi_\nu(a, b, c, z)$, worin a, b, c die Ausdrücke (37.) sind, durch die Reihe (39.) dargestellt wird, und eine einwerthige und stetige analytische Function jeder der vier Variabeln α, β, γ, z ist, wenn $\mathrm{Mod}\, \alpha \leqq \mathrm{Mod}\, \alpha_1$, $\mathrm{Mod}\, \beta \leqq \mathrm{Mod}\, \beta_1$, $\mathrm{Mod}\, \gamma \leqq \mathrm{Mod}\, \gamma_1$, $\mathrm{Mod}\, z < 1$ ist, wo $\mathrm{Mod}\, \alpha_1$, $\mathrm{Mod}\, \beta_1$, $\mathrm{Mod}\, \gamma_1$ mit ν durch die Relation (38.) zusammenhängen. Wird in diese Function ψ_ν für z eine einwerthige und stetige Function von x eingesetzt, die in einem gewissen Gebiete von x die Bedingung $\mathrm{Mod}\, z < 1$ erfüllt, so ist ψ_ν auch eine einwerthige und stetige analytische Function von x in diesem Gebiete.

Nun soll in der Gleichung (29.) jede der Variabeln α, β, γ unabhängig von den anderen ein solches Intervall im Reellen durchlaufen, dass für alle Werthe α, β, γ die Bedingung $1 > \gamma - \alpha - \beta > 0$, γ nicht gleich einer ganzen Zahl, die $\leqq 0$ ist, erfüllt ist; x möge reelle Werthe erhalten und ein Intervall durchlaufen, so dass $0 < x < 1$ ist. Dann ist für diese Strecken der vier Variabeln α, β, γ, x die Gleichung (29.) bereits bewiesen. Nun werden die Functionen in (29.) als analytische Functionen successive jeder der Variabeln α, β, γ betrachtet mit Hülfe des über die Function ψ_ν (31.) vorhin Bewiesenen. Da die Gleichung (29.) jedesmal für eine Strecke einer solchen Variabeln bereits bewiesen ist, so wird die Gleichung ausgedehnt über das Gebiet, worin die Functionen in (29.) einwerthige und stetige Functionen derselben Variabeln bleiben, demnach für alle Werthe α, β, γ bewiesen, solange nicht $\gamma - \alpha - \beta$ ganzzahlig und γ gleich Null oder einer negativen Zahl ist. Zuletzt wird bei fixirten Werthen α, β, γ die Gleichung für beliebige Werthe von x ausgedehnt, wofern die Functionen von x auf demselben Wege fortgesetzt und dabei keine singulären Stellen überschritten werden.

Ueber das Verhalten der durch die Reihe (1.) ausgedrückten Function, worin α oder β nicht eine ganze Zahl $\leqq 0$ ist, bei unendlicher Annäherung

von x an 1 ergiebt sich, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig ist, aus (29.), indem der reelle Theil von $\gamma-\alpha-\beta$ durch $\Re(\gamma-\alpha-\beta)$ bezeichnet wird:

$$(41.)\quad \begin{cases} \Re(\gamma-\alpha-\beta)>0, & \lim\limits_{x=1} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \Phi(\alpha,\beta,\gamma), \\ \Re(\gamma-\alpha-\beta)<0, & \lim\limits_{x=1} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \infty, \\ \Re(\gamma-\alpha-\beta)=0, & F(\alpha,\beta,\gamma,x) \text{ bleibt endlich für } \lim x=1, \end{cases}$$

ohne sich einer bestimmten Grenze zu nähern. Ist $\gamma-\alpha-\beta$ reell und >0, so convergirt die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ nach No. 4, ihr Werth ist $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$. Es sei $\gamma-\alpha-\beta$ ganzzahlig. Ist $\gamma-\alpha-\beta>0$, so ergiebt sich nach No. 4, dass die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ convergirt. Denn die beiden Wurzeln der Exponentengleichung bei $x=1$ sind 0 und die ganze Zahl $\gamma-\alpha-\beta>0$. Der Differentialgleichung genügt die Entwickelung (4.) $y_2^{(2)}$. Von dieser linear-unabhängig besteht bei $x=1$ ein Integral y_1, welches zum Exponenten 0 gehört. Kommt in demselben $\log(x-1)$ vor, so ist dieser Logarithmus mit $y_2^{(2)}$ multiplicirt, und der vom Logarithmus freie Theil muss zum Exponenten 0 gehören. (Vgl. das in No. 3 nach (7.) Gesagte). Wird vermittelst dieser beiden Integrale $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ dargestellt, so ergiebt sich, dass $\lim\limits_{x=1} F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ einen bestimmten endlichen Werth hat, und es folgt aus dieser Darstellung von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, wenn man auf $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für $\mathrm{Mod}(x)=1$ das Verfahren von No. 4 anwendet, dass die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ convergirt. Ist $\gamma-\alpha-\beta=0$, so sind die beiden Wurzeln der Exponentengleichung bei $x=1$ gleich Null. Es giebt dann zwei zu dem Exponenten Null gehörende linear-unabhängige Integrale bei $x=1$, von denen in dem einen $\log(x-1)$ vorkommt. In der Darstellung von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch diese beiden Integrale kommt $\log(x-1)$ vor und $\lim\limits_{x=1} F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\infty$. Denn sonst wäre $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ allenthalben im Endlichen einwerthig und stetig, und weil für $x=t^{-1}$, $t=0$ diese Function ein reguläres Integral von (2.) ist, so wäre sie eine ganze rationale Function, also α oder β eine ganze Zahl $\leqq 0$. Da die Entwickelung $(\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)$ Integral von (2.) ist, wo $\gamma-1$ statt γ steht, auch für $\gamma=1$, so folgt, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ ganzzahlig und >0 ist, aus den vorhin angegebenen Darstellungen dieses Integrales bei $x=1$: $\lim\limits_{x=1}(1-x)\{(\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1,x)\}=0$. Daher ergiebt sich, wie oben (12.) bis (19.), wenn $\gamma-\alpha-\beta$ ganzzahlig und >0, $F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$. Ist $\gamma-\alpha-\beta<0$, so folgt aus (26.): $\lim\limits_{x=1} F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\infty$. Wenn α oder β eine ganze Zahl $\leqq 0$ ist, so ist ((11.) bis (19.)) $F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$.

$$b.)\quad (42.)\quad \begin{cases} y_2^{(1)} = C_{21} y_1^{(2)} + C_{22} y_2^{(2)}, \\ \dfrac{dy_2^{(1)}}{dx} = C_{21}\dfrac{dy_1^{(2)}}{dx} + C_{22}\dfrac{dy_2^{(2)}}{dx}, \end{cases}$$

Die Entwickelung für $y_2^{(1)}$, behält ihre Bedeutung, so lange nicht $2-\gamma$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist, die Entwickelungen für $y_1^{(2)}$ und $y_2^{(2)}$ gelten und sind linearunabhängig, so lange nicht $\gamma-\alpha-\beta$ ganzzahlig wird. Aus *a.*) sind gegeben C, F_{01}, F_{11} (bei (10.)), F_{02}, F_{12} bei (24.); dabei werde $\gamma-\alpha-\beta$ als reell und $1>\gamma-\alpha-\beta>0$ vorausgesetzt. Es ergiebt sich:

$$(43.)\quad C_{21} = F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, 1) = \Phi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma),$$

$$(44.)\ C_{22} = \begin{cases} \lim\limits_{x=1}\left\{\dfrac{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+1}}{\alpha+\beta-\gamma}\dfrac{d}{dx}x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)\right\} \\ = \lim\limits_{x=1}\left\{\dfrac{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+1}x^{1-\gamma}}{\alpha+\beta-\gamma}\dfrac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{2-\gamma}F(\alpha-\gamma+2, \beta-\gamma+2, 3-\gamma, x)\right\} \\ = (\text{vgl. } (26.)) \\ \dfrac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(\alpha+\beta-\gamma)(2-\gamma)}F(1-\alpha, 1-\beta, 3-\gamma, 1) = (\text{vgl. } (19.), (22.)) \\ \Phi(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma). \end{cases}$$

Man erhält also, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ reell und $1>\gamma-\alpha-\beta>0$, $2-\gamma$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$:

$$(45.)\quad \begin{cases} x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \\ \quad = \Phi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma)F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) \\ + \Phi(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x). \end{cases}$$

Die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ in (45.) behalten ihre Bedeutung, so lange $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $2-\gamma$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl wird. Durch das bei (29.) angewandte Verfahren ergiebt sich, dass, solange keiner dieser Fälle eintritt, die Formel (45.) gilt.

$$c.)\quad (46.)\quad y_1^{(2)} = C_{11}y_1^{(3)} + C_{12}y_2^{(3)}.$$

$y_1^{(2)}$ soll längs der Linie L in positiver Richtung zu $x=\infty$ fortgesetzt werden. (vgl. No. 6 *d.*)) Nach No. 1 (Schluss) wird $x=t^{-1}$ gesetzt, dann entspricht dem Punkte $x=1$ der Punkt $t=1$, dem Punkte $x=\infty$ der Punkt $t=0$, hierauf $t=1-\xi$, so dass dem Punkte $x=1$ der Punkt $\xi=0$, dem Punkte $x=\infty$ der Punkt $\xi=1$ entspricht. Die Integrale $y_1^{(2)}$, $y_1^{(3)}$ und $y_2^{(3)}$ sind als Functionen von ξ auf der Seite der durch $\xi=0$ und $\xi=1$ gezogenen Geraden,

auf welcher die den complexen Ausdrücken mit positiven Coefficienten von i entsprechenden Punkte liegen, zu nehmen und $y_1^{(2)}$ längs dieser Geraden von $\xi=0$ zu $\xi=1$ fortzusetzen und durch $y_1^{(3)}$ und $y_2^{(3)}$ auszudrücken, wobei No. 3 in Anwendung kommt.

Man erhält

$$(47.)\quad \begin{cases} y_1^{(2)} = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) \\ = F\left(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{\xi}{\xi-1}\right) = (1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi) \end{cases}$$

(vgl. (25.)) und

$$(48.)\quad \begin{cases} y_1^{(3)} = (1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1-\xi), \\ y_2^{(3)} = (1-\xi)^{\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, 1-\xi), \end{cases}$$

wo in $(1-\xi)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1-\xi)}$ und $(1-\xi)^{\beta} = e^{\beta \log(1-\xi)}$, $(\log(1-\xi))_{\xi=0} = 0$ zu setzen ist; $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl, die $\leqq 0$ ist, $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig.

Nun hat man

$$(49.)\quad \begin{cases} y_1^{(2)} = C_{11} y_1^{(3)} + C_{12} y_2^{(3)} \\ \frac{dy_1^{(2)}}{d\xi} = C_{11} \frac{dy_1^{(3)}}{d\xi} + C_{12} \frac{dy_2^{(3)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Nach No. 3 wird

$$R = \alpha+\beta-1, \quad C = (\beta-\alpha) e^{-(\alpha+\beta)\pi i},$$

wo $(\log(\xi-1))_{\xi=0} = \pi i$ gesetzt ist,

$$D_{01} = \frac{d}{d\xi} y_2^{(3)}, \quad D_{11} = -y_2^{(3)}.$$

Es werden α und β als reell, $\alpha < \beta$ vorausgesetzt. Dann ist

$$F_{01} = \beta e^{-(\alpha+\beta)\pi i} (1-\xi)^{-\alpha}, \quad F_{11} = e^{-(\alpha+\beta)\pi i} (1-\xi)^{-\alpha+1}.$$

Daher

$$(50.)\quad C_{11} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} \left\{ \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi) \right. \\ \left. + \frac{(1-\xi)\alpha(\alpha+1-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma+1)} F(\alpha+1, \alpha-\gamma+2, \alpha+\beta-\gamma+2, \xi) \right\} = (\text{vgl. } 11), \\ \lim\limits_{\xi=1} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi) \\ = (\text{vgl. } (19.))\ \Phi(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1). \end{cases}$$

Ferner ist

$$D_{02} = -\frac{d}{d\xi} y_1^{(3)}, \quad D_{12} = y_1^{(3)}.$$

Es sei $1 > \beta-\alpha > 0$. Dann ist

$$F_{02} = -\alpha e^{-(\alpha+\beta)\pi i} (1-\xi)^{-\beta}, \quad F_{12} = -e^{-(\alpha+\beta)\pi i} (1-\xi)^{-\beta+1}.$$

Daher

$$(51.)\quad C_{12} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} \Big\{ \dfrac{-\alpha+\alpha}{\beta-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-\beta} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi) \\ -\dfrac{\alpha(\alpha+1-\gamma)(1-\xi)^{\alpha-\beta+1}}{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma+1)} F(\alpha+1, \alpha-\gamma+2, \alpha+\beta-\gamma+2, \xi) \Big\} = ((26.), (19.)) \\ \dfrac{\alpha(\alpha+1-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma+1)} \Phi(\beta-\gamma+1, \beta, \alpha+\beta-\gamma+2) \\ = \Phi(\beta-\gamma+1, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1), \quad (22.). \end{cases}$$

Also wenn α, β als reell, $1 > \beta-\alpha > 0$ vorausgesetzt werden, $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$, so ist:

$$(52.)\quad \begin{cases} (1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi) \\ = \Phi(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1)(1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1-\xi) \\ + \Phi(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1)(1-\xi)^{\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, 1-\xi). \end{cases}$$

Die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ in (52.) behalten ihre Bedeutung, so lange $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl wird. Durch das bei (29.) angewandte Verfahren ergiebt sich, dass, solange keiner dieser Fälle eintritt, die Gleichung (52.) gilt. Aus derselben folgt alsdann:

$$(53.)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) \\ = \Phi(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x^{-1}) \\ + \Phi(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) x^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x^{-1}), \end{cases}$$

solange $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

d.) (54.) $\quad y_2^{(2)} = C_{21} y_1^{(3)} + C_{22} y_2^{(3)}$.

Dieselbe Transformation wie in *c.*) ist vorzunehmen. Es ist

$$(55.)\quad \begin{cases} y_2^{(2)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x) \\ = \left(\dfrac{\xi}{\xi-1}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \dfrac{\xi}{\xi-1}\right) \\ = e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} (1-\xi)^{\alpha} F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \end{cases}$$

(vgl. (25.)), wenn

$$(\log \xi)_{\xi=1} = 0, \quad (\log(\xi-1))_{\xi=0} = \pi i, \quad (\log(1-\xi))_{\xi=0} = 0$$

gesetzt wird, $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$, $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig.

$$(56.)\quad \begin{cases} y_2^{(2)} = C_{21} y_1^{(3)} + C_{22} y_2^{(3)} \\ \dfrac{dy_2^{(2)}}{d\xi} = C_{21} \dfrac{dy_1^{(3)}}{d\xi} + C_{22} \dfrac{dy_2^{(3)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Aus *c.*) C, F_{01}, F_{11}, F_{02}, F_{12} gegeben, wobei α, β als reell und $1 > \beta-\alpha > 0$ vorausgesetzt ist.

$$
(57.)\quad C_{21} = \left\{ \begin{aligned}
&\lim_{\xi=1} e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \Big\{ \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \\
&\quad + \frac{(\gamma-\alpha-\beta)}{\beta-\alpha} \xi^{\gamma-\alpha-\beta-1} (1-\xi) F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \\
&\quad + \frac{(\gamma-\beta)(1-\beta)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha-\beta+1)} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} (1-\xi) F(\gamma-\beta+1, 2-\beta, \gamma-\alpha-\beta+2, \xi) \Big\} \\
&= (\text{vgl. } (11.), (19.)) \\
&e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \Phi(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1).
\end{aligned} \right.
$$

$$
(58.)\quad C_{22} = \left\{ \begin{aligned}
&\lim_{\xi=1} e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \Big\{ \frac{-\alpha+\alpha}{\beta-\alpha} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} (1-\xi)^{\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \\
&\quad - \frac{\gamma-\alpha-\beta}{\beta-\alpha} \xi^{\gamma-\alpha-\beta-1} (1-\xi)^{\alpha-\beta+1} F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \\
&\quad - \frac{(\gamma-\beta)(1-\beta)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha-\beta+1)} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} (1-\xi)^{\alpha-\beta+1} F(\gamma-\beta+1, 2-\beta, \gamma-\alpha-\beta+2, \xi) \Big\} \\
&= (\text{vgl. } (26.), (19.)) \\
&e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \frac{(\gamma-\beta)(1-\beta)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)} \Phi(1-\alpha, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+2) \\
&= (\text{vgl. } (22.)) \\
&e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \Phi(1-\alpha, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1).
\end{aligned} \right.
$$

Es ist also, wenn α, β reell, $1 > \beta-\alpha > 0$ ist und $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$,

$$
(59.)\quad \left\{ \begin{aligned}
&e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} (1-\xi)^{\alpha} F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \\
&= e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \Phi(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1)(1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1-\xi) \\
&+ e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} \Phi(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1)(1-\xi)^{\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, 1-\xi),
\end{aligned} \right.
$$

worin die Entwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ ihre Bedeutung behalten, solange $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl, die $\leqq 0$ ist. Solange keiner dieser Fälle eintritt, gilt die Gleichung, wie aus dem Verfahren bei (29.) folgt. Aus derselben ergiebt sich

$$
(60.)\quad \left\{ \begin{aligned}
&(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x) = e^{(\alpha+\beta-\gamma)\pi i} U, \\
&U = \Phi(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1) x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x^{-1}) \\
&\quad + \Phi(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1) x^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x^{-1}),
\end{aligned} \right.
$$

welche Formel gilt, solange $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl, die $\leqq 0$ ist.

e.) (61.) $y_1^{(3)} = C_{11} y_1^{(1)} + C_{12} y_2^{(1)}$.

$y_1^{(3)}$ wird längs L in positiver Richtung zu $x=0$ fortgesetzt, s. No. 6 *d.*). Nach No. 1 (Schluss) wird $x = 1+u$, $u = \frac{1}{t'}$ gesetzt, dem Punkte $x=\infty$ entspricht $t'=0$, dem Punkte $x=0$ $t'=-1$; hierauf $t'=-\xi$, so dass dem Punkte $x=\infty$ $\xi=0$, dem Punkte $x=0$ $\xi=1$ entspricht. Die Integrale $y_1^{(3)}$, $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(1)}$ sind auf der Seite der durch $\xi=0$ und $\xi=1$ gezogenen Geraden zu nehmen, auf welcher die den complexen Ausdrücken mit positivem Coefficienten von i entsprechenden Punkte liegen und $y_1^{(3)}$ von $\xi=0$ zu $\xi=1$ hin längs dieser Geraden fortzusetzen und durch $y_1^{(1)}$ und $y_1^{(2)}$ auszudrücken nach No. 3.

$$(62.)\quad \begin{cases} y_1^{(3)} = x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x^{-1}) \\ = \left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)^{\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{\xi}{\xi-1}\right) = \text{vgl. (25.)} \\ e^{-\alpha\pi i}\xi^{\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \xi), \end{cases}$$

$(\log\xi)_{\xi=1} = 0$, $(\log(\xi-1))_{\xi=0} = \pi i$ gesetzt.

$$(63.)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\xi-1}{\xi}\right), \\ y_2^{(1)} = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \\ = (\xi-1)^{1-\gamma}\xi^{\gamma-1} F\left(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \frac{\xi-1}{\xi}\right) \end{cases}$$

$\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$, $1-\gamma$ nicht ganzzahlig. Dann hat man

$$(64.)\quad \begin{cases} y_1^{(3)} = C_{11} y_1^{(1)} + C_{12} y_2^{(1)} \\ \frac{dy_1^{(3)}}{d\xi} = C_{11}\frac{dy_1^{(1)}}{d\xi} + C_{12}\frac{dy_2^{(1)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Nach No. 3 wird: $R=-\gamma$, $C=1-\gamma$, $D_{01} = \frac{d}{d\xi} y_2^{(1)}$, $D_{11} = -y_2^{(1)}$. Es sei $1-\gamma$ reell und >0. $F_{01} = 1-\gamma$, $F_{11} = 0$. Daher

$$(65.)\quad C_{11} = e^{-\alpha\pi i} F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, 1) = e^{-\alpha\pi i}\Phi(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1).$$

$D_{02} = -\frac{d}{d\xi} y_1^{(1)}$, $D_{12} = y_1^{(1)}$. Es sei $1-\gamma$ reell und $1 > 1-\gamma > 0$. $F_{02} = 0$, $F_{12} = (\xi-1)^{\gamma} = e^{\gamma\pi i}(1-\xi)^{\gamma}$, $(\log(1-\xi))_{\xi=0} = 0$ gesetzt. Daher

$$(66.)\quad C_{22} = \begin{cases} \lim_{\xi=1} e^{(\gamma-\alpha)\pi i}\left\{(1-\xi)^{\gamma}\xi^{\alpha}\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{(1-\gamma)(\alpha-\beta+1)} F(\alpha+1, \gamma-\beta+1, \alpha-\beta+2, \xi)\right\} \\ = \text{vgl. (26.), (19.)} \\ e^{(\gamma-\alpha)\pi i}\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{(1-\gamma)(\alpha-\beta+1)}\Phi(1-\beta, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+2) \\ = e^{(\gamma-\alpha-1)\pi i}\Phi(1-\beta, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1). \quad (22.) \end{cases}$$

Es ist also, wenn $1-\gamma$ reell und $1 > 1-\gamma > 0$, $\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$,

$$(67.)\quad \begin{cases} e^{-\alpha\pi i}\xi^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1,\xi) = e^{-\alpha\pi i}\Phi(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1)F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{\xi-1}{\xi}\right) \\ \qquad + e^{(\gamma-\alpha-1)\pi i}\Phi(1-\beta,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1) \\ \qquad .e^{(1-\gamma)\pi i}(1-\xi)^{1-\gamma}\xi^{\gamma-1}F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,\frac{\xi-1}{\xi}\right), \end{cases}$$

welche Formel man noch mittels der Gleichung

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{\xi-1}{\xi}\right) = \xi^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,1-\xi) = \xi^{\beta}F(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,1-\xi),$$

die sich aus (25.) ergiebt, umformen könnte. In (67.) behalten die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ ihre Bedeutung, so lange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\alpha-\beta+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist. Nach dem bei (29.) angewandten Verfahren ergiebt sich, dass so lange keiner dieser Fälle eintritt, die Gleichung (67.) gilt. Aus derselben folgt:

$$(68.)\quad \begin{cases} x^{-\alpha}F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ x^{-1}) = e^{-\alpha\pi i}\Phi(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1)F(\alpha,\beta,\gamma,x) \\ +e^{(\gamma-\alpha-1)\pi i}\Phi(1-\beta,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1)x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x), \end{cases}$$

so lange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\alpha-\beta+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl.

f.) Aus (68.) ergiebt sich durch Vertauschung von α mit β:

$$(69.)\quad \begin{cases} x^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,x^{-1}) = e^{-\beta\pi i}\Phi(\beta,\gamma-\alpha,\beta-\alpha+1)F(\alpha,\beta,\gamma,x) \\ +e^{(\gamma-\beta-1)\pi i}\Phi(1-\alpha,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1)x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x) \end{cases}$$

gilt, so lange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\beta-\alpha+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl.

Es sollen nun die inversen der Substitutionen A aufgestellt werden.

g.) $$(70.)\quad y_1^{(2)} = C_{11}y_1^{(1)} + C_{12}y_2^{(1)}.$$

$y_1^{(2)}$ wird in negativer Richtung längs L zu $x=0$ fortgesetzt, No. 6 *d.*); $x=1-\xi$.

$$(71.)\quad y_1^{(2)} = F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x) = F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,\xi).$$

$$(72.)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = F(\alpha,\beta,\gamma,1-\xi), \\ y_2^{(1)} = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x) \\ = (1-\xi)^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,1-\xi) \end{cases}$$

$(\log(1-\xi))_{\xi=0} = 0$ gesetzt; die Integrale $y_1^{(2)}$, $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(1)}$ sind auf der Seite der durch $\xi=0$ und $\xi=1$ gezogenen Geraden zu nehmen, auf welcher die

den complexen Ausdrücken mit negativen Coefficienten von i entsprechenden Punkte liegen, und $y_1^{(2)}$ längs dieser Geraden von $\xi = 0$ zu $\xi = 1$ hin fortzusetzen und durch $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(1)}$ auszudrücken nach No. 3. $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$.

$$(73.)\quad \begin{cases} y_1^{(2)} = C_{11} y_1^{(1)} + C_{12} y_2^{(1)}, \\ \dfrac{dy_1^{(2)}}{d\xi} = C_{11}\dfrac{dy_1^{(1)}}{d\xi} + C_{12}\dfrac{dy_2^{(1)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Nach No. 3 wird $R = -\gamma$, $C = (1-\gamma)e^{(1-\gamma)\pi i}$, $(\log(\xi-1))_{\xi=0} = -\pi i$ gesetzt; $D_{01} = \frac{d}{d\xi} y_2^{(1)}$, $D_{11} = -y_2^{(1)}$. $1-\gamma$ sei reell und > 0. $F_{01} = (1-\gamma)e^{(1-\gamma)\pi i}$, $F_{11} = 0$. Daher wird

$$(74.)\quad C_{11} = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1) = \Phi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1).$$

$D_{02} = -\frac{d}{d\xi} y_1^{(1)}$, $D_{12} = y_1^{(1)}$. $1-\gamma$ reell und $1 > 1-\gamma > 0$. $F_{02} = 0$, $F_{12} = e^{-\gamma\pi i}(1-\xi)^{\gamma}$.

$$(75.)\quad C_{12} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1}\left\{\dfrac{\alpha.\beta(1-\xi)^{\gamma}}{(\gamma-1)(\alpha+\beta-\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta-\gamma+2, \xi)\right\} = (\text{vgl. } 26.) \\ \lim\limits_{\xi=1}\left\{\dfrac{\alpha.\beta}{(\gamma-1)(\alpha+\beta-\gamma+1)} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+2, \xi)\right\} \\ = \dfrac{\alpha.\beta}{(\gamma-1)(\alpha+\beta-\gamma+1)} \Phi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+2) \quad (19.) \\ = \Phi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) \quad (22). \end{cases}$$

Es ist also, wenn $1-\gamma$ reell und $1 > 1-\gamma > 0$ und $\alpha+\beta-\gamma+1$ keine ganze Zahl $\leqq 0$ ist,

$$(76.)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, \xi) = \Phi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1) F(\alpha, \beta, \gamma, 1-\xi) \\ +\Phi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1)(1-\xi)^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, 1-\xi). \end{cases}$$

In dieser Formel behalten die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ ihre Bedeutung, solange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich Null oder einer negativen Zahl. Solange keiner dieser Fälle eintritt, besteht die Gleichung (76.), wie sich durch das bei (29.) angewandte Verfahren ergiebt. Aus derselben folgt:

$$(77.)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) = \Phi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ +\Phi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x), \end{cases}$$

solange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\alpha+\beta-\gamma+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl.

h.) $$(78.)\quad y_2^{(2)} = C_{21} y_1^{(1)} + C_{22} y_2^{(1)}.$$

Wie in $g.$) $x = 1-\xi$, daher

$$(79.)\quad \begin{cases} y_2^{(2)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x) \\ \quad = \xi^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi), \end{cases}$$

$(\log\xi)_{\xi=1} = 0$ gesetzt; $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$. R, C, F_{01}, F_{11}, F_{02}, F_{12} aus $g.$), $1-\gamma$ reell und $1 > 1-\gamma > 0$.

$$(80.)\quad C_{21} = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1) = \Phi(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1).$$

$$(81.)\quad C_{22} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} \left\{ \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(1-\xi)^\gamma}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta+1)} F(\gamma-\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma-\alpha-\beta+2, \xi) \right\} \\ = \lim\limits_{\xi=1} \left\{ \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta+1)} F(1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+2, \xi) \right\} \\ = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{(\gamma-1)(\gamma-\alpha-\beta+1)} \Phi(1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+2) \quad (19.) \\ = \Phi(1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1) \quad (22.). \end{cases}$$

Daher, wenn $1-\gamma$ reell und $1 > 1-\gamma > 0$, $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$,

$$(82.\quad \begin{cases} \xi^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \xi) \\ \quad = \Phi(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1) F(\alpha, \beta, \gamma, 1-\xi) \\ + \Phi(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1)(1-\xi)^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, 1-\xi), \end{cases}$$

in welcher Formel die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ ihre Bedeutung behalten, solange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl. Nach dem Verfahren von (29.) ergiebt sich, dass die Gleichung gilt, solange keiner dieser Fälle eintritt. Aus derselben folgt

$$(83.)\quad \begin{cases} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x) \\ \quad = \Phi(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ + \Phi(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1) x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x), \end{cases}$$

solange $1-\gamma$ nicht ganzzahlig, $\gamma-\alpha-\beta+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl.

i.) $$(84.)\quad y_1^{(1)} = C_{11} y_1^{(3)} + C_{12} y_2^{(3)}.$$

$y_1^{(1)}$ wird längs L in negativer Richtung zu $x = \infty$ fortgesetzt, No. 6 *d.*). Nach No. 1 (Schluss) wird $x = 1+u$, $u = \frac{1}{t'}$ gesetzt, dem Punkte $x = 0$ entspricht $t' = -1$, dem Punkte $x = \infty$ $t' = 0$, dann $t' = \xi-1$, so dass dem Punkte $x = 0$ entspricht $\xi = 0$, dem Punkte $x = \infty$ $\xi = 1$. Die Integrale

$y_1^{(1)}$, $y_1^{(3)}$ und $y_2^{(3)}$ sind auf der Seite der durch $\xi = 0$ und $\xi = 1$ gezogenen Geraden zu nehmen, auf welcher die den complexen Ausdrücken mit negativem Coefficienten von i entsprechenden Punkte liegen, $y_1^{(1)}$ ist längs dieser Geraden von $\xi = 0$ zu $\xi = 1$ fortzusetzen und durch $y_1^{(3)}$ und $y_2^{(3)}$ auszudrücken.

$$(85.)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\xi}{\xi-1}\right) = (1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \xi), \\ y_1^{(3)} = e^{-\alpha\pi i}(1-\xi)^{\alpha}\xi^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{\xi-1}{\xi}\right), \\ y_2^{(3)} = e^{-\beta\pi i}(1-\xi)^{\beta}\xi^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{\xi-1}{\xi}\right), \end{cases}$$

wo $(\log(1-\xi))_{\xi=0} = 0$, $(\log\xi)_{\xi=1} = 0$ gesetzt ist. $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, γ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl.

$$(86.)\quad \begin{cases} y_1^{(1)} = C_{11} y_1^{(3)} + C_{12} y_2^{(3)}, \\ \frac{dy_1^{(1)}}{d\xi} = C_{11}\frac{dy_1^{(3)}}{d\xi} + C_{12}\frac{dy_2^{(3)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Nach No. 3 ist $R = \alpha+\beta-1$; $C = \beta-\alpha$, $(\log(\xi-1))_{\xi=0} = -\pi i$ gesetzt. $D_{01} = \frac{d}{d\xi} y_2^{(3)}$, $D_{11} = -y_2^{(3)}$. Es seien α, β reell, $\beta-\alpha > 0$. Dann ist

$$F_{01} = e^{\alpha\pi i}\beta(1-\xi)^{-\alpha}, \quad F_{11} = e^{\alpha\pi i}(1-\xi)^{-\alpha+1}.$$

Daher

$$(87.)\ C_{11} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} e^{\alpha\pi i}\left\{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \xi) + \frac{\alpha(\gamma-\beta)(1-\xi)}{(\beta-\alpha)\gamma} F(\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+1, \xi)\right\} \\ = \text{(vgl. (11.))}, \\ \lim\limits_{\xi=1} e^{\alpha\pi i} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \xi) = e^{\alpha\pi i}\Phi(\alpha, \gamma-\beta, \gamma) \quad \text{(vgl. (19.))}. \end{cases}$$

$D_{02} = -\frac{d}{d\xi} y_1^{(3)}$, $D_{12} = y_1^{(3)}$; es sei $1 > \beta-\alpha > 0$,

$$F_{02} = -e^{\beta\pi i}\alpha(1-\xi)^{-\beta}, \quad F_{12} = -e^{\beta\pi i}(1-\xi)^{-\beta+1}.$$

$$(88.)\quad C_{12} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} e^{\beta\pi i}\left\{\frac{-\alpha+\alpha}{\beta-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-\beta} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \xi)\right. \\ \left. -\frac{\alpha.(\gamma-\beta)}{(\beta-\alpha)\gamma}(1-\xi)^{\alpha-\beta+1} F(\alpha+1, \gamma-\beta+1, \gamma+1, \xi)\right\} = ((26.), (19.)) \\ e^{\beta\pi i}\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{(\alpha-\beta)\gamma}\Phi(\gamma-\alpha, \beta, \gamma+1) = e^{\beta\pi i}\Phi(\gamma-\alpha, \beta, \gamma). \quad (22.) \end{cases}$$

Also wenn α, β reell und $1 > \beta-\alpha > 0$, γ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$ ist,

$$(89.)\quad \begin{cases} (1-\xi)^{\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \xi) \\ = e^{\alpha\pi i} \Phi(\alpha, \gamma-\beta, \gamma) e^{-\alpha\pi i} (1-\xi)^{\alpha} \xi^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{\xi-1}{\xi}\right) \\ + e^{\beta\pi i} \Phi(\beta, \gamma-\alpha, \gamma) e^{-\beta\pi i} (1-\xi)^{\beta} \xi^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{\xi-1}{\xi}\right), \end{cases}$$

eine Formel, die man noch vermittelst der aus (25.) sich ergebenden Relation

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\xi-1}{\xi}\right) = \xi^{\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, 1-\xi) = \xi^{\beta} F(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, 1-\xi)$$

umformen könnte. Die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ in (89.) behalten ihre Bedeutung, solange $\beta-\alpha$ nicht ganzzahlig, γ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$ ist. Solange keiner dieser Fälle eintritt, besteht die Gleichung (89.), wie sich nach dem bei (29.) angegebenen Verfahren ergiebt. Aus derselben folgt:

$$(90.)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = e^{\alpha\pi i} \Phi(\alpha, \gamma-\beta, \gamma) x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x^{-1}) \\ \qquad + e^{\beta\pi i} \Phi(\beta, \gamma-\alpha, \gamma) x^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x^{-1}), \end{cases}$$

solange $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, γ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

k.) (91.) $y_2^{(1)} = C_{21} y_1^{(3)} + C_{22} y_2^{(3)}$.

Dieselbe Substitution wie in *i.*). Es wird

$$(92.)\quad y_2^{(1)} = \begin{cases} x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \\ = e^{(1-\gamma)\pi i} \xi^{1-\gamma} (1-\xi)^{\gamma-1} F\left(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \frac{\xi}{\xi-1}\right) \\ = e^{(1-\gamma)\pi i} \xi^{1-\gamma} (1-\xi)^{\alpha} F(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \xi), \end{cases}$$

$\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $2-\gamma$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$.

$$(93.)\quad \begin{cases} y_2^{(1)} = C_{21} y_1^{(3)} + C_{22} y_2^{(3)}, \\ \frac{dy_2^{(1)}}{d\xi} = C_{21} \frac{dy_1^{(3)}}{d\xi} + C_{22} \frac{dy_2^{(3)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Aus *i.*) R, C, F_{01}, F_{11}, F_{02}, F_{12} gegeben, wobei α, β reell, $1 > \beta-\alpha > 0$ sein soll.

$$(94.)\quad C_{21} = \begin{cases} \lim_{\xi=1} e^{(1-\gamma+\alpha)\pi i} \left\{ \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} \xi^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \xi) \right. \\ \qquad + \frac{(1-\gamma)\xi^{-\gamma}}{\beta-\alpha} (1-\xi) F(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \xi) \\ \left. + \frac{(\alpha-\gamma+1)(1-\beta)}{(\beta-\alpha)(2-\gamma)} \xi^{1-\gamma} (1-\xi) F(\alpha-\gamma+2, 2-\beta, 3-\gamma, \xi) \right\} \\ = (\text{vgl. } (11.), (19.)) \\ e^{(\alpha-\gamma+1)\pi i} \Phi(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma). \end{cases}$$

$$(95.)\quad C_{22} = \begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} e^{(\beta-\gamma+1)\pi i}\Big\{\dfrac{-\alpha+\alpha}{\beta-\alpha}\,\xi^{1-\gamma}(1-\xi)^{\alpha-\beta}F(\alpha-\gamma+1,\,1-\beta,\,2-\gamma,\,\xi) \\ -\dfrac{1-\gamma}{\beta-\alpha}\,\xi^{-\gamma}(1-\xi)^{\alpha-\beta+1}F(\alpha-\gamma+1,\,1-\beta,\,2-\gamma,\,\xi) \\ -\dfrac{(\alpha-\gamma+1)(1-\beta)}{(\beta-\alpha)(2-\gamma)}\,\xi^{1-\gamma}(1-\xi)^{\alpha-\beta+1}F(\alpha-\gamma+2,\,2-\beta,\,3-\gamma,\,\xi)\Big\} \\ = e^{(\beta-\gamma+1)\pi i}\,\dfrac{(\alpha-\gamma+1)(1-\beta)}{(\alpha-\beta)(2-\gamma)}\,\Phi(1-\alpha,\beta-\gamma+1,3-\gamma)\quad((26.),(19.)) \end{cases}$$

$$= e^{(\beta-\gamma+1)\pi i}\,\Phi(1-\alpha,\,\beta-\gamma+1,\,2-\gamma).\quad (22.)$$

Es ist also, wenn α, β reell und $1 > \beta-\alpha > 0$, $2-\gamma$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$,

$$(96.)\quad \begin{cases} e^{(1-\gamma)\pi i}\xi^{1-\gamma}(1-\xi)^{\alpha}F(\alpha-\gamma+1,\,1-\beta,\,2-\gamma,\,\xi) \\ = e^{(\alpha-\gamma+1)\pi i}\Phi(\alpha-\gamma+1,1-\beta,2-\gamma)e^{-\alpha\pi i}\xi^{-\alpha}(1-\xi)^{\alpha}F\Big(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\dfrac{\xi-1}{\xi}\Big) \\ +e^{(\beta-\gamma+1)\pi i}\Phi(\beta-\gamma+1,1-\alpha,2-\gamma)e^{-\beta\pi i}\xi^{-\beta}(1-\xi)^{\beta}F\Big(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\dfrac{\xi-1}{\xi}\Big). \end{cases}$$

In dieser Formel behalten die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ ihre Bedeutung, solange $\beta-\alpha$ nicht ganzzahlig, $2-\gamma$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$. Solange keiner dieser Fälle eintritt, besteht die Gleichung (96.) gemäss dem Verfahren bei (29.). Aus derselben folgt

$$(97.)\quad \begin{cases} x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\,\beta-\gamma+1,\,2-\gamma,\,x) \\ = e^{(\alpha-\gamma+1)\pi i}\Phi(\alpha-\gamma+1,\,1-\beta,\,2-\gamma)\,x^{-\alpha}F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,x^{-1}) \\ +\,e^{(\beta-\gamma+1)\pi i}\Phi(\beta-\gamma+1,\,1-\alpha,\,2-\gamma)\,x^{-\beta}F(\beta,\,\beta-\gamma+1,\,\beta-\alpha+1,\,x^{-1}), \end{cases}$$

solange $\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $2-\gamma$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl.

l.) (98.) $\quad y_1^{(3)} = C_{11}y_1^{(2)}+C_{12}y_2^{(2)}$.

$y_1^{(3)}$ wird in negativer Richtung längs L zu $x=1$ fortgesetzt, No. 6 *d.*), $x=\frac{1}{t}$, No. 1 (Schluss). $x=\infty$ entspricht $t=0$, dem Punkte $x=1$ $t=1$; $t=\xi$.

$$(99.)\quad \begin{cases} y_1^{(3)} = x^{-\alpha}F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,x^{-1}) = \xi^{\alpha}F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,\xi) \\ y_1^{(2)} = F(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,1-x) = F\Big(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,\dfrac{\xi-1}{\xi}\Big) \\ y_2^{(2)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\,\gamma-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1,\,1-x) \\ \quad = e^{-(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta}\xi^{-(\gamma-\alpha-\beta)}F\Big(\gamma-\alpha,\,\gamma-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1,\,\dfrac{\xi-1}{\xi}\Big). \end{cases}$$

$(\log(1-\xi))_{\xi=0}=1$, $(\log\xi)_{\xi=1}=0$ gesetzt; die Integrale $y_1^{(3)}$, $y_1^{(2)}$ und $y_2^{(2)}$ sind auf der Seite der durch $\xi=0$ und $\xi=1$ gezogenen Geraden zu nehmen,

auf welcher die den complexen Ausdrücken mit negativen Coefficienten von i entsprechenden Punkte liegen, und $y_1^{(3)}$ ist längs dieser Geraden von $\xi=0$ zu $\xi=1$ hin fortzusetzen und durch $y_1^{(2)}$ und $y_2^{(2)}$ auszudrücken. $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$.

$$(100.)\quad \begin{cases} y_1^{(3)} = C_{11}y_1^{(2)}+C_{12}y_2^{(2)} \\ \dfrac{dy_1^{(3)}}{d\xi} = C_{11}\dfrac{dy_1^{(2)}}{d\xi}+C_{12}\dfrac{dy_2^{(2)}}{d\xi}. \end{cases}$$

Nach No. 3 wird

$$R=\gamma-\alpha-\beta-1,\quad C=\gamma-\alpha-\beta,\quad (\log(\xi-1))_{\xi=0}=-\pi i$$

gesetzt,

$$D_{01}=\frac{d}{d\xi}y_2^{(2)},\quad D_{11}=-y_2^{(2)},$$

$\gamma-\alpha-\beta$ sei reell und >0,

$$F_{01}=\gamma-\alpha-\beta,\quad F_{11}=0.$$

$$(101.)\quad C_{11}=F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,1)=\Phi(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1).$$

$$D_{02}=-\frac{d}{d\xi}y_1^{(2)},\quad D_{12}=y_1^{(2)}.$$

$\gamma-\alpha-\beta$ reell und $1>\gamma-\alpha-\beta>0$.

$$F_{02}=0,\quad F_{12}=-e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}(1-\xi)^{1-(\gamma-\alpha-\beta)}.$$

$$(102.)\quad C_{12}=\begin{cases} \lim\limits_{\xi=1} e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}\left\{\dfrac{-\alpha(\alpha-\gamma+1)(1-\xi)^{1-(\gamma-\alpha-\beta)}}{(\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-\beta+1)}\xi^{\alpha}F(\alpha+1,\alpha-\gamma+2,\alpha-\beta+2,\xi)\right\} \\ = e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}\dfrac{\alpha(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+1)}\Phi(1-\beta,\gamma-\beta,\alpha-\beta+2)\quad ((26.),(19.)) \\ = e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}\Phi(1-\beta,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1).\quad (22.) \end{cases}$$

Wenn also $\gamma-\alpha-\beta$ reell und $1>\gamma-\alpha-\beta>0$, und $\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$ ist, so ist

$$(103.)\quad \begin{cases} \xi^{\alpha}F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,\xi) \\ =\Phi(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1)F\left(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,\dfrac{\xi-1}{\xi}\right) \\ +e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}\Phi(1-\beta,\,\gamma-\beta,\,\alpha-\beta+1) \\ e^{-(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta}\xi^{-(\gamma-\alpha-\beta)}F\left(\gamma-\alpha,\,\gamma-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1,\,\dfrac{\xi-1}{\xi}\right), \end{cases}$$

(vgl. (89.)). Die Reihenentwickelungen der Functionen F und die Functionen Φ in (103.) behalten ihre Bedeutung, solange $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig und $\alpha-\beta+1$ nicht gleich einer ganzen Zahl $\leqq 0$ ist. Solange keiner dieser Fälle eintritt, besteht die Gleichung, wie sich nach dem bei (29.) ange-

wandten Verfahren ergiebt. Aus derselben folgt:

$$(104.)\quad \begin{cases} x^{-\alpha}F(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1,\,x^{-1}) \\ =\Phi(\alpha,\,\alpha-\gamma+1,\,\alpha-\beta+1)F(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,1-x) \\ +e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}\Phi(1-\beta,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x), \end{cases}$$

solange $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\alpha-\beta+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

m.) Aus (104.) folgt durch Vertauschung von α mit β:

$$(105.)\quad \begin{cases} x^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,x^{-1}) \\ =\Phi(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1)F(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,1-x) \\ +e^{(\gamma-\alpha-\beta)\pi i}\Phi(1-\alpha,\gamma-\alpha,\beta-\alpha+1)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x) \end{cases}$$

gilt, solange $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig, $\beta-\alpha+1$ nicht gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl ist.

II. Es werde nun die allgemeine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nur regulären Integralen und drei singulären Punkten behandelt, welche ***Riemann*** in der Abhandlung: Beiträge zur Theorie der durch die ***Gauss***sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbaren Functionen für die von ihm untersuchten P-Functionen hergeleitet hat. Durch eine rationale Substitution ersten Grades kann man die drei singulären Punkte in $x=0$, ∞ und 1 verlegen. Wenn die Differentialgleichung nur reguläre Integrale haben soll, so ist sie von der Form:

$$(106.)\qquad \frac{d^2P}{dx^2}+\frac{Ax+B}{x(x-1)}\frac{dP}{dx}+\frac{Cx^2+Dx+E}{x^2(x-1)^2}P = 0.$$

Die Wurzeln der Exponentengleichung bei dieser Differentialgleichung seien bei $x=0$ $a,\ a'$, bei $x=\infty$ $b,\ b'$, bei $x=1$ $c,\ c'$. Die Summe der Wurzeln bei den $\varkappa$ singulären Punkten im Endlichen und bei dem Punkte im Unendlichen in einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit nur regulären Integralen ist $(\varkappa-1)\frac{m(m-1)}{2}$ (vgl. No. 6*b*.), also muss

$$(107.)\qquad a+a'+b+b'+c+c' = 1$$

sein. Die Differentialgleichung (106.) hat nun bekanntlich (s. ***Riemann*** l. c. VII. und die Abhandlung des Herrn ***Fuchs*** Bd. 66. dieses Journals p. 159) die Eigenschaft, dass ihre Coefficienten durch die Wurzeln der Exponentengleichungen bei den Punkten $x=0$, ∞, 1 bestimmt sind. Die Exponentengleichungen sind nämlich

$$(108.)\quad \begin{cases} \text{bei } x=0, & r(r-1)-Br+E=0, \\ \text{bei } x=\infty, & r(r-1)+(2-A)r+C=0, \\ \text{bei } x=1, & r(r-1)+(A+B)r+C+D+E=0. \end{cases}$$

Wenn daher die erste die Wurzeln a, a', die zweite b, b', die dritte c, c', zwischen denen die Relation (107.) gilt, haben soll, so muss $B+1=a+a'$, $E=aa'$, $A-1=b+b'$, $C=bb'$, $D=cc'-aa'-bb'$ sein, demnach wird Differentialgleichung (106.)

$$(109.)\quad \frac{d^2P}{dx^2}+\frac{(b+b'+1)x+a+a'-1}{x(x-1)}\frac{dP}{dx}+\frac{bb'x^2+(cc'-aa'-bb')x+aa'}{x^2(x-1)^2}P=0.$$

Setzt man

$$(110.)\quad P = x^{-a}(1-x)^{-c}y,$$

so erhält man für y diejenige Differentialgleichung (109.), bei welcher die Wurzeln der Exponentengleichung sind bei $x=0$ 0 und $a'-a$, bei $x=\infty$ $b+a+c$ und $b'+a+c$, bei $x=1$ 0 und $c'-c$, demnach aus (109.)

$$(111.)\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{(b+a+c+b'+a+c+1)x+a'-a-1}{x(x-1)}\frac{dy}{dx}+\frac{(b+a+c)(b'+a+c)}{x(x-1)}y=0.$$

Wird nun $b+a+c=\alpha$, $b'+a+c=\beta$, $a-a'+1=\gamma$ gesetzt, so erhält man die Differentialgleichung (2.). Dieselbe hat zu Wurzeln der Exponentengleichung bei $x=0$ 0 und $1-\gamma$, bei $x=\infty$ α und β, bei $x=1$ 0 und $\gamma-\alpha-\beta$ und ist gemäss (109.) durch diese Wurzeln in den Coefficienten bestimmt.

In Differentialgleichung (109.) werde für x eine rationale Substitution ersten Grades in ξ eingesetzt, in welcher den Punkten 0, ∞, 1 dieselben Punkte in anderer Reihenfolge entsprechen, so erhält man eine Differentialgleichung, bei der die Wurzeln der Exponentengleichungen (die in den entsprechenden Punkten x und ξ nach No. 1 unverändert bleiben) bei den Punkten 0, ∞, 1 bekannt sind, und die demnach aus (109.) gebildet und durch die Substitutionen (110.) auf die Differentialgleichung (111.) zurückgeführt werden kann (s. *Riemann* l. c. II.). Diese rationalen Substitutionen ersten Grades sind:

$$(112.)\quad x=\xi,\; x=\frac{1}{1-\xi},\quad x=\frac{\xi-1}{\xi},\quad x=\frac{\xi}{\xi-1},\quad x=1-\xi,\quad x=\frac{1}{\xi}.$$

Es sind dieses dieselben Substitutionen, welche in I aus den allgemeinen Betrachtungen in No. 1 entnommen sind, die drei ersten zur Herleitung der Substitutionen A, die drei letzten zur Herleitung der inversen Substitutionen A'.

Wenn man nun die rationalen Substitutionen (112.) auf die Differentialgleichung (2.) anwendet, so erhält man also die Differentialgleichung in ξ aus (109.), und führt durch eine Substitution (110.), worin $x=\xi$, dieselbe auf eine

Differentialgleichung (111.) oder (2.) zurück, in welcher die für α, β, γ einzusetzenden Ausdrücke aus den Wurzeln der Exponentengleichungen gegeben sind. Die Integrale dieser letzteren Differentialgleichung, zwischen denen, um die Ausdrücke A und A' zu bestimmen, eine lineare Relation ermittelt werden soll, sind eines bei $\xi = 0$, welches durch zwei linear-unabhängige bei $\xi = 1$ ausgedrückt werden soll. Der Ausdruck jedes dieser drei Integrale bis $\xi = 0$, bezüglich $\xi = 1$, ist aus den Formeln (3.) und (4.), in welchen $x = \xi$ und für α, β, γ die aus den Exponentengleichungen der transformirten Differentialgleichung in ξ sich ergebenden Ausdrücke zu setzen sind, bis auf einen constanten Factor bekannt; letzterer ist direct zu bestimmen, indem die Substitutionen (112.) in die Integrale (3.), (4.), (5.) der ursprünglichen Differentialgleichung eingesetzt werden. Nun braucht nur die eine Relation (29.) bewiesen zu sein, dann wird diese jedesmal bei der Differentialgleichung in ξ angewandt, um das Integral bei $\xi = 0$ durch die beiden bei $\xi = 1$ auszudrücken. Man erhält auf diese Weise die in I als Beispiele zu dem in den Nrn. 1, 3, 6*d.* entwickelten Verfahren alle nach diesem Verfahren berechneten Gleichungen (45.), (52.), (59.), (67.), (76.), (82.), (89.), (96.), (103.) vermöge der besonderen Beschaffenheit der Differentialgleichung (109.) sämmtlich vermittelst der *einen* Relation (29.).

Wird auf die Differentialgleichung (109.) die Substitution (110.) angewandt, so kann man mittelst der Darstellungen der Integrale der Differentialgleichung (111.) durch die Formeln (3.), (4.) und (5.), die mit Constanten multiplicirt werden, folgende Ausdrücke als Integrale der Differentialgleichung (109.) bei den singulären Punkten $x = 0$, ∞, 1 aufstellen, (vgl. (26.)):

$$(113.)\quad \begin{cases} P^a &= x^a(1-x)^c F(a+b+c,\ a+b'+c,\ a-a'+1,\ x) \\ &= x^a(1-x)^{c'} F(a+b+c',\ a+b'+c',\ a-a'+1,\ x), \\ P^{a'} &= x^{a'}(1-x)^c F(a'+b+c,\ a'+b'+c,\ a'-a+1,\ x) \\ &= x^{a'}(1-x)^{c'} F(a'+b+c',\ a'+b'+c',\ a'-a+1,\ x), \\ P^b &= e^{b\pi i} x^{-b-c}(x-1)^c F(a+b+c,\ a'+b+c,\ b-b'+1,\ x^{-1}) \\ &= e^{b\pi i} x^{-b-c'}(x-1)^{c'} F(a+b+c',\ a'+b+c',\ b-b'+1,\ x^{-1}), \\ P^{b'} &= e^{b'\pi i} x^{-b'-c}(x-1)^c F(a+b'+c,\ a'+b'+c,\ b'-b+1,\ x^{-1}) \\ &= e^{b'\pi i} x^{-b'-c'}(x-1)^{c'} F(a+b'+c',\ a'+b'+c',\ b'-b+1,\ x^{-1}), \\ P^c &= (x-1)^c x^a F(a+b+c,\ a+b'+c,\ c-c'+1,\ 1-x) \\ &= (x-1)^c x^{a'} F(a'+b+c,\ a'+b'+c,\ c-c'+1,\ 1-x), \\ P^{c'} &= (x-1)^{c'} x^a F(a+b+c',\ a+b'+c',\ c'-c+1,\ 1-x) \\ &= (x-1)^{c'} x^{a'} F(a'+b+c',\ a'+b'+c',\ c'-c+1,\ 1-x). \end{cases}$$

Diese Integrale werden in dem Gebiete von x genommen, welches die complexen Ausdrücke mit positivem Coefficienten von i enthält und dabei bestimmt, dass

$$(\log x)_{x=1} = 0, \quad (\log(1-x))_{x=0} = 0, \quad (\log(x-1))_{x=0} = \pi i$$

sein soll. Nun erhält man, wenn man in die in I ermittelten linearen Relationen zwischen den Integralen der Differentialgleichung (2.)

$$\alpha = a+b+c, \quad \beta = a+b'+c, \quad \gamma = a-a'+1$$

setzt, alsdann die Relationen mit const. $x^a(1-x)^c$ multiplicirt, die entsprechenden Relationen zwischen den Integralen (113.). (Lineare Relationen zwischen den Integralen der Differentialgleichung (109.) hat mittels deren Ausdrücke, die durch bestimmte Integrale gegeben werden, Herr *Thomae* in *Schloemilchs* Zeitschrift für Mathematik und Physik Jahrg. 14 berechnet). Die Relationen zwischen den Integralen (113.) nehmen nun unter Anwendung der Function Φ (20.) folgende Form an. Jede der nachstehenden Gleichungen gilt, so lange die Differenz der Exponenten bei den Integralen P auf der rechten Seite nicht ganzzahlig und die Grösse, welche unter dem Functionszeichen Φ zuletzt steht, nicht Null oder eine negative ganze Zahl ist; also z. B. die erste Gleichung gilt, so lange $c-c'$ nicht ganzzahlig, $a-a'+1$ nicht Null oder eine negative ganze Zahl ist. Die Relationen sind folgende:

$$(114.)\quad \begin{cases} P^a = \Phi(a+b+c,\ a+b'+c,\ a-a'+1)\,e^{-c\pi i}P^c \\ \qquad + \Phi(a+b+c',\ a+b'+c',\ a-a'+1)\,e^{-c'\pi i}P^{c'}, \\ P^{a'} = \Phi(a'+b+c,\ a'+b'+c,\ a'-a+1)\,e^{-c\pi i}P^c \\ \qquad + \Phi(a'+b+c',\ a'+b'+c',\ a'-a+1)\,e^{-c'\pi i}P^{c'}, \\ P^c = \Phi(a+b+c,\ a'+b+c,\ c-c'+1)\,e^{-b\pi i}P^b \\ \qquad + \Phi(a+b'+c,\ a'+b'+c,\ c-c'+1)\,e^{-b'\pi i}P^{b'}, \\ P^{c'} = \Phi(a+b+c',\ a'+b+c',\ c'-c+1)\,e^{-b\pi i}P^b \\ \qquad + \Phi(a+b'+c',\ a'+b'+c',\ c'-c+1)\,e^{-b'\pi i}P^{b'}, \\ P^b = \Phi(a+b+c,\ a+b+c',\ b-b'+1)\,e^{-a\pi i}P^a \\ \qquad + \Phi(a'+b+c,\ a'+b+c',\ b-b'+1)\,e^{-a'\pi i}P^{a'}, \\ P^{b'} = \Phi(a+b'+c,\ a+b'+c',\ b'-b+1)\,e^{-a\pi i}P^a \\ \qquad + \Phi(a'+b'+c,\ a'+b'+c',\ b'-b+1)\,e^{-a'\pi i}P^{a'}. \end{cases}$$

$$(115.)\begin{cases} P^c = \Phi(a+b+c,\ a+b'+c,\ c-c'+1)e^{c\pi i}P^a \\ \quad +\Phi(a'+b+c,\ a'+b'+c,\ c-c'+1)e^{c\pi i}P^{a'}, \\ P^{c'} = \Phi(a+b+c',\ a+b'+c',\ c'-c+1)e^{c'\pi i}P^a \\ \quad +\Phi(a'+b+c',\ a'+b'+c',\ c'-c+1)e^{c'\pi i}P^{a'}, \\ P^a = \Phi(a+b+c,\ a+b+c',\ a-a'+1)e^{a\pi i}P^b \\ \quad +\Phi(a+b'+c,\ a+b'+c',\ a-a'+1)e^{a\pi i}P^{b'}, \\ P^{a'} = \Phi(a'+b+c,\ a'+b+c',\ a'-a+1)e^{a'\pi i}P^b \\ \quad +\Phi(a'+b'+c,\ a'+b'+c',\ a'-a+1)e^{a'\pi i}P^{b'}, \\ P^b = \Phi(a+b+c,\ a'+b+c,\ b-b'+1)e^{b\pi i}P^c \\ \quad +\Phi(a+b+c',\ a'+b+c',\ b-b'+1)e^{b\pi i}P^{c'}, \\ P^{b'} = \Phi(a+b'+c,\ a'+b'+c,\ b'-b+1)e^{b'\pi i}P^c \\ \quad +\Phi(a+b'+c',\ a'+b'+c',\ b'-b+1)e^{b'\pi i}P^{c'}. \end{cases}$$

9.

Es ist am Schlusse von No. 4 bemerkt worden, dass es unter den dort betrachteten Functionen $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$, bei denen $\lim_{\xi=1}\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ gleich den dort gesuchten Constanten C_{kb} ist, solche von folgender Beschaffenheit giebt. Die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ ist für alle Punkte der Kreisfläche in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 dem Modul nach kleiner als ein und derselbe endliche positive Werth und es ist $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ stetig; der reelle Theil in dieser Function sei $u(\varrho,\theta)$, der Coefficient von i $v(\varrho,\theta)$, wenn $\xi=\varrho e^{i\theta}$, $\varrho=\text{Mod}(\xi)$ gesetzt wird. Wird $\varrho=1$ gesetzt, so sind also die Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ für $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ dem absoluten Werthe nach kleiner, als eine endliche Grenze und stetig. Es giebt nun unter diesen Functionen $u(1,\theta)$ oder $v(1,\theta)$ solche, dass, wenn θ das Gebiet $0\leqq\theta\leqq\theta_1$ oder $2\pi\geqq\theta\geqq\theta_2$ durchläuft, wo θ_1 beliebig nahe an 0, θ_2 beliebig nahe an 2π liegt, *die Function nicht die Eigenschaft hat, dass sie mit wachsendem θ entweder nur wächst, oder nur abnimmt, oder constant bleibt.*

Um ein hierauf bezügliches Beispiel zu geben, werde die Gleichung (10.) der No. 8 genommen. Es ist dort unter Voraussetzung, dass γ nicht Null oder eine negative ganze Zahl, $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig sei, und dass der reelle Theil von $\gamma-\alpha-\beta$ $R(\gamma-\alpha-\beta)>0$ sei, gezeigt, dass

$$(1.)\qquad C_{11} = \lim_{x=1} F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

ist. Nun werde $\gamma-\alpha-\beta=p+qi$ gesetzt, p und q reell und p als positiv

und von Null verschieden, q als von Null verschieden vorausgesetzt. Dann werde zur Untersuchung von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ die Gleichung No. 8 (29.) genommen, und damit in derselben $\Phi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)$ nicht verschwindet, sollen α, β nicht Null oder negative ganze Zahlen sein. Nun wird $x=\eta+i\zeta$ gesetzt, wo η und ζ reell sind; für $\text{Mod}\, x = 1$ besteht dann die Gleichung $\eta^2+\zeta^2=1$. $1-x=1-\eta-i\zeta$; hier wird für $1-\eta$ die Entwickelung No. 4 (18.), worin $\eta_0=1$, $\zeta_0=0$ ist, gesetzt $1-\eta=\sum_1^\infty -\beta_\alpha\zeta^\alpha$, demnach $1-x=\sum_1^\infty c_\alpha\zeta^\alpha$, $c_1=-i$. Wird diese Entwickelung für $1-x$ in No. 8 (29.) eingesetzt, so nimmt $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)$ die Form $P(\zeta)+iP'(\zeta)$ an, wo die Functionen $P(\zeta)$ und $P'(\zeta)$ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty g_\alpha\zeta^\alpha$ haben mit reellen Coefficienten g_α. Ferner, wenn $\zeta>0$ angenommen wird, so erhält man für

$$\Phi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)$$

eine Entwickelung der Form $e^{(p+qi)\log\zeta}(Q(\zeta)+iQ'(\zeta))$, $(\log\zeta)_{\zeta=1}=0$, wo die Entwickelungen für $Q(\zeta)$ und $Q'(\zeta)$ die Form $\sum_0^\infty k_\alpha\zeta^\alpha$ haben mit reellen Coefficienten k_α; $Q(0)+iQ'(0)=\Phi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)e^{(p+qi)\log(-i)}$ von Null verschieden ist. Man hat daher

$$\frac{d\log}{d\zeta}(Q(\zeta)+iQ'(\zeta))=R(\zeta)+iR'(\zeta) \quad \text{und} \quad Q(\zeta)+iQ'(\zeta)=e^{S(\zeta)+iS'(\zeta)},$$

wo S und S' ebenfalls Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty l_\alpha\zeta^\alpha$ haben mit reellen Coefficienten l_α. Man hat also die Darstellung

$$(2.)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=P(\zeta)+iP'(\zeta)+e^{(p+qi)\log(\zeta)+S(\zeta)+iS'(\zeta)},\quad (\log\zeta)_{\zeta=1}=0,$$

der reelle Theil wird also

$$(3.)\quad P(\zeta)+e^{p\log(\zeta)+S(\zeta)}\cos(q\log(\zeta)+S'(\zeta))$$

und der Coefficient von i

$$(4.)\quad P'(\zeta)+e^{p\log(\zeta)+S'(\zeta)}\sin(q\log(\zeta)+S'(\zeta)),$$

so lange ζ unterhalb einer gewissen Grenze $\zeta_1>0$ bleibt. Es sei nun $0<p<1$. $P(\zeta)$ sei gleich $g_0+\sum_1^\infty g_\alpha\zeta^\alpha$. Das Vorzeichen von $\zeta^p(\zeta^{1-p}\sum_1^\infty g_\alpha\zeta^{\alpha-1}+e^{S(\zeta)}\eta)$ ist, wenn ζ hinreichend klein geworden ist, positiv, wenn $\eta=+1$, negativ, wenn $\eta=-1$ ist. Bei der Function

$$\eta = \cos(q\log(\zeta)+S'(\zeta))$$

ist aber

$$\frac{d}{d\zeta}(q\log\zeta+S'(\zeta)) = q\frac{1}{\zeta}+\frac{dS'\zeta}{d\zeta}$$

von einem gewissen positiven Werthe $\zeta = \zeta'$ an, für $\zeta \overline{\overline{<}} \zeta'$ fortwährend von demselben Vorzeichen wie q, so dass $q \log \zeta + S'(\zeta)$ von ζ' an mit abnehmendem ζ fortwährend und ins Unendliche entweder wächst oder abnimmt; es wird daher $\eta = \cos(q \log(\zeta) + S'(\zeta))$, während ζ von ζ' an fortwährend abnimmt, für unendlich viele Werthe ζ abwechselnd gleich $+1$ und gleich -1. Demnach wird die Function

$$\zeta^p \left\{ \zeta^{1-p} \sum_1^x g_\lambda \zeta^{\lambda-1} + e^{S(\zeta)} \cos(q \log(\zeta) + S'(\zeta)) \right\},$$

wenn ζ von ζ'' an fortwährend abnimmt, wo $\zeta'' \leqq \zeta'$, ζ'' beliebig nahe an Null liegt, für unendlich viele Werthe ζ abwechselnd positiv und negativ. Es kann demnach ein Gebiet von ζ, $0 \leqq \zeta \leqq \zeta''$, wo ζ'' beliebig nahe an Null liegen kann, nicht bestehen, so dass in diesem Intervall die vorhin genannte Function mit wachsendem ζ nur wächst oder nur abnimmt oder constant bleibt. Ebenso ist es, wenn man zu der vorhin genannten Function die Constante g_0 addirt, also in Bezug auf die Function (3.). Dasselbe findet in Bezug auf die Function (4.) statt. Wird $\zeta = \sin\theta$ gesetzt, und θ in einem Gebiete $0 \leqq \theta \leqq \theta_1$ genommen, wo θ_1 beliebig nahe an θ gebracht werden kann, so behalten die Functionen (3.) und (4.) als von θ abhängig betrachtet, dieselbe vorhin genannte Eigenschaft. Ebenso ist es für negative Werthe von ζ, wo $\zeta = -\zeta'$ zu setzen ist.

Man hat also in $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, wenn in $\gamma - \alpha - \beta = p + qi$, p und q reell und von Null verschieden sind, $1 > p > 0$, keine der Grössen α, β, γ Null oder eine negative ganze Zahl ist, eine Function $\mathfrak{P}_{kb}(x)$ der angegebenen Art.

II. Wenn eine Function $F(x)$, die durch eine nach Potenzen von x mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreitende Reihe dargestellt ist, in einer endlichen Anzahl von Punkten auf dem Convergenzkreise dieser Reihe aufhört, in der Umgebung eines solchen Punktes, diesen Punkt mitgerechnet, eine einwerthige und stetige analytische Function zu sein, während sie über jedes Stück der Peripherie, welches einen solchen Punkt nicht enthält, hinaus in einem Kreissector mit dem Punkte $x = 0$ als Mittelpunkt einwerthig und stetig fortgesetzt werden kann, wie die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, abgesehen von $x = 1$, so entsteht die Frage, ob die Potenzreihe auf dem Convergenzkreise, abgesehen von den einzelnen singulären Punkten, convergirt und die Function darstellt. Convergirt die Reihe in einem solchen Punkte des Convergenzkreises, so stellt sie auch in diesem Punkte den Werth der Function dar

nach dem Satze von *Abel*, der in No. 4 (Anfang) angegeben ist. Was nun die Convergenz angeht, so kann man mittels der *Fourier*schen Reihe *folgenden Satz* nachweisen.

Die Function $F(x)$ habe bei jedem der oben genannten singulären Punkte auf dem Convergenzkreise, ein solcher Punkt sei $x=a$, die von $x-a$ abhängende Entwickelung eines regulären Integrales (Abh. Bd. 74 No. 1 (5.), Bd. 75 No. 1). In dieser Entwickelung sei der kleinste reelle Theil der Exponenten in den Potenzreihen >0, oder wenn derselbe $=0$ ist, so sei jede denselben enthaltende Potenz von $x-a$ nicht mit einer Potenz von $\log(x-a)$ multiplicirt, so dass die Function bei unendlicher Annäherung von x an a dem Modul nach unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Oder der kleinste reelle Theil sei >-1 und die Exponenten, deren reelle Theile $\leqq 0$ sind, seien reell. *In diesen Fällen convergirt die Potenzreihe wenigstens in allen nichtsingulären Punkten des Convergenzkreises.*

Der Beweis der Convergenz wird nach der von *Dirichlet* (Bd. 17 p. 54, 55) in Betreff der *Fourier*schen Reihe angegebenen Methode geführt.

Der reelle Theil von $F(x)$ sei $u(\varrho,\theta)$, der Coefficient von i $v(\varrho,\theta)$, wenn $x=\varrho e^{i\theta}$, $\varrho=\text{Mod}(x)$ gesetzt wird. R sei der Radius des Convergenzkreises, so ist $u(R,\theta)$ und $v(R,\theta)$ in einem Gebiete von θ, welches keinen einem singulären Punkte angehörenden Werth θ enthält, endlich und stetig. Ein singulärer Punkt sei $x=a=Re^{i\theta_0}$.

Wenn in $x=a$ die Function $F(x)$ nicht endlich bleibt, so ist zunächst zu zeigen, dass, wenn θ das Intervall durchläuft $\theta_0<\theta\leqq\theta_1$, wo θ_1 ein gewisser Werth von θ ist, diejenige der Functionen $u(R,\theta)$, $v(R,\theta)$, welche nicht endlich bleibt, ihr Vorzeichen nicht wechselt, und dass dasselbe stattfindet, wenn θ das Intervall $\theta_0>\theta\geqq\theta_2$ durchläuft, wo θ_2 ein gewisser Werth von θ ist. Es werde $x=\eta'+i\zeta'$ gesetzt, η' und ζ' reell und $\eta'^2+\zeta'^2=R^2$. Nun hat man, wenn $\eta R=\eta'$, $\zeta R=\zeta'$ ist, $\eta_0+i\zeta_0=e^{i\theta_0}$, nach No. 4 (17.) und (18.) die Entwickelungen $\eta-\eta_0=\sum_1^\infty\alpha_\alpha(\zeta-\zeta_0)^\alpha$, wenn η_0 von Null verschieden ist, und $\zeta-\zeta_0=\sum_1^\infty\beta_\alpha(\eta-\eta_0)^\alpha$, wenn ζ_0 von Null verschieden ist. Hieraus ergeben sich, wenn $\eta_0'+i\zeta_0'=Re^{i\theta_0}$ ist, die Entwickelungen

$$(5.)\qquad \eta'-\eta_0' = \sum_1^\infty\frac{\alpha_\alpha}{R^{\alpha-1}}(\zeta'-\zeta_0')^\alpha,\quad \eta_0'\gtrless 0,$$

$$(6.)\qquad \zeta'-\zeta_0' = \sum_1^\infty\frac{\beta_\alpha}{R^{\alpha-1}}(\eta'-\eta_0')^\alpha,\quad \zeta_0'\gtrless 0.$$

In $x-a=\eta'-\eta_0'+i(\zeta'-\zeta_0')$ wird nun eine dieser Entwickelungen eingesetzt,

etwa die für $\eta'-\eta'_0$, wenn $\eta'_0 \gtrless 0$. Dadurch erhält man für den reellen Theil und für den Coefficienten von i in $F(x)$ bei $x=a$ Entwickelungen folgender Form, wenn $\zeta'-\zeta'_0>0$ ist:

$$(7.)\qquad (\zeta'-\zeta'_0)^a\left\{\sum_0^s k_a(\log(\zeta'-\zeta'_0))^a+S(\zeta'-\zeta'_0)\right\},$$

wo $S(\zeta'-\zeta'_0)$ die Form einer Summe der von $\zeta'-\zeta'_0$ abhängenden Entwickelungen von regulären Integralen hat, in welchen die Exponenten reell und >0, die Coefficienten reell sind, und welche Entwickelungen noch multiplicirt sind mit Ausdrücken der Form $\sin(q\log(\zeta'-\zeta'_0))$ und $\cos(q\log(\zeta'-\zeta'_0))$, worin q reell, auch $=0$ ist. α ist reell, die Coefficienten k_a sind reell und nicht alle Null, wenn $\alpha \leqq 0$ ist. Aus der Entwickelung (7.) folgt nun, wenn $\alpha \leqq 0$ ist, dass für hinreichend kleine Werthe von $\zeta'-\zeta'_0>0$ die Function (7.) das Vorzeichen nicht wechselt. Ebenso, wenn $\zeta'-\zeta'_0<0$ ist, wo $\zeta'-\zeta'_0=-\zeta''$ zu setzen ist. Es ist ferner, wenn in $x=a$ die Function nicht endlich bleibt, zu zeigen, dass $\int_{\theta_0+\varepsilon}^{\theta} u(R,\theta)\,d\theta$, wo ε positiv ist und beliebig klein werden darf, dem absoluten Werthe nach kleiner ist, als eine beliebig vorgeschriebene positive Grösse $\varkappa$, sobald $\theta\leqq\theta_1$ ist, wo θ_1 ein gewisser Werth von $\theta>\theta_0$ ist; ebenso in Bezug auf $\int_{\theta_0+\varepsilon}^{\theta} v(R,\theta)\,d\theta$.

$$(8.)\qquad \int_{\theta_0+\varepsilon}^{\theta}(u(R,\theta)+iv(R,\theta))\,d\theta = \frac{1}{i}\int\frac{F(x)}{x}\,dx,$$

wo nach x über den Kreisbogen mit $x=0$ als Mittelpunkt und dem Radius R von $\theta_0+\varepsilon$ bis θ zu integriren ist. $\frac{1}{x}=\frac{1}{a\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}$ hat eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty b_a(x-a)^a$. Mittels der Entwickelung von $F(x)$ bei $x=a$ erhält das unbestimmte Integral $\int\frac{F(x)}{x}\,dx$ eine Entwickelung bei $x=a$, in welcher die Constante annullirt wird, von der Form derjenigen eines regulären Integrales, in welcher der kleinste reelle Theil der Exponenten >0 ist. Daraus folgt, dass die Grösse (8.), wenn $\theta\leqq\theta_1$, wo θ_1 ein gewisser Werth von $\theta>\theta_0$ ist, dem Modul nach kleiner als eine vorgeschriebene positive Grösse $\varkappa$ ist. Dasselbe gilt in Bezug auf $\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta} u(R,\theta)\,d\theta$ und $\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta} v(R,\theta)\,d\theta$, wo ε positiv ist und beliebig klein werden kann, θ die Bedingung $\theta_0>\theta\geqq\theta_2$ erfüllt, wo θ_2 ein gewisser Werth von θ ist.

In der untersuchten Potenzreihe $\sum_0^\infty c_a x^a$ ist nun der Coefficient c_a

$$(9.)\qquad c_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx = \frac{1}{2\pi\varrho^\alpha}\int_0^{2\pi} F(\varrho e^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}\,d\theta,$$

wo in dem ersten Integrale über die Peripherie des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius $\varrho < R$ in positiver Richtung integrirt ist. In diesem Ausdrucke ist der Uebergang von ϱ zu R vorzunehmen. Bei einem singulären Punkte der Function $F(x)$ $x = a$ auf dem Convergenzkreise hat $\frac{1}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{a^{\alpha+1}\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\alpha+1}}$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty k_t(x-a)^t$. Wird nun die Entwickelung von $F(x)$ bei $x = a$ genommen, so ergiebt sich, dass das unbestimmte Integral $\int \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$ bei $x = a$ eine Entwickelung (in der das constante Glied annullirt ist) von der Form der von $x-a$ abhängenden Entwickelung eines regulären Integrales hat, in welcher der kleinste reelle Theil der Exponenten in den Potenzreihen > 0 ist. Daraus folgt, dass man um $x = a$ als Mittelpunkt mit einem gewissen von Null verschiedenen Radius σ einen Kreis schlagen kann, der von singulären Punkten nur a enthält, so dass, wenn man über irgend ein innerhalb dieses Kreises liegendes Kreisbogenstück, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt und dessen Radius $\varrho \leqq R$ ist, und welches keinen singulären Punkt enthält, das bestimmte Integral $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$ nimmt, der Modul dieses bestimmten Integrales kleiner ist als $\varkappa$, wo $\varkappa$ eine vorgeschriebene beliebig kleine positive Grösse ist. Es muss daher das Integral

$$(10.)\qquad \frac{1}{2\pi R^\alpha}\int_{\theta_0+\varepsilon}^{\theta'} F(Re^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}\,d\theta,$$

in welchem $x = a = e^{i\theta_0}$ ist, $\theta' > \theta_0$, ε reell und positiv ist, in dem Integrationsintervalle kein Werth θ vorkommt, der einem singulären Punkte angehört, mit unendlich abnehmendem ε sich einer bestimmten endlichen Grenze unendlich annähern. Entsprechen nun den singulären Punkten von $F(x)$ auf dem Convergenzkreise die Werthe $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_m$ und integrirt man die Function $\frac{1}{2\pi R^\alpha}F(Re^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}$ nach θ über die in dem folgenden Ausdrucke angegebenen Intervalle

$$(11.)\qquad \int_0^{\theta_0-\varepsilon_0} + \int_{\theta_0+\varepsilon'_0}^{\theta_1-\varepsilon_1} + \cdots + \int_{\theta_m+\varepsilon'_m}^{2\pi},$$

wo die Grössen ε reell und positiv, so muss jedes einzelne Integral, wenn die ε unendlich klein werden, gegen eine bestimmte endliche Grenze convergiren, die Summe dieser Grenzwerthe wird nun unter dem Integrale

$$(12.)\qquad \frac{1}{2\pi R^{\alpha}}\int_{0}^{2\pi} F(Re^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}\,d\theta$$

verstanden. Man nehme nun von dem Nullpunkte aus einen Kreissector mit dem Radius R, die beiden begrenzenden Radien sollen die Peripherie des Kreises mit dem Radius R innerhalb des obengenannten um $x = a$, mit dem Radius σ geschlagenen Kreises treffen in Punkten, denen die Werthe von θ, θ' und θ'' entsprechen, und zwischen diesen Durchschnittspunkten auf dem Kreisbogenstück mit dem Radius R soll der Punkt a liegen. Dann ergiebt sich aus dem Vorstehenden, dass die Grösse

$$(13.)\qquad \frac{1}{2\pi\varrho^{\alpha}}\int_{\theta'}^{\theta''} F(\varrho e^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}\,d\theta-\frac{1}{2\pi R^{\alpha}}\int_{\theta'}^{\theta''} F(Re^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}\,d\theta,$$

wo das zweite Integral der Grenzwerth von $\int_{\theta'}^{\theta_0-\varepsilon_0}+\int_{\theta_0+\varepsilon_0'}^{\theta''}$ bei reellen positiven unendlich klein werdenden Werthen von ε und ε_0' ist, dem Modul nach kleiner als $3\varkappa$ ist, sobald ϱ sich R soweit genähert hat, dass für das Intervall θ $\theta' \leqq \theta \leqq \theta''$, die Punkte $\varrho e^{i\theta}$ ganz innerhalb des genannten Kreises um $x = a$ mit dem Radius σ liegen. Nimmt man aber von dem Nullpunkt aus einen Kreissector mit dem Radius R, so dass auf dem Stücke der Peripherie des Kreises mit dem Radius R, welches diesem Kreissector angehört, kein singulärer Punkt liegt, und bezeichnet man die Werthe θ, welche den Begrenzungspunkten dieses Kreisbogenstückes angehören, wieder durch θ' und θ'', so ergiebt sich aus den Betrachtungen von No. 4 (vor (11.)), dass jetzt der Ausdruck (13.), wenn ϱ sich dem R unbegrenzt nähert, im reellen Theile und im Coefficienten von i unendlich klein wird. Hieraus in Verbindung mit dem vorher Gesagten folgt nun, dass der Grenzwerth des Ausdruckes (9.) für $\lim\varrho = R$, die Grösse (12.) ist; diese stellt also c_α dar.

Die Grösse (12.), welche c_α darstellt, ist gleich

$$(14.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi R^{\alpha}}\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\{u(R,\theta)\cos\alpha\theta+v(R,\theta)\sin\alpha\theta\}\,d\theta \\ -\dfrac{i}{2\pi R^{\alpha}}\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\{u(R,\theta)\sin\alpha\theta-v(R,\theta)\cos\alpha\theta\}\,d\theta, \end{cases}$$

wo die Integrale, in dem bei (11.) angegebenen Sinne zu nehmen sind. Man betrachte nun für den Fall, dass $F(x)$ in $x = a$ nicht endlich bleibt, ein Integral wie

$$(15.)\qquad \int_{\theta_0+\varepsilon}^{\theta'} u(R,\theta)\cos\alpha\theta\,d\theta,$$

worin ε positiv ist und unendlich klein werden kann und in dem Intervall $\theta_0+\varepsilon \leqq \theta \leqq \theta'$ die Function $u(R,\theta)$, wenn sie in θ_0 nicht endlich bleibt,

ihr Vorzeichen nicht wechseln soll. Dann ist das Integral (15.) gleich

$$(16.)\qquad \cos\mathfrak{a}\, t(\theta'-\theta_0-\varepsilon)\int_{\theta_0+\varepsilon}^{\theta'} u(R,\theta)\,d\theta,$$

wo t eine gewisse Grösse, so dass $0 \leqq t \leqq 1$, und wird daher nach den oben stehenden Untersuchungen (nach (7.)), wenn θ' kleiner als eine gewisse Grösse $\theta'_1 > \theta_0$ ist, kleiner als eine beliebig vorgeschriebene positive Grösse $\varkappa$. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass die Grösse (14.) gleich wird

$$(17.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi R^{\mathfrak{a}}}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\cos\mathfrak{a}\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} v(R,\theta)\sin\mathfrak{a}\theta\,d\theta\right\} \\ -\dfrac{i}{2\pi R^{\mathfrak{a}}}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\sin\mathfrak{a}\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi} v(R,\theta)\cos\mathfrak{a}\theta\,d\theta\right\}, \end{cases}$$

wo jedes der vier Integrale in dem bei (11.) angegebenen Sinne zu verstehen ist. Nun hat man

$$(18.)\qquad \int F(x)\,x^{\mathfrak{a}-1}dx = 0,\quad (\mathfrak{a} = 1\ldots\infty)$$

wo über die Peripherie des Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius $\varrho < R$ integrirt ist. Durch dieselben Betrachtungen, wie die, welche auf das Integral (9.) angewandt worden sind, beweist man, dass für $\lim\varrho = R$ der Grenzwerth des Integrales von (18.) ausgedrückt wird durch

$$(19.)\qquad R^{\mathfrak{a}}\int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta})\,e^{i\mathfrak{a}\theta}d\theta,$$

und durch die bei (14.) gemachten Betrachtungen, dass man aus (18.) und (19.) erhält

$$(20.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\cos\mathfrak{a}\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi} v(R,\theta)\sin\mathfrak{a}\theta\,d\theta \\ +i\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\sin\mathfrak{a}\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} v(R,\theta)\cos\mathfrak{a}\theta\,d\theta\right\} = 0, \end{cases}$$

jedes der Integale in dem bei (11.) angegebenen Sinne genommen.

Vermittelst (17.) und (20.) ergiebt sich nun das allgemeine Glied in der Reihe $\sum\limits_0^{\infty} c_{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{a}}$ für Werthe x auf dem Convergenzkreise

$$(21.)\qquad \begin{cases} c_{\mathfrak{a}}R^{\mathfrak{a}}e^{i\mathfrak{a}\theta} \\ = \dfrac{1}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\theta')\cos\mathfrak{a}\theta'd\theta'\cos\mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} u(R,\theta')\sin\mathfrak{a}\theta'd\theta'\sin\mathfrak{a}\theta\right\} \\ +\dfrac{i}{\pi}\left\{\displaystyle\int_0^{2\pi} v(R,\theta')\cos\mathfrak{a}\theta'd\theta'\cos\mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} v(R,\theta')\sin\mathfrak{a}\theta'd\theta'\sin\mathfrak{a}\theta\right\}, \\ (\mathfrak{a} = 1\ldots\infty). \end{cases}$$

$$(22.)\qquad c_0 = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} u(R,\theta')\,d\theta' + i\int_0^{2\pi} v(R,\theta')\,d\theta'\right\}.$$

Es ist demnach zu untersuchen, ob die *Fourier*schen Reihen

$$(23.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R,\theta')\,d\theta' \\ +\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} u(R,\theta')\cos\mathfrak{a}\theta'\,d\theta'\cos\mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} u(R,\theta')\sin\mathfrak{a}\theta'\,d\theta'\sin\mathfrak{a}\theta\right\}, \end{cases}$$

$$(24.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(R,\theta')\,d\theta' \\ +\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi} v(R,\theta')\cos\mathfrak{a}\theta'\,d\theta'\cos\mathfrak{a}\theta + \int_0^{2\pi} v(R,\theta')\sin\mathfrak{a}\theta'\,d\theta'\sin\mathfrak{a}\theta\right\} \end{cases}$$

convergiren.

Den singulären Punkten von $F(x)$ auf dem Convergenzkreise sollen die Werthe $\theta_0,\ \theta_1,\ \dots\ \theta_m$ entsprechen. Bei jedem dieser Werthe von θ, θ_r werde ein Gebiet von θ, $\theta_r - t_r \leqq \theta \leqq \theta_r + t_r$ abgegrenzt, in welchem nur einer der Werthe $\theta_0,\ \theta_1, \dots \theta_m$ liegt. Ein Gebiet von θ, welches keine der singulären Stellen $\theta_0,\ \theta_1,\ \dots\ \theta_m$ enthält, lässt sich in eine endliche Anzahl Intervalle theilen, so dass die Function $u(R,\theta)$ in jedem Intervalle mit wachsendem θ entweder nur wächst, oder nur abnimmt, oder constant bleibt (No. 4 (15.) etc.). In den Intervallen $\theta_r - t_r \leqq \theta \leqq \theta_r + t_r$ $(r = 0\dots m)$ soll nun an Stelle der Functionswerthe $u(R,\theta')$ und $v(R,\theta')$ in (23.) und (24.) Null eingesetzt werden. Dann muss für jeden Werth θ, welcher den letztgenannten Intervallen nicht angehört, die Reihe (23.) gegen $u(R,\theta)$, die Reihe (24.) gegen $v(R,\theta)$ convergiren. Nun nehme man in (23.) die Integrale zwischen den Grenzen $\theta_r - t_r$ und $\theta_r + t_r$ und für θ einen Werth, der in keinem der Intervalle $\theta_r - t_r \leqq \theta \leqq \theta_r + t_r$ $(r = 0\dots m)$ liegt. Dann ist die Summe der Glieder in (23.) bis zu dem Stellenzeiger n

$$(25.)\qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_{\theta_r - t_r}^{\theta_r + t_r} u(R,\theta')\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\theta'-\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)}\,d\theta',$$

wo hier $\frac{\theta'-\theta}{2}$ in dem Integrationsgebiete nicht verschwindet und das Integral, welches bekanntlich durch Summation der Grössen in (23.) unter den Integralzeichen erhalten wird, in dem bei (11.) angegebenen Sinne zu nehmen ist. Der absolute Werth von $\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})(\theta'-\theta)}{2\sin\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)}$ bleibt für die Werthe θ' im

Integrationsgebiet und für alle Werthe n unterhalb einer endlichen positiven Grösse. Für den Fall, dass $F(x)$ in $Re^{i\theta_r}$ nicht endlich bleibt, treten dann in Bezug auf das Integral (25.) die Betrachtungen bei (15.) ein. Es ergiebt sich, dass, wenn $\varkappa$ eine beliebig kleine vorgeschriebene positive Grösse ist, es einen positiven Werth $t' > 0$ geben muss, so dass wenn $t_r \leqq t'$ ist, der absolute Werth von S_n für alle Werthe $n = 0 \dots \infty$ kleiner als $\varkappa$ ist. Ebenso bei $v(R, \theta)$. Indem man das Vorhergehende zusammenfasst, findet man nun, dass für jeden Werth θ, welcher von $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_m$ verschieden ist, die Reihe (23.) gegen $u(R, \theta)$, die Reihe (24.) gegen $v(R, \theta)$ convergirt; also die Reihe $\sum\limits_0^\infty c_\lambda x^\lambda$ gegen den Werth der Function $F(x)$ convergirt.

Wenn bei einem der Werthe $\theta_r (r = 0 \dots m)$, die den singulären Punkten von $F(x)$ auf dem Convergenzkreise entsprechen, in einem Gebiete $\theta_r - \varepsilon$ bis $\theta_r + \varepsilon$, ε positiv und > 0, die Functionen $u(R, \theta)$ und $v(R, \theta)$ endlich und stetig bleiben, und für die Gebiete von θ, $\theta_r \leqq \theta \leqq \theta'$, $\theta_r \geqq \theta \geqq \theta''$, wo θ' und θ'' gewisse Werthe von θ sind, mit wachsendem θ entweder nur wachsen, oder nur abnehmen, oder constant bleiben, so folgt aus der *Fourier*schen Reihe, dass die Potenzreihe auch *in diesem singulären Punkte convergirt und den Werth der Function $F(x)$ darstellt.* Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn die in dem oben (Anfang von II.) aufgestellten Satze vorausgesetzte Entwickelung der in dem singulären Punkt $x = a$ endlich bleibenden Function bei $x = a$ nur *reelle* Exponenten in den Potenzreihen enthält (vgl. No. 4.). Denn diese Function bleibt in dem angegebenen Intervalle von θ endlich und stetig und man hat die Entwickelungen (5.) bez. (6.) anzuwenden und findet durch das Verfahren No. 4 (25.) (26.), dass die angegebene Bedingung erfüllt ist. Ein Beispiel, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist, während die Function in einem Gebiete $\theta_r - \varepsilon$ bis $\theta_r + \varepsilon$ endlich und stetig bleibt, ist in I dieser Nummer angegeben.

Wird der im Vorhergehenden mittels der *Fourier*schen Reihe bewiesene Satz über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise auf die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ angewandt, so ergiebt sich gemäss der Entwickelung der Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bei dem singulären Punkte $x = 1$ No. 8 (29.) und Schluss von a), dass wenn der Punkt $x = 1$ ausgenommen wird (über das Verhalten der Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. bei diesem Punkte vgl. No. 8 Schluss von a)), die Reihe für $\text{Mod}\, x = 1$ convergirt, wenn der reelle Theil von $\gamma - \alpha - \beta \geqq 0$, oder wenn $\gamma - \alpha - \beta$ reell und > -1 ist. Vgl. die bei *Riemann* in den Beiträgen zur Theorie

der durch die *Gauss*sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen in No. VIII vorkommende auf die dort betrachteten hypergeometrischen Reihen sich beziehende Stelle: „Für den Fall, wenn der Modul von x gleich 1 ist, folgt aus der *Fourier*schen Reihe, dass die Reihen zu convergiren aufhören, wenn die Function für $x = 1$ unendlich von einer höheren Ordnung als der ersten wird, aber convergent bleiben, wenn sie nur unendlich von einer niedrigern Ordnung als 1 wird, oder endlich bleibt."

Greifswald 30. December 1878.

10.

Nachtrag zu den Nummern 4 und 9.

In No. 4 war mittels der *Dirichlet*schen Resultate, die sich auf die Convergenz der *Fourier*schen Reihe beziehen, gezeigt worden, ***dass die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ für $\xi = 1$ convergirt und die Constante C_{kb} darstellt,*** sobald die Annahme gemacht wird, dass die Wurzeln der Exponentengleichung der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = 1$ alle reell sind. ***Die genannte Eigenschaft der Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ gilt aber allgemein,*** die Wurzeln jener Exponentengleichung mögen reell oder complex sein. ***Dieses kann man durch nachstehende einfache Betrachtungen über die Convergenz der Fourierschen Reihe, bei welcher die darzustellende Function auch unendlich viele Maxima und Minima haben darf, nachweisen.***

Es ist die Convergenz der *Fourier*schen Reihen No. 4 (13.) und (14.) für $\theta = 0$ nachzuweisen. Die Werthe der dort vorkommenden Functionen $u(1, \theta)$ und $v(1, \theta)$ liegen für das Gebiet von θ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ unterhalb einer endlichen Grenze und sind stetig, $u(1, 0) = u(1, 2\pi)$, $v(1, 0) = v(1, 2\pi)$. Ferner erfüllt jede dieser Functionen nach No. 4 in einem beliebigen fixirten Gebiete von θ auf der Strecke 0 bis 2π, welches die Werthe $\theta = 0$ und $\theta = 2\pi$ nicht enthält, die Bedingung, die im Folgenden als die *Dirichlet*sche bezeichnet werden soll, dass dieses Gebiet sich in eine endliche Anzahl Theile theilen lässt, so dass in jedem Theile die Function stetig ist und mit wachsendem θ entweder nur wächst oder nur abnimmt oder constant bleibt. Ueber das Verhalten der Functionen in der Nähe von $\theta = 0$ und 2π wird weiter Nichts vorausgesetzt, so dass sie also in der Nähe von $\theta = 0$ und 2π auch unendlich viele Maxima und Minima haben dürfen. Vgl. No. 9 I.

Nun sei $\varphi(\theta)$ eine reelle Function von θ, die für die Werthe θ $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ unterhalb einer endlichen Grenze liegt, bei welcher Function

dieses Gebiet von θ sich in eine endliche Anzahl Theile theilen lässt, so dass $\varphi(\theta)$ in jedem Theile stetig ist und die in jedem beliebigen fixirten Gebiete von θ auf der Strecke 0 bis 2π, welches den Werth θ' nicht enthält, die oben genannte *Dirichlet*sche Bedingung erfüllt. Wird diese Function $\varphi(\theta)$ in die *Fourier*sche Reihe eingesetzt, $\theta = \theta'$ genommen und wird summirt bis zu den Gliedern mit dem Stellenzeiger n, so ist die Summe bekanntlich

$$(1.)\qquad S_{2n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha-\theta'}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta'}{2}}d\alpha.$$

Wird nun in den Gebieten von θ $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta'$ und $\theta' \leqq \theta \leqq \theta_2$ statt der Werthe von $\varphi(\alpha)$ Null in das Integral (1.) eingesetzt, während in dem übrigen Gebiete von θ die Werthe von $\varphi(\alpha)$ in (1.) beibehalten werden, so convergirt das Integral mit unendlich werdendem n gegen Null nach *Dirichlet* (dieses Journal Bd. 4 p. 157). Es bleibt demnach übrig, den Grenzwerth für $n = \infty$ zu untersuchen von dem Ausdrucke

$$(2.)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta'}\varphi(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha-\theta'}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta'}{2}}d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta'}^{\theta_2}\varphi(\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha-\theta'}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta'}{2}}d\alpha$$

oder, wenn in dem ersten dieser Integrale $\frac{\alpha-\theta'}{2} = -\beta$, in dem zweiten $\frac{\alpha-\theta'}{2} = \beta$ gesetzt wird, den Grenzwerth für $n = \infty$ von

$$(3.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\theta'-\theta_1}{2}}\varphi(\theta'-2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\theta_2-\theta'}{2}}\varphi(\theta'+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta.$$

Hier seien θ_1 und θ_2 so gewählt, dass $\frac{\theta'-\theta_1}{2}$ und $\frac{\theta_2-\theta'}{2}$ gleich oder kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Ist $\theta' = 0$ und 2π, so ist in dem ersten Integrale (3.) $\theta' = 2\pi$, in dem zweiten $\theta' = 0$. Die weitere Behandlung der beiden Integrale geschieht in übereinstimmender Weise, es werde nun die Untersuchung des zweiten Integrales dargestellt. Hier ist zuzusehen, wenn die constante obere Grenze b die Bedingung $0 < b \leqq \frac{\pi}{2}$ erfüllt, ob alsdann

$$(4.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b\varphi(\theta'+2\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta = \tfrac{1}{2}\varphi(\theta'+0)$$

ist, oder da

$$(5.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b\varphi(\theta'+0)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta = \tfrac{1}{2}\varphi(\theta'+0),$$

es ist zu untersuchen, ob

$$(6.)\quad \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^b (\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0))\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta = 0$$

ist. Nun ist, wenn ε eine reelle Grösse, so dass $0<\varepsilon<b$

$$(7.)\quad \lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^b (\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0))\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta = 0,$$

weil in diesem Intervalle von β die Function $\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0)$ die *Dirichlet*sche Bedingung erfüllt. Wenn nun gezeigt werden kann, dass das Integral

$$(8.)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon (\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0))\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$$

mit unendlich abnehmendem ε ***unabhängig von den Werthen von n*** unendlich klein wird, so muss die Gleichung (6.) erfüllt sein. Diese Bedingung besteht darin, dass wenn η eine beliebig klein gewählte fixirte reelle Grösse >0 ist, so soll es immer eine reelle Grösse $\varepsilon_1>0$ geben, so dass, sobald $\varepsilon\leqq\varepsilon_1$ ist, der absolute Betrag von (8.) $\leqq\eta$ bleibt, welchen positiven ganzzahligen Werth n auch erhalten mag. Ist diese Bedingung erfüllt und ist $\varkappa$ eine beliebig klein gewählte fixirte reelle Grösse >0, so kann man zunächst für ε einen fixirten Werth $\leqq b$ nehmen, so dass der absolute Betrag von (8.) $<\frac{\varkappa}{2}$ ist bei beliebigen positiven ganzzahligen Werthen von n, alsdann in dem Integrale in (7.) für n einen Stellenzeiger ν, so dass, sobald $n>\nu$ ist, der absolute Betrag dieses Integrales $<\frac{\varkappa}{2}$ bleibt, dann bleibt der absolute Betrag des Integrales in (6.) $<\varkappa$, sobald $n>\nu$ geworden ist. Die Bedingung bei (8.) ist der einfachste Fall der allgemeineren, welche unter Zuhülfenahme der Gleichung (7.) zum Beweise von (6.) dient, nämlich derjenigen, dass man bei gegebenem $\varkappa$ immer einen Werth $\varepsilon>0$ nehmen kann, so dass bei ***fixirtem*** ε der absolute Betrag von (8.) $<\frac{\varkappa}{2}$ bleibt, sobald n einen gewissen Stellenzeiger ν_ε überschritten hat, der aber von der Grösse ε abhängig sein kann.

Es ist nun die bei (8.) angegebene Bedingung weiter zu untersuchen. Der absolute Betrag von $\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0)$ ist gleich $\text{Mod}[\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0)]$. Nun ist zur Erfüllung jener Bedingung hinreichend, dass, wenn man eine beliebig kleine reelle Grösse $\eta>0$ vorschreibt, es immer einen solchen Werth $\varepsilon_1>0$ giebt, dass

$$(9.)\quad \frac{1}{\pi}\int_\delta^{\varepsilon_1}\text{Mod}[\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0)]\frac{d\beta}{\sin\beta}<\eta$$

bleibt, wenn $0 < \delta < \varepsilon_1$ und δ beliebig klein werden kann. Und diese Bedingung kommt auf folgende hinaus, dass, wenn k eine Constante $\leqq b$,

$$(10.)\qquad \lim_{\delta=0} \int_\delta^k \mathrm{Mod}\,[\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0)]\,\frac{d\beta}{\sin\beta}$$

ein endlicher Werth ist. Da $\frac{\sin\beta}{\beta}$ in dem Integrationsgebiete zwischen reellen Constanten, die grösser als Null sind, liegt und, wenn die Bedingung (10.) erfüllt ist, dieselbe erfüllt bleibt, nachdem das Integral mit einer Constanten multiplicirt ist, so wird die Bedingung (10.) ersetzt durch die Bedingung, dass

$$(11.)\qquad \lim_{\delta=0} \int_\delta^k \mathrm{Mod}\,[\varphi(\theta'+2\beta)-\varphi(\theta'+0)]\,\frac{d\beta}{\beta}$$

eine endliche Grösse ist. Wird (11.) mit 2 multiplicirt und dividirt und $2\beta=\gamma$ gesetzt, so kann man die Bedingung (11.) durch folgende ersetzen, wobei die obere Grenze $l \leqq 2k$ so genommen wird, dass $0 < l \leqq \frac{\pi}{2}$ ist:

$$(12.)\qquad \lim_{\delta=0} \int_\delta^l \mathrm{Mod}\,[\varphi(\theta'+\gamma)-\varphi(\theta'+0)]\,\frac{d\gamma}{\gamma}$$

$$(13.)\qquad \lim_{\delta=0} \int_\delta^l \mathrm{Mod}\,[\varphi(\theta'+\gamma)-\varphi(\theta'+0)]\,\frac{d\gamma}{\sin\gamma}$$

sind endliche Werthe. Ist $\varphi(\theta'+\gamma)=\psi(\sin\gamma)$, $\varphi(\theta'+0)=\psi(0)$ und wird $\sin\gamma=\zeta$ gesetzt, so wird, da man in (13.) l als $<\frac{\pi}{2}$ voraussetzen kann und alsdann $\frac{d\gamma}{d\zeta}=\frac{1}{\cos\gamma}$ in dem Integrationsgebiete zwischen reellen Constanten, die grösser als Null sind, liegt, die Bedingung (13.) ersetzt durch:

$$(14.)\qquad \lim_{\delta=0} \int_\delta^{\zeta_1} \mathrm{Mod}\,[\psi(\zeta)-\psi(0)]\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

ist eine endliche Grösse, wo ζ_1 eine Constante $0<\zeta_1<1$ ist. Unter der Form (14.) wird die Bedingung hier angewandt. (Ueber die Convergenz der *Fourier*schen Reihe, wenn die darzustellende Function unendlich viele Maxima und Minima hat, vgl. die Abhandlungen der Herren *Lipschitz* dieses Journal Bd. 63 p. 296, *Thomae* Complexe Functionen, Halle 1870 p. 28–52, *P. du Bois-Reymond* dieses Journal Bd. 79 p. 54 und 55, Abh. der Baier. Acad. 1876 p. 53, *Ascoli* Ann. di Math. t. VI p. 340, 345, 346.)

Bei den zu untersuchenden *Fourier*schen Reihen No. 4 (13.) und (14.) ist in den Functionen $u(1,\theta)$ und $v(1,\theta)$ der Werth von θ, der in $\varphi(\theta)$ (1.) bis (14.) durch θ' bezeichnet worden ist, gleich 0 bez. 2π, und es ist

$\varphi(+0) = \varphi(2\pi - 0)$. Nun ist nach No. 4 $u(\varrho, \theta) + iv(\varrho, \theta)$, wo $0 \leqq \varrho \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ ist, für $\varrho e^{i\theta} = \xi$ gleich der Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$, die in dem Kreise in der ξ-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius 1 durch eine Potenzreihe mit positiven ganzzahligen Exponenten dargestellt wird, und welche Function bei unendlicher Annäherung von ξ an 1 sich der Constanten C_{kb} unendlich annähert, so dass, wie in den Nrn. 3 und 4 angegeben ist,

$$u(1, 0) + iv(1, 0) = u(1, 2\pi) + iv(1, 2\pi) = C_{kb}.$$

Daher ist

$$\left.\begin{aligned} &(15.)\quad u(1, \theta) - u(1, 0) + i(v(1, \theta) - v(1, 0)) = \mathfrak{P}_{kb}(\xi) - C_{kb}, \\ &(16.)\quad u(1, \theta) - u(1, 2\pi) + i(v(1, \theta) - v(1, 2\pi)) = \mathfrak{P}_{kb}(\xi) - C_{kb} \end{aligned}\right\} \xi = e^{i\theta}.$$

Die Function $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ hat nun in der Nähe von $\xi = 1$ die Entwickelung No. 4 (21.). Es wird weiter unten gezeigt werden, dass, wenn man zu dieser Entwickelung $-C_{kb}$ addirt, alsdann nur Potenzen von $\xi - 1$ mit solchen Exponenten vorkommen, in denen der reelle Theil > 0 ist. Aus der Entwickelung von $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ No. 4 (21.) wird nun die von $\zeta = \sin\theta$ abhängende No. 4 (22.) hergeleitet, dieselbe werde durch $\mathfrak{Q}_{kb}(\zeta)$ bezeichnet, und es ergiebt sich aus dieser Herleitung, dass auch in $\mathfrak{Q}_{kb}(\zeta) - C_{kb}$ Potenzen von ζ nur Exponenten mit einem reellen Theile > 0 enthalten. Ist $\zeta > 0$, so tritt der reelle Theil und der Coefficient von i von $\mathfrak{Q}_{kb}(\zeta) - C_{kb}$ statt $\psi(\zeta) - \psi(0)$ in (14.) ein gemäss (15.); ist $\zeta < 0$, $\zeta = -\zeta'$, so tritt der reelle Theil und der Coefficient von i von $\mathfrak{Q}_{kb}(-\zeta') - C_{kb}$ in (14.), wo ζ' statt ζ steht, für $\psi(\zeta') - \psi(0)$ ein nach (16.). Wenn nun in beiden Fällen die Bedingung (14.) erfüllt ist, so convergirt die Summe (3.) bei $u(1, \theta)$ gegen den reellen Theil, bei $v(1, \theta)$ gegen den Coefficienten von i von C_{kb}, demnach die *Fourier*sche Reihe No. 4 (13.) gegen den reellen Theil, die *Fourier*sche Reihe No. 4 (14.) gegen den Coefficienten von i von C_{kb} und die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ für $\xi = 1$ gegen C_{kb}, w. z. b. w.

Es sei nun $\zeta > 0$. Dann kann man der Entwickelung $\mathfrak{Q}_{kb}(\zeta) - C_{kb}$ die Form einer Summe mit einer endlichen Anzahl von Summanden geben, wo jeder Summand die Form

$$(17.)\quad \zeta^{\varkappa + \lambda i} \chi(\zeta) (\log \zeta)^n$$

hat, $\varkappa$ und λ reell, $\varkappa > 0$, $\chi(\zeta) = \sum_0^\infty c_\alpha \zeta^\alpha$, $\log\zeta$ reell, n ganzzahlig $\geqq 0$ ist. Da nun wegen der unbedingten Convergenz der Potenzreihe auch $\sum_0^\infty \operatorname{Mod} c_\alpha \zeta^\alpha$ convergirt, so ist der reelle Theil und der Coefficient von i in

(17.) dem absoluten Betrage nach gleich oder kleiner als

$$(18.)\qquad \zeta^{\varkappa}\sum_{0}^{\infty}\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}\zeta^{\mathfrak{a}}(\mathrm{Mod}\log\zeta)^{n}$$

und die Bedingung (14.) ist in Bezug auf den reellen Theil und den Coefficienten von i von $\mathfrak{Q}_{k\mathfrak{b}}(\zeta)-C_{k\mathfrak{b}}$ erfüllt, wenn sie in Bezug auf jede der Grössen (18.), die statt $\psi(\zeta)-\psi(0)$ eintritt, erfüllt ist. Ist $\varkappa=\varkappa'+\varkappa''$, und $\varkappa'$ und $\varkappa''$ grösser als Null, so ist $\lim\limits_{\zeta=0}\zeta^{\varkappa''}(\mathrm{Mod}\log\zeta)^{n}=0$ und da, wenn die Bedingung (14.) erfüllt ist, sie erfüllt bleibt, wenn man das Integral mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicirt, so genügt es, sie von

$$(19.)\qquad \zeta^{\varkappa'}\sum_{0}^{\infty}\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}\zeta^{\mathfrak{a}}\quad \varkappa'>0$$

nachzuweisen. Dann aber hat man, wenn ζ_1 innerhalb des Convergenzkreises von $\sum\limits_{0}^{\infty}\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}\zeta^{\mathfrak{a}}$ genommen wird,

$$(20.)\qquad \int_{\delta}^{\zeta_1}\zeta^{\varkappa'-1}\sum_{0}^{\infty}\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}\zeta^{\mathfrak{a}}d\zeta = \left|\zeta^{\varkappa'}\sum_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}}{\varkappa'+\mathfrak{a}}\zeta^{\mathfrak{a}}\right|_{\delta}^{\zeta_1}$$

und hieraus

$$(21.)\qquad \lim_{\delta=0}\int_{\delta}^{\zeta_1}\zeta^{\varkappa'-1}\sum_{0}^{\infty}\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}\zeta^{\mathfrak{a}}d\zeta = \zeta_1^{\varkappa'}\sum_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Mod}\, c_{\mathfrak{a}}}{\varkappa'+\mathfrak{a}}\zeta_1^{\mathfrak{a}}.$$

Ist $\zeta<0$, $\zeta=-\zeta'$, so hat man auf die Entwickelung $\mathfrak{Q}_{k\mathfrak{b}}(-\zeta')-C_{k\mathfrak{b}}$ dieselbe Betrachtung anzuwenden und erhält dasselbe Resultat.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass in der Entwickelung $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)-C_{k\mathfrak{b}}$, wo $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ die Entwickelung No. 4 (21.) hat, die Potenzen von $\xi-1$ nur Exponenten enthalten, deren reeller Theil >0 ist, wenn diese Entwickelung von $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)-C_{k\mathfrak{b}}$ nicht identisch Null ist. (In letzterem Falle ergiebt sich ohne Weiteres, dass die Bedingung (14.) erfüllt ist; die Potenzreihe für $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ reducirt sich auf $C_{k\mathfrak{b}}$.) Die gemachte Behauptung wird auf folgende Weise bewiesen. Wenn man in der Function $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ beliebig oft aber in endlicher Anzahl einen Umgang um $\xi=1$ vornimmt, sei es in positiver oder negativer Richtung, in einem Kreise mit $\xi=1$ als Mittelpunkt und einem Radius <1, innerhalb des Kreises mit dem Punkt $\xi=0$ als Mittelpunkt, welcher durch den dem Punkte $\xi=0$ nächsten singulären Punkt a der Differentialgleichung $G_m(y,\xi)=0$ (No. 3) bei dem $\mathrm{Mod}\, a>1$ gelegt ist, so muss der hierdurch erhaltene Werth von $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$, wenn ξ gegen 1 convergirt, sich $C_{k\mathfrak{b}}$ unendlich annähern. Diese Annäherung findet in der am Schluss von No. 3 angegebenen Weise statt, so dass, wenn man einen Kreissector mit dem Mittelpunkt $\xi=1$ nimmt und eine beliebig kleine reelle Grösse $\delta>0$ vorschreibt, man immer einen Radius $\sigma_1>0$ und einen unendlich klein werdenden σ_2 dieses Sectors

nehmen kann, so dass in dem Gebiete von ξ in diesem Sector zwischen den Radien σ_1 und σ_2 der Werth von $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ sich von $C_{k\mathfrak{b}}$ um eine Grösse unterscheidet, deren Modul $< \delta$ ist. Es ergiebt sich dieses, wenn man von der Gleichung (3.) in No. 3 ausgeht, bemerkt, dass $\frac{(\xi-1)^{-R}D}{C}$ dort bei $\xi=1$ einwerthig und stetig und gleich 1 für $\xi=1$ ist, dass demnach die rechte Seite von No. 3 (6.) die Eigenschaft hat, dass sie in der angegebenen Weise gegen $C_{k\mathfrak{b}}$ convergirt, wenn eine endliche Anzahl Umgänge um $\xi=1$ gemacht worden ist. Nun werden auf der rechten Seite von No. 3 (6.) successive Grössen abgezogen, die Entwickelungen der Form No. 4 (21.) haben, in denen die reellen Theile der Exponenten von $\xi-1$ grösser als Null sind, so dass, wenn ξ gegen 1 convergirt, jene Grössen in der angegebenen Weise gegen Null convergiren, wenn eine endliche Anzahl Umgänge um $\xi=1$ vorgenommen ist. Zuletzt wird dann noch mit der bei $\xi=1$ einwerthigen und stetigen Function $e^{rk2\pi i}(1+\xi-1)^{-r}$, die gleich 1 für $\xi=1$ ist, multiplicirt und hierdurch die Function No. 3 (9.) $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ hergestellt, welche also, wenn ξ gegen 1 convergirt, in der bezeichneten Weise gegen $C_{k\mathfrak{b}}$ convergirt, wenn eine endliche Anzahl Umgänge um $\xi=1$ gemacht worden ist. Die Function $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)$ hat bei $\xi=1$ die Entwickelung No. 4 (21.). Zieht man demnach in No. 4 (21.) auf beiden Seiten $C_{k\mathfrak{b}}$ ab, so erhält man rechts eine Entwickelung, die, wenn ξ gegen 1 convergirt, in der angegebenen Weise gegen Null convergirt, wenn eine endliche Anzahl Umgänge um $\xi=1$ vorgenommen ist. Wenn nun in dieser Entwickelung der kleinste reelle Theil der Exponenten von $\xi-1$ gleich $\varkappa$ ist, so kann man der Entwickelung die Form geben

$$(22.)\qquad (\xi-1)^{\varkappa}(U+V) = \mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)-C_{k\mathfrak{b}},$$

wo in U nur Potenzen von $\xi-1$ vorkommen, deren Exponenten zum reellen Theil Null haben, in V nur solche, deren Exponenten einen reellen Theil >0 enthalten. Wäre nun $\varkappa \leqq 0$, so müsste, da $\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)-C_{k\mathfrak{b}}$ nach einer endlichen Anzahl Umgänge um $\xi=1$, wenn ξ gegen 1 convergirt, in der oben beschriebenen Weise gegen Null convergirt, dasselbe in Bezug auf $(\xi-1)^{-\varkappa}(\mathfrak{P}_{k\mathfrak{b}}(\xi)-C_{k\mathfrak{b}})$ stattfinden. Das Nämliche tritt aber ein in Bezug auf V, es müsste also auch U dasselbe Verhalten zeigen. U hat die Form

$$(23.)\qquad U = u_0+u_1\log(\xi-1)+\cdots+u_n(\log(\xi-1))^n,$$

wo jeder Coefficient u die Form hat

$$(24.)\qquad c_0(\xi-1)^{i\gamma_0}+c_1(\xi-1)^{i\gamma_1}+\cdots+c_r(\xi-1)^{i\gamma_r},$$

die c Constanten, die γ reell sind. Bringt man U auf die Form

$$(25.)\qquad U = [u_0(\log(\xi-1))^{-n}+u_1(\log(\xi-1))^{-n+1}+\cdots+u_n](\log(\xi-1))^n$$

und nimmt nun s Umgänge in derselben Richtung um $\xi = 1$ vor, so geht die Grösse $(\xi-1)^{i\gamma}$, wo γ reell, in $e^{\pm s 2\pi\gamma}(\xi-1)^{i\gamma}$ über, wenn $\xi-1 = \varrho e^{i\theta}$, $\varrho = \text{Mod}(\xi-1)$ gesetzt wird, so ist $\text{Mod}(\xi-1)^{i\gamma} = e^{-\gamma\theta}$. Daher bleibt nach s Umgängen der Modul einer Grösse u endlich, der Modul von $\log(\xi-1)$ wird unendlich, wenn ξ gegen 1 convergirt. Aus (25.) und dem Vorhergehenden folgt dann, dass auch u_n nach einer endlichen Anzahl von Umgängen um $\xi = 1$, wenn ξ gegen 1 convergirt, in der oben angegebenen Weise gegen Null convergiren müsste. u_n hat die Form (24.), worin die Constanten c von Null verschieden, $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_r$ sein sollen, eine dieser γ kann auch gleich Null sein. Bringt man nun u_n auf die Form

$$(26.)\qquad [c_0(\xi-1)^{i(\gamma_0-\gamma_r)}+c_1(\xi-1)^{i(\gamma_1-\gamma_r)}+\cdots+c_r](\xi-1)^{i\gamma_r}$$

und wird in einem Kreissector mit $\xi = 1$ als Mittelpunkt $\log(\xi-1) = \log\varrho+\theta i$ gesetzt, so geht nach s Umgängen in positiver Richtung $c_\lambda(\xi-1)^{i(\gamma_\lambda-\gamma_r)}$ in

$$(27.)\qquad c_\lambda e^{-s 2\pi(\gamma_\lambda-\gamma_r)}e^{-(\gamma_\lambda-\gamma_r)\theta+i(\gamma_\lambda-\gamma_r)\log\varrho}$$

über. Da $\gamma_\lambda-\gamma_r > 0$, so kann der Modul von (27.) durch hinreichende Vergrösserung von s beliebig klein gemacht werden. Man nehme nun für s eine positive ganze Zahl s_1, so dass für die in dem Sector in Betracht kommenden Werthe θ

$$(28.)\qquad \begin{cases} \text{Mod}\,c_r-\text{Mod}\,c_0 e^{-s_1 2\pi(\gamma_0-\gamma_r)-\theta(\gamma_0-\gamma_r)}-\cdots \\ \qquad\cdots-\text{Mod}\,c_{r-1}e^{-s_1 2\pi(\gamma_{r-1}-\gamma_r)-\theta(\gamma_{r-1}-\gamma_r)} > A > 0, \end{cases}$$

wo A eine Constante ist. $(\xi-1)^{i\gamma_r}$ geht nach s_1 Umgängen in $e^{-s_1 2\pi\gamma_r-\theta\gamma_r+i\gamma_r\log\varrho}$ über, eine Grösse, deren Modul $e^{-s_1 2\pi\gamma_r-\theta\gamma_r} > B$ bleibt, wo B eine Constante > 0 ist. Demnach ist nach s_1 Umgängen der Ausdruck (26.) in dem betrachteten Sector dem Modul nach $> AB$ und kann also nicht gegen Null convergiren, wenn ξ gegen 1 convergirt. Es kann also nicht $\varkappa$ in (22.) $\leqq 0$ sein, w. z. b. w. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich in Bezug auf die hypergeometrische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ nach No. 8 (10.) und Schluss von $a.$), dass dieselbe für $x = 1$ convergirt und den Werth der Function darstellt, wenn der reelle Theil von $\gamma-\alpha-\beta$ grösser als Null ist.

Werden die oben (1.) bis (14.) in Bezug auf die Convergenz der *Fourier*schen Reihe gemachten Untersuchungen auf den Satz No. 9 II. angewandt, so ergiebt sich, ***dass die dort betrachtete Potenzreihe auf dem Con-***

vergenzkreise auch in einem solchen singulären Punkte convergirt, wenn in der Entwickelung der Function bei diesem singulären Punkte $x = a$ nach Abzug des constanten Gliedes nur solche Potenzen von $x-a$ vorkommen, bei denen der reelle Theil der Exponenten grösser als Null ist.

Wenn nämlich in den von θ abhängenden *Fourier*schen Reihen No. 9 (23.), (24.) dem Punkte a der Werth θ' entspricht, so kann man unter der gemachten Voraussetzung Gebiete für θ $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta'$ und $\theta' \leqq \theta \leqq \theta_2$ abgrenzen, so dass die Functionen u und v in diesen Gebieten stetig sind, und für die Strecken von θ von θ_1 bis $\theta'-\varepsilon$ und $\theta'+\varepsilon$ bis θ_2, wo ε eine beliebig klein gewählte reelle Grösse > 0 ist, die *Dirichlet*sche Bedingung erfüllen. Alsdann wird statt der Werthe von u und v auf der Strecke θ_1 bis θ_2 der Werth Null in die Reihen eingesetzt, während für die übrigen Werthe von θ die Werthe von u und v beibehalten werden. Dann convergiren die erhaltenen Reihen nach den Betrachtungen von No. 9 II. für $\theta = \theta'$ gegen Null. Auf jede der beiden übrig bleibenden Reihen der Integrale, die zwischen den Grenzen θ_1 und θ' und zwischen θ' und θ_2 zu nehmen sind, also auf einen Ausdruck wie (2.) sind nun die Betrachtungen (3.) bis (21.) anzuwenden. Dabei ist in der von $x-a$ abhängenden Entwickelung der Function $x-a = a(\xi-1)$ und nun $\xi-1 = \eta-1+i\zeta$ zu setzen und nach ζ zu entwickeln zur Anwendung von (14.), wie bei der bei (15.) (16.) betrachteten Entwickelung von $\mathfrak{P}_{kb}(\xi)$ No. 4 (21.) und (22.). Alsdann ergiebt sich, dass der Ausdruck (2.) bei u gegen den reellen Theil, bei v gegen den Coefficienten von i des constanten Gliedes in der Entwickelung der Function bei $x = a$ convergirt, dass demnach die Potenzreihe für $x = a$ gegen den Werth der Function convergirt.

Greifswald, den 1. Mai 1879.

Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles.

(Par M. *Biehler* à Paris.)

Si l'on pose:

$$(x-a_1-ib_1)(x-a_2-ib_2)\dots(x-a_n-ib_n) = U_n+iV_n,$$

$$(x-a_1-ib_1)(x-a_2-ib_2)\dots(x-a_n-ib_n)(x-a_{n+1}-ib_{n+1}) = U_{n+1}+iV_{n+1},$$

on a entre U_n, V_n, U_{n+1}, V_{n+1} les relations:

$$(1.)\qquad U_{n+1} = (x-a_{n+1})U_n+b_{n+1}V_n,$$

$$(2.)\qquad V_{n+1} = (x-a_{n+1})V_n-b_{n+1}U_n.$$

Nous allons démontrer que si b_1, b_2, ... b_{n+1} sont des quantités réelles de même signe, l'équation $U_{n+1}=0$ de degré $n+1$ a toutes ses racines réelles et inégales et qu'elles sont séparées par les n racines de l'équation $V_{n+1}=0$ qui sont également toutes réelles et inégales.

Pour le démontrer, nous admettrons que toutes les racines de l'équation $U_n=0$ sont réelles et inégales et qu'elles sont séparées par les racines de $V_n=0$; nous allons faire voir, sous ces conditions, 1°. que toutes les racines de $U_{n+1}=0$ sont réelles et inégales; 2°. que les racines de $V_{n+1}=0$ séparent les racines de $U_{n+1}=0$. Cette double proposition donne évidemment le théorème énoncé plus haut, puisqu'il se vérifie aussitôt pour $U_2=0$, $V_2=0$.

I.

Soient α_1, α_2, ... α_n les n racines de $U_n=0$ réelles et inégales, nous supposons ces quantités rangées par ordre de grandeur croissante, substituons-les dans l'équation (1.): il viendra:

$$\begin{aligned} U_{n+1}(\alpha_1) &= b_{n+1}V_n(\alpha_1),\\ U_{n+1}(\alpha_2) &= b_{n+1}V_n(\alpha_2),\\ &\vdots\\ U_{n+1}(\alpha_n) &= b_{n+1}V_n(\alpha_n). \end{aligned}$$

$V_n(\alpha_1)$, $V_n(\alpha_2)$, ... $V_n(\alpha_n)$ sont alternativement de signes contraires, par suite il y a $n-1$ racines de $U_{n+1}=0$ entre α_1 et α_2, α_2 et α_3, ... α_{n-1}

et α_n. Je dis que si $b_1, b_2, \ldots b_{n+1}$ sont de mêmes signes, il y a une $n^{\text{ième}}$ racine de $U_{n+1} = 0$ entre α_1 et $-\infty$ et une $(n+1)^{\text{ième}}$ entre α_n et $+\infty$.

En effet: $V_n(\alpha_1)$ et $V_n(-\infty)$ sont de mêmes signes; or

$$V_n(x) = -(b_1+b_2+\cdots+b_n)x^{n-1}+\cdots,$$

le terme de plus haut degré dans $V_n(x)$ est:

$$-(b_1+b_2+\cdots+b_n)x^{n-1}.$$

Par suite, si b est une quantité dont le signe est celui de $b_1, b_2, \ldots b_n$, $V_n(-\infty)$ aura le signe de $(-1)^n b$, par suite $V_n(-\infty)b_{n+1}$ aura le signe de $(-1)^n$, par suite $U_{n+1}(\alpha_1)$, dont le signe est celui de $V_n(-\infty)b_{n+1}$, aura le signe de $(-1)^n$. Or

$$U_{n+1}(x) = x^{n+1}+\cdots,$$

$$U_{n+1}(-\infty) \text{ a le signe de } (-1)^{n+1}.$$

On en conclut qu'il y a une racine de l'équation $U_{n+1} = 0$ entre α_1 et $-\infty$.

$U_{n+1}(\alpha_1), U_{n+1}(\alpha_2), \ldots U_{n+1}(\alpha_n)$ étant alternativement de signes contraires et $U_{n+1}(\alpha_1)$ étant du signe de $(-1)^n$:

$$\begin{array}{ll} U_{n+1}(\alpha_2) & \text{sera du signe de } (-1)^{n-1}, \\ U_{n+1}(\alpha_3) & \text{- - - - } (-1)^{n-2}, \\ \vdots & \\ U_{n+1}(\alpha_n) & \text{- - - - } (-1). \end{array}$$

Par suite, comme $U_n(+\infty)$ a le signe $+$, il y a une $(n+1)^{\text{ième}}$ racine de $U_{n+1} = 0$ entre α_n et $+\infty$, les racines de $U_{n+1} = 0$ sont donc réelles, distinctes et séparées par les racines de l'équation $U_n = 0$.

II.

Je dis en second lieu que les racines de $U_{n+1} = 0$ sont séparées par les racines de $V_{n+1} = 0$ qui sont aussi réelles et distinctes.

En effet, des égalités (1.) et (2.) on tire:

$$(3.) \qquad U_{n+1}V_n - V_{n+1}U_n = (U_n^2+V_n^2)b_{n+1}.$$

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n+1}$ les n racines de l'équation $U_{n+1} = 0$ rangées par ordre de grandeur; substituons-les dans l'équation (3.) qui est une identité, il viendra:

$$\begin{array}{rcl} -V_{n+1}(\beta_1)U_n(\beta_1) & = & [V_n^2(\beta_1)+U_n^2(\beta_1)]\,b_{n+1}, \\ \vdots & & \vdots \\ -V_{n+1}(\beta_{n+1})U_n(\beta_{n+1}) & = & [V_n^2(\beta_{n+1})+U_n^2(\beta_{n+1})]\,b_{n+1}. \end{array}$$

Or $U_n(\beta_1)$, $U_n(\beta_2)$, ... $U_n(\beta_{n+1})$ sont alternativement de signes contraires d'après ce qui précède; par suite, comme les seconds membres conservent un signe invariable,

$$V_{n+1}(\beta_1), \quad V_{n+1}(\beta_2), \quad \ldots \quad V_{n+1}(\beta_{n+1})$$

sont alternativement de signes contraires, et par suite il y a une racine de $V_{n+1} = 0$ entre β_1 et β_2, une 2ième entre β_2 et β_3 etc. une $n^{\text{ième}}$ entre β_n et β_{n+1}.

Les racines de $V_{n+1} = 0$ sont donc réelles et inégales et séparent les racines de $U_{n+1} = 0$.

III.

L'équation (2.), savoir

$$V_{n+1} = (x - a_{n+1})V_n - U_n b_{n+1}$$

montre que les racines de $V_n = 0$ *séparent les racines de* $V_{n+1} = 0$. Soient α'_1, α'_2, ... α'_{n-1} les racines de $V_n = 0$, on aura:

$$\begin{array}{lcl} V_{n+1}(\alpha'_1) & = & -U_n(\alpha'_1)b_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{n+1}(\alpha'_{n-1}) & = & -U_n(\alpha'_{n-1})b_{n+1}. \end{array}$$

Comme $U_n(\alpha'_1)$, ... $U_n(\alpha'_{n-1})$ sont de signes contraires, il reste $n-2$ racines de $V_{n+1} = 0$ entre α'_1 et α'_2, α'_2 et α'_3, ... α'_{n-2} et α'_{n-1}; il suffit de montrer qu'il y en a une entre α'_1 et $-\infty$ et une autre entre α'_{n-1} et $+\infty$ ce qui se fait comme précédemment.

Paris, avril 1879.
